*УДК 681.3*

# ПОСТРОЕНИЕ ПРОЦЕДУР ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМА ПРИ РЕШЕНИИ СЛАБОФОРМАЛИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

**© 2003 Я. Е. Львович, М. А. Артемов, С. Ю. Белецкая**

*Воронежский государственный университет*
*Воронежский государственный технический университет*

Рассматривается организация процедур прогнозирования значения глобального экстремума в адаптивных алгоритмах поисковой оптимизации на основе метода $\Psi$-преобразований. Обсуждаются вопросы использования различных стратегий прогнозирования при решении слабоформализованных оптимизационных задач.

Постановка многих практических задач оптимального проектирования и управления сводится к их формулировке в виде задачи нелинейной параметрической оптимизации:

$$f(X) \to \min_{X \in D}, \qquad (1)$$

где $X = (x_1, ..., x_n)^T$ — вектор варьируемых параметров модели; $f(X)$ — критерий оптимальности; $D$ — допустимая область, представленная системой ограничений задачи. При этом предполагается, что критерий оптимальности задан алгоритмически в виде моделирующего алгоритма, позволяющего по заданным значениям вектора варьируемых параметров $X = (x_1, ..., x_n)^T$ получать значения $f(X)$.

Решение задачи (1) предполагает выделение в качестве инвариантной части подзадачи безусловной оптимизации алгоритмически заданной целевой функции $F(X) = F(x_1, ...x_n)$:

$$F(x_1, ..., x_n) \to \min_{X \in R^n}.$$

Отсутствие аналитической формулировки критерия делает задачу слабоформализованной, осложняет идентификацию свойств оптимизационной модели на априорном уровне и приводит к необходимости применения алгоритмов оптимизации поискового типа [1], не использующих дифференциальные характеристики целевой функции.

Для алгоритмизации слабоформализованной оптимизационной задачи целесообразным является использование адаптивных поисковых процедур [2, 3, 4], основанных на вероятностной переформулировке (рандомизации) исходной постановки:

$$M[F(X)] \to \min_{\{X\}}, \qquad (2)$$

где $M$ — операция математического ожидания; $\{X\}$ — множество случайных векторов.

Итерационные процедуры поиска оптимальных вариантов формируются в множестве случайных векторов следующим образом [2, 3]:

$$X^{N+1} = X^N + \alpha_N Y^N, \quad (3)$$

где $N$ — номер итерации; $Y^N$ — случайный вектор, задающий направление движения; $\alpha_N$ — величина шага в данном направлении.

В работах [2, 3] предлагается определять направление поиска $Y^N$ на каждой итерации в виде:

$$Y^N = M_U \left[ \frac{\Phi[F(U^N) - C_N]}{\omega_n \left| X^N - U^N \right|^n} (X^N - U^N) \right]. \qquad (4)$$

Здесь $C_N = const$ — уровень оптимизируемой функции; $X$, $U$ — случайные векторы; $\omega_n$ — площадь поверхности единичной сферы в пространстве $R^n$; $\Phi(t)$ — монотонная неубывающая функция, такая, что $\Phi(t) \cdot t > 0$, $\Phi(0) = 0$.

В основе последующей алгоритмизации лежит переформулировка итерационной процедуры (4) с использованием вероятностных характеристик случайных векторов. Различные алгоритмические схемы поисковой оптимизации, построенные на базе рассматриваемого подхода, представлены в работах [2, 3, 4]. Там же приведены результаты вычислительных экспериментов, свидетельствующие об устойчивости и эффективности данных оптимизационных процедур.

Алгоритмы оптимизации поискового типа используют только значения критерия оптимальности, что открывает возможность их применения при работе с алгоритмическими моделями, характеризующимися низким уровнем формализации. Однако значения критерия, определение которых с помощью моделирующих алгоритмов требует существенных вычислительных затрат, применяются в данных процедурах лишь для сравнения и в дальнейшем отбрасываются. С целью более полного учета получаемой в процессе поиска информации о значениях целевой функции предлагается использовать ее для прогнозирования глобального экстремума. В качестве основы построения процедур прогнозирования выбран метод $\Psi$-преобразований [5], модифицированный с учетом специфики адаптивных поисковых алгоритмов.

Основная идея метода $\Psi$-преобразований заключается в замене многоэкстремальной функции $F(X)$ унимодальной $\Psi(\xi)$, образованной в результате лебегова разбиения $F(X)$ [5]. Лебегово разбиение может быть получено путем разделения интервала [inf $F(X)$; sup $F(X)$] на равные промежутки:

$$\inf F(X) = \xi_m < \ldots < \xi_1 = \sup F(X)..$$

Значения целевой функции $F(X)$ определяются по результатам $L$ испытаний, в ходе которых осуществляется случайный выбор точек $X_i$ из допустимой области $D$. Преобразование функции $F(X)$ в $\Psi(\xi)$ состоит в определении совокупности множеств $E_j$, на каждом из которых $F(X)$ не превосходит заданное значение $\xi_j$:

$$E_j : F(X) \le \xi_j, \;\; j = \overline{1,m}.$$

Для каждого множества $E_j$ вычисляется соответствующая мера:

$$\mu_j = \frac{S_j}{L}, \qquad (5)$$

где $L$ — общее число испытаний для определения значений $F(X)$; $S_j$ — количество случаев, при которых $F(X) \le \xi_j$. В работе [5] доказано, что функция $\mu = \Psi(\xi)$ монотонно убывает при уменьшении $\xi_j$ от максимального ($\xi_1 = \sup F(X)$) до минимального ($\xi_m = \inf F(X)$) значения и обращается в ноль при $\xi^* = F_{opt}$. Таким образом, задача определения значения глобального экстремума $F_{opt}$ сводится к аппроксимации функции $\Psi(\xi)$ по точкам $\mu_j$ и ее последующей минимизации, т.е. к определению значения аргумента $\xi^*$, при котором $\Psi(\xi^*) = 0$.

Как было показано, в адаптивных алгоритмах поисковой оптимизации в качестве схемы перебора выбирается случайный механизм. Следовательно, реализации поискового случайного вектора $X$ и соответствующие значения целевой функции, формируемые в ходе оптимизационного процесса, могут быть использованы в качестве статистической информации для прогнозирования значения глобального экстремума. Рассмотрим различные стратегии прогнозирования.

Первая из предлагаемых стратегий связана с хранением всех значений целевой функции $F(X)$, полученных в процессе работы поисковой процедуры. Для облегчения последующей обработки информации значения $F(X)$ последовательно упорядочиваются. При этом осуществляется подсчет количества вычислений целевой функции $g$, которое может интерпретироваться как число испытаний.

После $k$ итераций происходит переключение с поисковой процедуры на блок прогнозирования значения глобального экстремума. Исходной информацией при прогнозировании являются накопленные в процессе поиска значения оптимизируемой функции $F(X)$. С целью более равномерного заполнения допустимой области $D$ имеющийся список значений $F(X)$ дополняется r значениями, вычисленными в точках, равномерно распределенных в области $D$ (при этом $r < g$). Общее число испытаний определяется в виде суммы: $L = g + r$. На основании имеющейся информации находятся максимальное ($\sup F(X)$) и минимальное ($\inf F(X)$) значения целевой функции. Далее определяется параметр $\Delta\xi$ — величина шага для последующей итерационной перестройки уровня $\xi$:

$$\Delta\xi = \frac{\sup F(X) - \inf F(X)}{m},$$

где $m$ — число точек разбиения, задаваемое пользователем.

Уровень $\xi$ перестраивается следующим образом:

$$\xi_{j+1} = \xi_j - \Delta\xi_j, \;\; \xi_1 = \sup F(X), \quad j = \overline{1,m}.$$

Для каждого значения $\xi_j$ по схеме (5) определяется соответствующая мера $\mu_j$ множества $E_j$, после чего по полученным точкам $\mu_j = \Psi(\xi_j)$ производится аппроксимация функции $\Psi(\xi)$:

$$\Psi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2. \tag{6}$$

Коэффициенты аппроксимирующего полинома $a_0,\ a_1,\ a_2$ определяются с использованием метода наименьших квадратов:

$$\sum_{i=0}^{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_j^{i+k}\right)a_i = \sum_{j=1}^{m}\Psi(\xi_j)\xi_j^k\ ,\ k = 0,1,2. \tag{7}$$

Для определения значения глобального экстремума решается следующее квадратное уравнение:

$$a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0. \tag{8}$$

Наименьший положительный корень уравнения будет равен значению глобального экстремума: $\xi^* = F_{opt}$.

Рассмотренный подход не требует внесения изменений в алгоритмы поисковой оптимизации. Процедуры оптимального поиска и блок прогнозирования являются независимыми друг от друга. При этом необходимо хранение в памяти ЭВМ всех значений оптимизируемой функции. Для уменьшения вычислительных затрат может быть предложена стратегия, при которой процедуры прогнозирования встраиваются в структуру алгоритмов оптимизации, и накопление информации для аппроксимации функции $\Psi(\xi)$ осуществляется в ходе оптимизационного процесса.

На начальном этапе поиска по случайному закону с равномерным распределением выбираются точки $X_i$, принадлежащие допустимой области $D$, и вычисляются соответствующие значения оптимизируемой функции $F_i(X), i = \overline{1,r}$. Здесь $r$ — число первоначальных испытаний. При этом $r < N$, где $N$ — количество итераций для работы алгоритма поисковой оптимизации, задаваемое пользователем. Значения критерия оптимальности упорядочиваются по возрастанию:

$$F_1(X) < F_2(X) < ... < F_r(X).$$

Точка, соответствующая минимальному значению целевой функции $F_1(X)$, принимается за начальное приближение в поисковой процедуре оптимизации. На основании полученных значений целевой функции вычисляется шаг для итерационной перестройки уровня $\xi$:

$$\alpha_\xi = \frac{F_r(X) - F_1(X)}{\beta}.$$

Параметр $\beta$ на начальном этапе равен единице, а затем в процессе поиска может быть увеличен для настройки шага $\alpha_\xi$. После определения шага $\alpha_\xi$ начинает работу процедура поисковой оптимизации.

Уровень $\xi$ перестраивается в процессе поиска следующим образом:

$$\xi_{j+1} = \xi_j - \alpha_\xi.$$

При этом $\xi_1 = F_r(X) = \sup F(X),\ \xi_2 = \xi_1 - \alpha_\xi = F_1(X)$. Условием для перестройки уровня $\xi_j$ является получение хотя бы одного значения $F(X) < \xi_j$.

Параллельно с поиском экстремума для каждого $\xi_j$ определяется параметр $P_j$ — число значений целевой функции, удовлетворяющих условию: $F(X) > \xi_j$. Вычисление значений $P_j$ осуществляется по итерационной схеме:

$$P_j = P_{j-1} + \Delta P_j,$$

где $\Delta P_j$ — количество случаев, когда $\xi_j < F(X) \le \xi_{j-1}$. При этом $P_1 = 0$; $P_2 = r - 1$.

В процессе оптимизации осуществляется подсчет числа вычислений значений целевой функции $g$. В результате после $N$ итераций будет сформировано $m$ значений $\xi_j$ и $P_j$:

$$\xi_1 \dots \xi_m,$$
$$P_1 \dots P_m.$$

Значения $\mu_j$ для аппроксимации функции $\Psi(\xi)$ определяются следующим образом:

$$\mu_j = \frac{S_j}{L},\ \text{где}\ S_j = L - P_j.$$

Здесь $L$ — общее число испытаний, $L = r + g$. После определения $\mu_j$ осуществляется аппроксимация функции $\Psi(\xi)$ и определение значения глобального экстремума по схемам (7), (8).

При применении рассмотренных выше стратегий оценивается лишь значение глобального экстремума, так как определение координат глобального оптимума по методу $\Psi$-преобразований приводит к существенным ошибкам в силу невыпуклости оптимизируемой функции. В этой связи предлагаемые процедуры прогнозирования не заменяют алгоритмов поисковой оптимизации, а применяются как дополнение к ним с целью более полного учета текущей информации. Полученная в результате прогнозирования информация о значении глобального экстремума облегчает идентификацию возникающих в ходе оптимизационного процесса ситуаций (оврагов, локальных экстремумов) и способствует обоснованному выбору стратегий поиска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Батищев Д.И., Львович Я.Е., Фролов В.Н.* Оптимизация в САПР. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. 416 с.

2. *Каплинский А.И., Руссман И.Б., Умывакин В.М.* Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. 168 с.

3. *Каплинский А.И., Пропой А.И.* Структурные составляющие методов нелокального поиска, использующих теорию потенциала. — М.: ВНИИСИ, 1990. 53 с.

4. *Львович Я.Е., Каплинский А.И., Белецкая С.Ю.* Дискретно-непрерывные модели оптимального проектирования. — Воронеж: ВГТУ, 1997.

5. *Чичинадзе В.К.* Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. — М.: Наука, 1983. — 256 с.