УДК 681.3

О НЕЧЕТКИХ ИМПЛИКАЦИЯХ, ПОЛУЧЕННЫХ ОБОБЩЕНИЕМ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

© 2003 Т. М. Леденева, А. В. Грибовский

Воронежский государственный университет

В статье исследуется класс нечетких импликаций, полученных обобщением булевой импликации и определяемых с помощью треугольных норм и соответствующих им функций отрицания.

Функционирование большинства реально работающих прикладных систем основано на использовании композиционных правил нечеткого вывода modus popens и modus tollens, основой которых является импликация. Определение нечеткой импликации является одной из важнейших проблем нечеткого моделирования.

В булевой логике импликация представляется в виде:

$$I(x,y) = x \to y = \overline{x} \vee y, \tag{1}$$

где $^{-}$ — булево отрицание, $\vee$ — дизъюнкция. По определению $I(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=1$ и $y=0$.

В нечеткой логике для определения импликации используется несколько подходов (логический, аксиоматический). Рассмотрим один из них, который заключается в обобщении булевой импликации на нечеткий случай. Естественно, что такое обобщение требует конкретизации нечеткой дизъюнкции и отрицания, при этом в точках $(0,0),(0,1),(1,0)$ и $(1,1)$ должно выполняться определение нечеткой импликации. В рамках данного подхода в статье будут рассмотрены следующие вопросы: определение операции отрицания для двойственных треугольных норм, представимых отношением двух многочленов или многочленом; определение импликаций для троек де Моргана; исследование количественных и качественных взаимосвязей между импликациями данного класса.

Целенаправленное моделирование семантических связок в нечеткой логике осуществляется на основе треугольных норм — T-норм и S-конорм, причем T-нормы определяют конъюнкцию, а S-конормы — дизъюнкцию.

Треугольная T-норма есть бинарная операция $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $T(1,x)=x$ (существование нейтрального элемента 1).
2. $\forall x,y\in[0,1]$ если $x\le y$, то $T(x,z)\le T(y,z)$ (монотонность).
3. $T(x,y)=T(y,x)$ (коммутативность).
4. $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$ (ассоциативность).
5. $T(0,x)=0$ (граничное условие).

Соответственно, треугольная S-конорма представляет собой бинарную операцию $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $S(0,x)=x$ (существование нейтрального элемента 0).
2. $\forall x,y\in[0,1]$ если $x\le y$, то $S(x,z)\le S(y,z)$ (монотонность).
3. $S(x,y)=S(y,x)$ (коммутативность).
4. $S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)$ (ассоциативность).
5. $S(1,x)=1$ (граничное условие).

С алгебраической точки зрения, структура $([0,1],T)$ есть полугруппа с нейтральным элементом 1, а $([0,1],S)$ − полугруппа с нейтральным элементом 0.

Важнейший класс нечетких конъюнкций и дизъюнкций составляют треугольные нормы и конормы, представимые отношением двух многочленов (в частном случае многочленом) (табл. 1).

Отличительной особенностью этих операций является то, что в силу ассоциативности они представимы в виде [1]

$$\Phi(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)),$$

где $\Phi=\{T,S\}, \varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^{+}$ — непрерывная монотонная функция, определяемая с точно-

Таблица 1

Конъюнкции (Т-нормы)	Дизъюнкции (S-нормы)
$T(x,y)=\min(x,y)$	$S(x,y)=\max(x,y)$
$T_p(x,y)=xy$	$S_p(x,y)=x+y-xy$
$T_m(x,y)=\max(x+y-1,0)$	$S_m(x,y)=\min(x+y,1)$
$T_0=\dfrac{xy}{x+y-xy}, T_0(0,0)=0$	$S_{-1}=\dfrac{x+y-2xy}{1-xy}, S_{-1}(1,1)=1$
$T_\alpha(x,y)=\dfrac{xy}{\alpha+(1-\alpha)(x+y-xy)}, \alpha>0$	$S_\beta(x,y)=\dfrac{(\beta-1)xy+x+y}{1+\beta xy}, \beta>-1$
$T_d(x,y)=\begin{cases} y, & x=1 \\ x, & y=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$S_d(x,y)=\begin{cases} y, & x=0 \\ x, & y=0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

стью до положительной константы и называемая аддитивным генератором.

В [2] представлены аддитивные генераторы нечетких операторов из табл. 1. Аддитивные генераторы используются для определения операции отрицания, с помощью которой для нечетких дизъюнкций и конъюнкций вводится понятие двойственности — n-дуальности.

Операции отрицания $n:[0,1]\to[0,1]$ есть невозрастающая функция, такая что $n(0)=1$, $n(1)=0$. Если функция $n(x)$ непрерывна и строго убывает, то она называется строгим отрицанием. Строгое отрицание называется сильным отрицанием или инволюцией, если выполнено равенство $n(n(x))=x$; при $n(n(x))<x$ отрицание называется слабым, при $n(n(x))>x$ обычным. Если $n(x)$ — строгое отрицание, то $n^{-1}(x)$ также является строгим отрицанием.

Легко увидеть, что для любой операции отрицания справедливы неравенства:

$$\forall x\in[0,1] \quad \underline{n}(x)\le n(x)\le \bar{n}(x),$$

где $\underline{n}$ и $\bar{n}$ определяются следующим образом:

$$\underline{n}(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x>0 \end{cases} \qquad \bar{n}(x)=\begin{cases} 1, & x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

T-норма и S-конорма называются n-дуальными, если существует операция отрицания n, такая что для любых x и y из $[0,1]$

$$\begin{cases} n\left(T(x,y)\right)=S\left(n(x),n(y)\right), \\ n\left(S(x,y)\right)=T\left(n(x),n(y)\right). \end{cases}$$

Заметим, что для каждой пары двойственных операций существует свое отрицание. Тройка (T, S, n) называется тройкой де Моргана.

В [4] дана функциональная характеристика n-дуальности через аддитивные генераторы: пусть g и f — генераторы дизъюнкции и конъюнкции соответственно, тогда

$$n=f^{-1}\circ l_t\circ g=g^{-1}\circ l_{1/t}\circ f, \qquad (2)$$

где $\circ$ означает суперпозицию функций, $l_t(x)=tx \quad (t>0)$. В [4] приведены следующие замечания к такому представлению операции отрицания: если $f(0)$ и $g(1)$ конечны, то $t=f(0)/g(1)$ — единственная константа, если $f(0)$ (соответственно $g(1)$) конечна и $g(1)$ (соответственно $f(0)$) бесконечна, то не существует константы t, удовлетворяющей (2), если $f(0)$ и $g(1)$ бесконечны, то возможны две ситуации — или константа t является единственной, или соотношение (2) справедливо для любого t, а значит существует целый набор операций, устанавливающих n-дуальность.

В [4] операция строгого отрицания определяется через аддитивный генератор S-конормы в виде

$$n(x)=f^{-1}(f(1)-f(x)).$$

На основе данных результатов получены операции отрицания, обеспечивающие n-дуальность нечетких операторов из табл. 1: для классических, граничных, алгебраических и драстических операторов:

$$n(x)=1-x;$$

для T_0 и S_{-1} — множество отрицаний Суджено:

$$n_\lambda(x)=\frac{1-x}{1+(\lambda-1)x}, \quad \lambda>0;$$

для T_α, S_β:

$$n_{\alpha\beta}(x) = \frac{1-x}{1+\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}x}.$$

В [3] вводятся обобщенные алгебраические операции $S_t(x,y) = x + y - txy$ и $T_t(x,y) = (1-t)(x+y) + txy - (1-t)$. Для $S_t(x,y)$ аддитивный генератор

$$f_t(x) = -\frac{1}{t}\ln|1-tx|$$

индуцирует сильное отрицание

$$n_t(x) = \frac{1-x}{1-tx}.$$

Заметим, что отрицание $n(x) = 1-x$ является универсальным, так как действует для всех пар двойственных операторов из табл. 1 (при $\lambda = 1$, $(\beta+1)/\alpha = 1$, $t = 0$).

Итак, рассматривая в качестве дизъюнкции S-конорму, введем импликацию следующим образом:

$$I(x,y) = S(n(x),y),$$

где $n(x)$ — соответствующая данной дизъюнкции операция отрицания.

Заметим, что такое определение предполагает использование такой операции отрицания $n(x)$, которая обеспечивает n-дуальность T-нормы и соответствующей S-конормы.

Используя дизъюнкцию Заде $S(x,y) = \max(x,y)$ и соответствующую операцию отрицания $n(x) = 1-x$, получим импликацию Diene (рис. 1a):

$$I(x,y) = max(1-x,y).$$

$S_p(x,y)$ и $n(x) = 1-x$ дают импликацию Mizumoto (рис. 1b):

$$I_p(x,y) = 1-x+xy.$$

Пара $S_d(x,y)$ и $n(x) = 1-x$ определяет импликацию Dubois-Prade (рис. 1c):

$$I_d(x,y) = \begin{cases} 1-x, & y = 0 \\ y, & x = 1 \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На основе $S_m(x,y)$ и $n(x) = 1-x$ получается импликация Лукасевича (рис. 1d):

$$I_m(x,y) = min(1-x+y,1).$$

Для пары $T_0(x,y)$ и $S_{-1}(x,y)$, как известно, существует множество отрицаний Суджено.

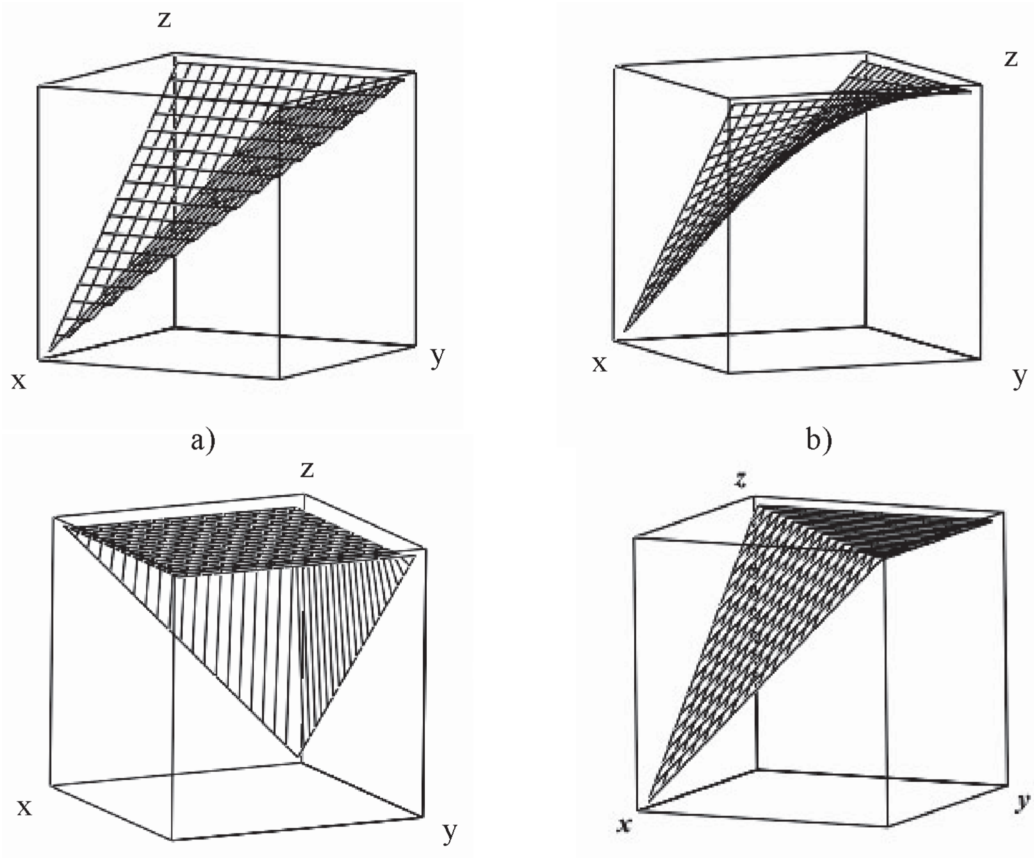

Рис. 1. Поверхности, задаваемые функциями нечеткой импликации

Введем импликацию с помощью операции

$$I_\lambda(x,y) = \frac{1 - x - y + (\lambda + 1)xy}{1 + (\lambda - 1)x - y + xy}$$

Влияние параметра λ на форму поверхности I_λ представлено на рис. 2.

Для $S_\beta(x,y)$ и $n_{\alpha\beta}(x)$ импликацию можно определить следующим образом:

$$I_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1 - x + \beta y + (\frac{1+\beta}{\alpha} - \beta)xy}{1 + (\frac{1+\beta}{\alpha} - 1)x + \beta y - \beta xy}$$

Влияние параметров α и β на форму поверхности $I_{\alpha\beta}$ представлено на рис. 3.

Используя $S_t(x,y)$ и $n(x) = 1 - x$ получим импликацию вида:

$$I_t(x,y) = 1 - x + y - ty + txy.$$

$I_t(x,y)$ принимает свои наибольшее и наименьшее значения на границе квадрата $[0,1]\times[0,1]$. Если $x = 1$, то $I_t(1,y) = y$ и достигает наибольшего значения 1 при $y = 1$, а наименьшего 0 при $y = 0$. Аналогично, рассматривая остальные три случая: $x = 0, y = 1, y = 0$, получим, что при $t > 1$, $2 - t \le I_t(x,y) \le 1$, следовательно, для ограничения области значений импликация I_t должна использоваться в виде:

$$I_t(x,y) = max(1 - x + y - ty + txy, 0).$$

При $t \le 1$, $1 \le I_t(x,y) \le 2 - t$ и I_t имеет вид:

$$I_t(x,y) = min(1 - x + y - ty + txy, 1).$$

На рис. 4 показано, как выглядит поверхность I_t при различных значениях t.

В рамках данного подхода целесообразным является исследование согласованности импликаций с существующими системами аксиом.

В [5] нечеткая импликация $I(x,y)$ определяется как функция $I:[0,1]\times[0,1] \to [0;1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. Если $x \le z$, то $I(x,y) \ge I(z,y)$ (убывание по первой переменной);
2. Если $y \le z$, то $I(x,y) \le I(x,z)$ (возрастание по второй переменной);
3. $I(0,y) = 1$;
4. $I(x,1) = 1$;
5. $I(1,0) = 0$.

Кроме того, в некоторых случаях на $I(x,y)$ могут дополнительно накладываться следующие требования [3], [5]:

6. $I(1,x) = x$;

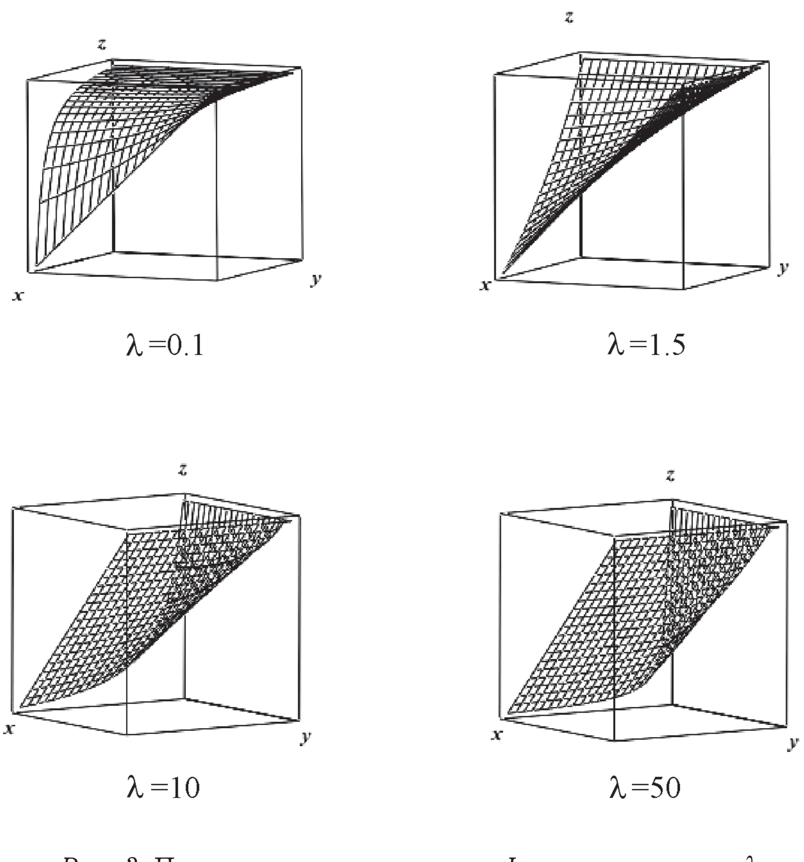

Рис. 2. Поверхности, задаваемые I_λ при различных λ

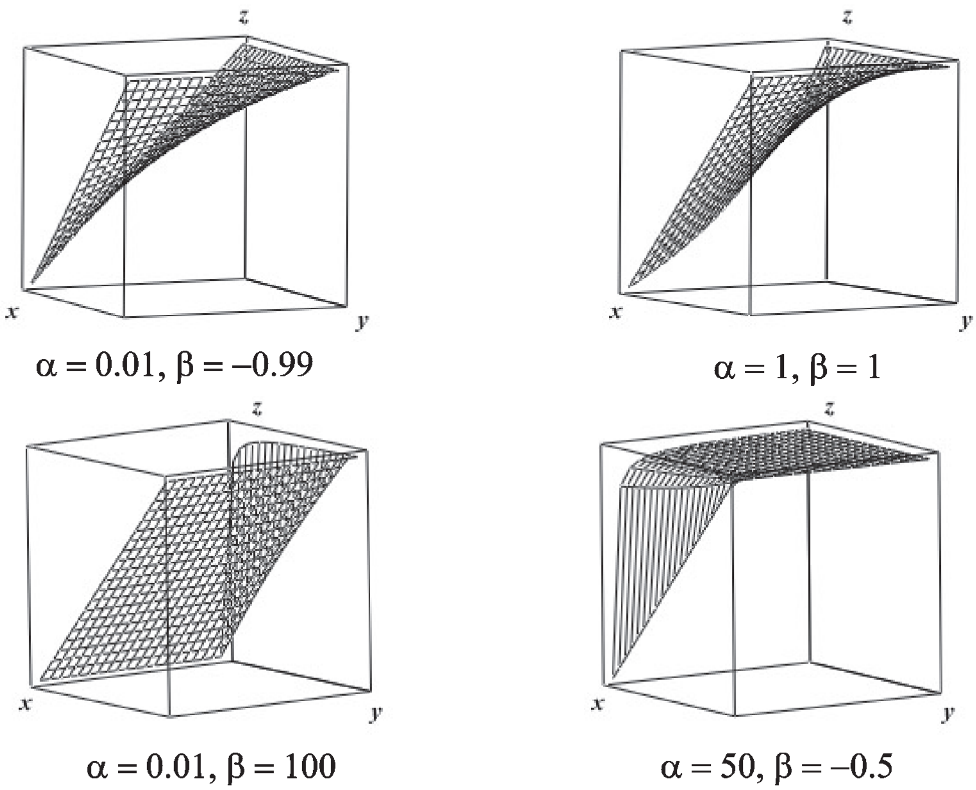

Рис. 3. Поверхности, задаваемые $I_{\alpha\beta}$ при различных α и β

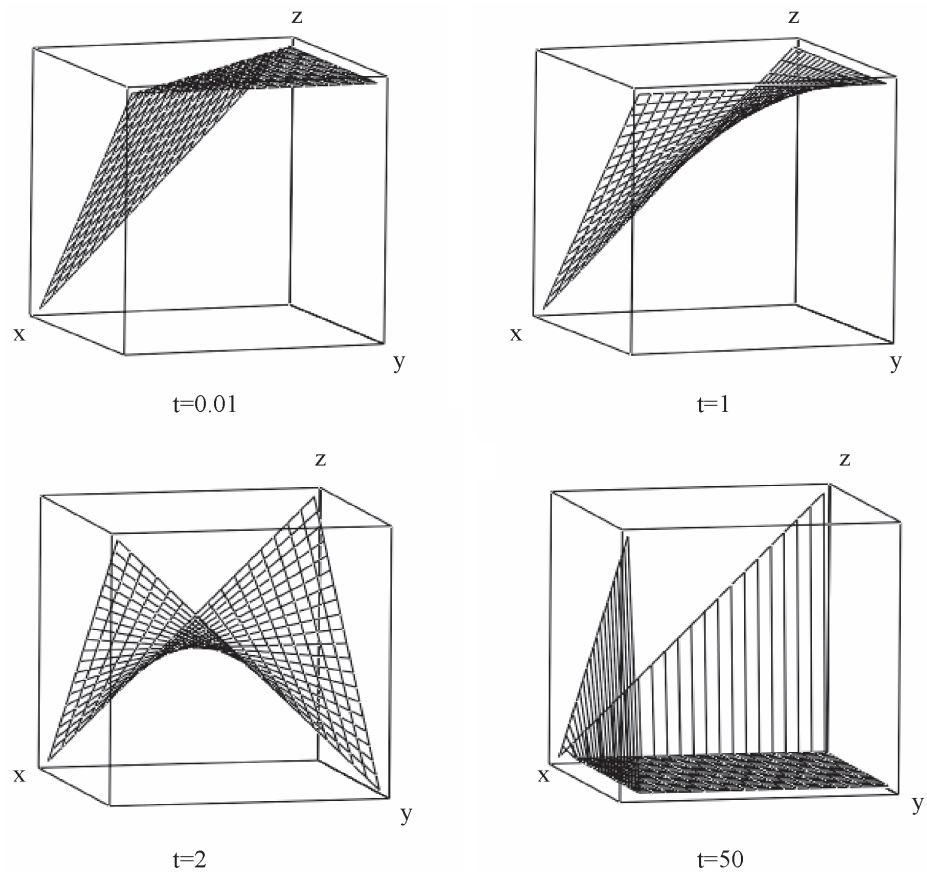

Рис. 4. Поверхности, задаваемые I_t при различных t

7. $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$;

8. $x \le y$ тогда и только тогда, когда $I(x,y)=1$;

9. $I(x,0) = n(x)$ есть сильное отрицание;

10. $I(x,y) \ge y$;

11. $I(x,x) = 1$;

12. $I(x,y) = I(n(y), n(x))$, где n — сильное отрицание;

13. $I(x,y)$ — непрерывная функция.

В табл. 2 приведены наиболее часто используемые операторы импликации и перечислены свойства, которым они удовлетворяют.

Поскольку импликации не являются коммутативными функциями, то возникает вопрос о существовании коммутатора $\mathcal{K}(x,y)$ — такой функции, «добавление» которой к $I(x,y)$ или $I(y,x)$ обеспечивает свойство коммутативности, т.е.

$$I(x,y) = I(y,x) * \mathcal{K}(x,y),$$

где $*$ есть некоторая операция.

Оказывается, что в определении коммутатора, для всех импликаций существенную роль играет величина $d(x,y) = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}$, которая определяет класс импликаций вида

$$I_d^k(x,y) = \min\left(1, \left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)^k\right), k \ge 1.$$

Поверхность, задаваемая I_d^k при $k=1$, представлена на рис. 5.

Так, если операция $\ominus$ есть нормированная разность*, то [3]:

$$I_p(x,y) \ominus I_p(y,x) = \frac{y-x}{y(1-x)} = 1 - d(x,y);$$

$$I_\lambda(x,y) \ominus I_\lambda(y,x) =$$

$$= (1-d(x,y))\frac{1-x-y+(1+\lambda)xy}{1-(1-\lambda)x-y+xy} \to$$

$$\to 1-d(x,y) \quad \text{при} \quad \lambda \to 0;$$

$$I_{\alpha\beta}(x,y) \ominus I_{\alpha\beta}(y,x) =$$

$$= (1-d(x,y))\frac{1+x+y-\left(1+2\beta-\frac{1+\beta}{\alpha}\right)xy}{1+\left(\frac{1+\beta}{\alpha}-1\right)x+\beta y-\beta xy} =$$

$$= 1-d(x,y) \quad \text{при} \quad \alpha = 1 \quad \text{и} \quad \beta = 1.$$

В полученных выражениях правая часть представляет собой коммутатор, а в качестве $*$ выступает $\oplus$.

В [3] показано, что S-конормы, представленные в табл. 2, удовлетворяют следующим неравенствам:

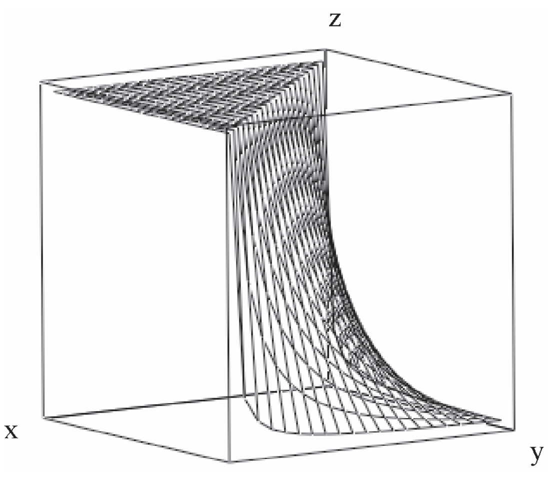

Рис. 5. Поверхность, задаваемая I_d^k при $k=1$

* Напомним, как определяется нормированная разность: пусть $a, b \in [0,1]$, причем $a < b$, тогда выражение $b \ominus a = \frac{b-a}{1-a}$ представляет собой нормированное значение b на интервале нормировки $[a,1]$.

Таблица 2

Название	Общий вид	Выполненные свойства
Diene	$I(x,y) = \max(1-x, y)$	1–7, 9, 10, 12, 13
Mizumoto	$I_p(x,y) = 1-x+xy$	1–7, 9, 10, 12, 13
Dubois-Prade	$I_d(x,y) = \begin{cases} 1-x, & y=0 \\ y, & x=1 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$	1–7, 9–12
Лукасевича	$I_m(x,y) = \min(1-x+y, 1)$	1–13
	$I_\lambda(x,y) = \frac{1-x-y+(\lambda+1)xy}{1+(\lambda-1)x-y+xy}$	1–7, 9, 10, 12

$$S(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_p(x,y) \le \\ \le S_m(x,y) \le S_d(x,y) \le 1. \quad (3)$$

Позиция $S_\beta(x,y)$ определяется следующим образом: если $\beta \in (-1,0)$, то

$$S(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_\beta(x,y) \le S_p(x,y) \le \\ \le S_m(x,y) \le S_d(x,y) \le 1;$$

если $x+y>1$ и $\beta \in (0,\infty)$, то

$$S(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_p(x,y) \le S_\beta(x,y) \le \\ \le S_m(x,y) \le S_d(x,y) \le 1;$$

если $x+y<1$ и $\beta \in (0, \frac{1}{1-(x+y)})$, то

$$S(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_p(x,y) \le S_\beta(x,y) \le \\ \le S_m(x,y) \le S_d(x,y) \le 1;$$

если $x+y<1$ и $\beta \in (\frac{1}{1-(x+y)}, \infty)$, то

$$S(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_p(x,y) \le S_m(x,y) \le \\ \le S_\beta(x,y) \le S_d(x,y) \le 1;$$

если $\beta = \frac{1}{1-(x+y)}$, то

$$S_m(x,y) = S_\beta(x,y);$$

если $\beta \to \infty$, то

$$S(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_p(x,y) \le S_m(x,y) \le \\ \le S_\beta(x,y) \le S_d(x,y) \le 1.$$

Найдем теперь позицию S_t в неравенстве (3) при различных значениях t. Сравним S_t и S_{-1}:

$$S_t - S_{-1} = -xy\frac{t+x+y-txy-2}{1-xy}$$

Анализ величины $h(x,y) = t+x+y-txy-2$ показывает, что своих наибольшего и наименьшего значений она достигает на границе рассматриваемой области $[0,1]\times[0,1]$. Тогда при $x=0$ имеем: $h(0,y) = y+t-2$ достигает наибольшего значения $t-1$ при $y=1$ и наименьшего $t-2$ при $y=2$. Аналогично при $x=1$ получим выражение $h(1,y) = (t-1)(1-y)$; при $t>1$ наибольшее значение будет равно $t-1$, наименьшее 0, соответственно, при $t<1$ 0 будет наибольшим значением , а $t-1$ — наименьшим. При $t=1$ $max_{y\in[0,1]}h(1,y) = min_{y\in[0,1]}h(1,y) = 0$. В силу симметрии функции $h(x,y)$ относительно прямой $0z$ ($h(x,y)=h(y,x)$), при $y=1$ и $y=0$ $h(x,y)$ имеет те же самые наибольшее и наименьшее значение.

Следовательно,

$$max_{[0,1]\times[0,1]}h(x,y) = max\{0, t-1\},$$

$$min_{[0,1]\times[0,1]}h(x,y) = min\{0, t-2\}.$$

Тогда, если $t \le 1$, то $h(x,y) \le 0 \Rightarrow S_t \ge S_{-1}$, а если $t \ge 2$, то $h(x,y) \ge 0 \Rightarrow S_t \le S_{-1}$. Если же $t \in (0,1)$, то S_t и S_{-1} пересекаются.

Сравним теперь S_t и S_p при $t \le 1$: $S_p - S_t = xy(t-1) \le 0$, т.е. $S_p \le S_t$.

Сравним S_t и S_m при $t \le 1$.

Если $x+y<1$, то $S_m = x+y$ и $S_m - S_t = txy \ge 0$ при $t \ge 0$. Если $x+y \ge 1$, то $S_m \ge S_t$ (здесь учитывается тот факт, что при $t \in (0,1)$ S-конорма S_t рассматривается в виде $S_t = min(1, x+y-txy)$).

Следовательно, получим следующую последовательность неравенств: при $t \in (0,1]$:

$$S(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_p(x,y) \le S_t(x,y) \le \\ \le S_m(x,y) \le S_d(x,y) \le 1;$$

при $t \ge 2$:

$$S(x,y) \le S_t(x,y) \le S_{-1}(x,y) \le S_p(x,y) \le \\ \le S_m(x,y) \le S_d(x,y) \le 1.$$

Предположим, что для получения импликаций $I_{\alpha\beta}(x,y)$ и I_λ используется отрицание $n(x) = 1-x$. В этом случае $\alpha = 1+\beta$, следовательно

$$I_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1-x+\beta y+(1-\beta)xy}{1+\beta y-\beta xy}, \quad (4)$$

и $\lambda = 1$, тогда $I_\lambda(x,y) = \frac{1-x-y+2xy}{1-y+xy}$. Таким образом, все импликации получены при использовании одинакового отрицания, а так как они определяются через S-конормы, для них выполняются те же неравенства, что и для соответствующих S-конорм.

Полученные неравенства позволяют ранжировать нечеткие операторы, но не показывают, насколько они близки между собой. Для этого используется так называемое псевдометрическое расстояние, которое определяется следующим образом [5]: пусть $f_1, f_2 : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ — функции двух переменных, тогда псевдометрическое расстояние $d(f_1, f_2)$ равно

$$d(f_1,f_2) = \int_0^1\int_0^1 |f_1(x,y) - f_2(x,y)|\,dxdy$$

Для S-конорм из неравенства (3) попарные расстояния равны: $d(S, S_{-1}) = (10-\pi^2)/3$, $d(S_{-1}, S_p) = (4\pi^2 - 39)/12$, $d(S_p, S_m) = 1/12$ и $d(S_m, S_d) = 1/6$.

Если $\lambda = 1$, то $n_\lambda(x) = 1-x$, тогда так как

$$\int_0^1\int_0^1 |f_1(1-x,y) - f_2(1-x,y)|\,dxdy = \\ = \int_0^1\int_1^0 |f_1(1-x,y) - f_2(1-x,y)|\,d(1-x)dy = \\ = \int_0^1\int_0^1 |f_1(z,y) - f_2(z,y)|\,dzdy,$$

где $z = 1 - x$, то справедливы следующие равенства, определяющие степень близости нечетких импликаций:

$$d(I, I_\lambda) = (10 - \pi^2)/3,$$

$$d(I_\lambda, I_p) = (4\pi^2 - 39)/12,$$

$$d(I_p, I_m) = 1/12,$$

$$d(I_m, I_d) = 1/6.$$

В [6] было проведено исследование различных классов импликаций, целью которого был поиск свойств, достаточных для «хорошего» поведения оператора нечеткой импликации в задачах нечеткого управления. Считалось, что оператор ведет себя «хорошо», если он демонстрировал хорошие средние результаты в различных приложениях в сочетании с различными методами дефаззификации. Для анализа использовались три приложения: нечеткая модель простейшей функции $y = x$ и две трехмерных поверхности. Были получены следующие результаты: операторы нечеткой импликации, показавшие хорошие результаты, удовлетворяли следующим свойствам:

1. $\forall x \in [0,1]$ $I(x,0) = 0$;
2. $\forall x \in (0,1)$ $I(x,1) > 0$, $I(1,1) = 1$;
3. $\forall y \in [0,1]$ $I(0,y) = 0$.

Как легко заметить, требование 3 противоречит свойству 3 для нечеткой импликации, следовательно, класс импликаций, рассматриваемый в данной статье, требует более тщательного подбора метода дефаззификации чем, например, T-нормы, используемые в роли импликации, и, как было показано в [6], при удачном подборе метода дефаззификации может демонстрировать очень хорошие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.

2. *Леденева Т.М.* Некоторые аспекты представления нечетких операторов отношением двух многочленов. // Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. № 11. С. 33—40.

3. *Леденева Т.М.* Моделирование процесса агрегирования информации в целенаправленных системах. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 1999.

4. *Трильяс Э., Альсина К., Вальверде Л.* Нужны ли в теории нечетких множеств операции max, min, $1-j$? // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р. Р. Ягера. М.: Радио и связь, 1986. С. 199—228.

5. *Leski J. M.* ε-Insensitive learning techniques for approximate reasoning systems.// International Journal of Computational Cognition, 2003, V. 1, № 1, P. 21—77.

6. *Cordon O., Herrera F., Peregrin A.* Searching for basic properties obtaining robust implication operators in fuzzy control. // Fuzzy Sets and Systems 111 (2000), P. 237—251.