

УДК 519.6

О НАХОЖДЕНИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2003 В. Г. Курбатов, М. Н. Орешина

Липецкий государственный технический университет

Обсуждается метод приближенного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$N \frac{d^2}{dt^2} x + D \frac{d}{dt} x + Bx = bu(t),$$

основанный на его сведении к двум уравнениям первого порядка и решении последних путем построения специальных функций от матриц. Матричные коэффициенты N , D и B могут иметь большой порядок, являются самосопряженными и неотрицательно определенными, причем матрица N может быть необратимой. Основное ограничение состоит в том, что одна из матриц N или B мала, а матрица D обратима. Источником таких уравнений являются, например, уравнения Кирхгофа линейной RLC -цепи, выписанные с помощью метода контурных токов или узловых напряжений.

ВВЕДЕНИЕ

В статье описывается приближенный метод решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$N \frac{d^2}{dt^2} x + D \frac{d}{dt} x + Bx = f.$$

Здесь коэффициенты N , D и B являются самосопряженными и неотрицательно определенными квадратными матрицами, могут иметь большой порядок n , а матрица N может быть необратимой. Кроме того предполагается, что одна из матриц N или B мала, а матрица D обратима.

В качестве основного источника таких уравнений мы имеем в виду уравнения Кирхгофа линейной RLC -цепи, выписанные с помощью метода контурных токов или узловых напряжений [1, 2]. Малость матриц N и B в случае метода контурных токов соответствует малой величине индуктивностей катушек и большой величине емкостей конденсаторов, присутствующих в цепи, а в случае метода узловых напряжений — малой величине емкостей конденсаторов и большой величине индуктивностей катушек. На математическом уровне это предположение влечет действительность спектра соответствующего матричного пучка, а на физическом — отсутствие

колебательных явлений. А обратимость матрицы D соответствует тому, что в цепи достаточно много сопротивлений.

Необходимость в решении подобных уравнений возникает, например, в связи с задачами автоматического проектирования микросхем, см. [3, 4, 5]. При создании микросхемы ее работу первоначально стараются смоделировать на компьютере. Современная микросхема может содержать миллионы транзисторов и других деталей. Поэтому система уравнений, описывающая ее работу, имеет огромную размерность. Чтобы упростить эту систему, входящие в нее линейные уравнения обычно решают отдельно, а результат представляют в оставшиеся нелинейные.

Уравнения, описывающие работу линейных частей схемы, составляют, исходя из различных модификаций уравнений Кирхгофа. В теоретических исследованиях для этого чаще всего используют метод переменных состояния [6, 7], а для практических расчетов — модифицированный метод узловых напряжений [5]. Оба метода приводят к уравнению первого порядка

$$D \frac{d}{dt} x + Bx = f,$$

которое во многих отношениях удобнее уравнения второго порядка, поскольку уравнения

первого порядка изучены в общей теории дифференциальных уравнений более обстоятельно. Но здесь матрица D , как правило, не является обратимой и самосопряженной. Классический метод решения уравнений первого порядка с необратимым коэффициентом D основан на возможности следующего преобразования, восходящего к Вейерштрассу [8] и Кронекеру [9] (см. также [10] и [11]): для любой пары матриц D и B существуют невырожденные квадратные матрицы T и S , такие что

$$TDS = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad TBS = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

где матрица D_1 нильпотентна. Прозрачное объяснение существования такого преобразования, использующее контурные интегралы от резольвенты, можно найти в [12, 13], но этот подход малоэффективен с вычислительной точки зрения. Современный численный алгоритм построения подобного преобразования берет начало от работы Стюарта [14], см. также его изложение и обсуждение в [10], [15] и [16]. К сожалению, этот алгоритм в случае матриц большого порядка является довольно трудоемким и поэтому не всегда удобен. Предлагаемый в статье альтернативный подход не требует диагонализации матриц.

Опишем вкратце содержание статьи. Но вначале уточним постановку задачи.

По физическому смыслу для электрических цепей естественна начальная задача на оси, которую мы и обсуждаем в настоящей работе: до некоторого момента времени цепь находилась в нулевом положении равновесия $x(t) = 0$, $t < t_0$, затем поступил входной импульс в виде свободного члена f , который вызвал некоторый ответный отклик $x(t)$, $t > t_0$. С математической точки зрения такая постановка задачи сводится к нахождению решения x , удовлетворяющего дифференциальному уравнению на всей оси в предположении, что $f(t) = 0$ левее некоторой точки t_0 , в классе функций x , обладающих тем же свойством.

Свободный член f обычно имеет только небольшое число ненулевых координат; это соответствует тому, что электрическая схема имеет лишь небольшое число источников

напряжения и тока. При этом в силу линейности, влияния различных входов можно считать независимыми. Тем самым задача сводится к решению уравнения с правой частью вида $f(t) = bu(t)$, где u — заданная функция, а b — фиксированный вектор:

$$N \frac{d^2}{dt^2} x + D \frac{d}{dt} x + Bx = bu.$$

Напомним, что нас интересует решение на оси, таким образом, входной сигнал u предполагается равным нулю левее некоторой точки t_0 , и ищется решение также равное нулю левее t_0 . Если требуется рассматривать одновременно несколько входов, то можно, оставаясь в рамках той же задачи, считать, что u — столбец небольшой высоты, а b — матрица соответствующей размерности.

В § 1 с помощью теории операторных пучков [17, 18] решение дифференциального уравнения второго порядка сводится к решению двух уравнений первого порядка $x' - Zx = f$ и $Yx' - x = f$, см. теоремы 17 и 18. Для возможности такого сведения принципиально предположение о том, что одна из матриц N или B мала. В этом случае матрицы Z и Y оказываются подобными самосопряженным, а их спектры содержатся в полусоси $(-\infty, 0]$; матрица Y , вообще говоря, оказывается необратимой.

В § 2 обсуждаются методы приближенного решения уравнения $x' - Zx = f$. Существенную роль играет предположение о том, что правая часть f имеет вид $f = bu$, где u — скалярная непрерывная функция, а b — независящий от t вектор. В приложениях функция u обычно обладает характерным графиком. Учет особенностей этого графика, в частности, его непрерывности позволяет в значительной мере пренебрегать собственными значениями, находящимися далеко от нуля. В теореме 19 устанавливается, что решение уравнения $x' - Zx = bu$ имеет вид $x = \vartheta_i(Z)b$, где ϑ_i — аналитическая функция, явно выражающаяся через функцию u . Далее функция ϑ_i заменяется рациональной функцией r_i , приближающей ее на отрезке $[-z_1, 0]$, содержащем спектр матрицы Z , а приближенное решение вычисляется по формуле $\tilde{x} = r_i(Z)b$. Использование рациональной функции r_i вместо аналитической функции

ϑ_i предпочтительнее тем, что для прямого [11,19,20] вычисления $\vartheta_i(Z)$ надо знать собственные значения и собственные векторы матрицы Z , а для вычисления $r_i(Z)$ достаточно посчитать конечное число степеней матрицы Z и найти обратные к некоторым матрицам. Более того, поскольку не требуется знать $r_i(Z)$ целиком, а достаточно вычислить только $r_i(Z)b$, можно ограничиться нахождением не степеней матрицы Z и обратных к матрицам, а лишь итерациями матрицы Z , примененными к вектору b , и решением соответствующих систем линейных уравнений.

В § 3 обсуждаются способы приближенного решения уравнения $Yx' - x = f$. Предлагаемый здесь метод похож на метод, используемый в § 2. Снова существенную роль играет то обстоятельство, что правая часть f имеет вид $f = bu$. Решение уравнения $Yx' - x = bu$ представляется в виде $x = \xi_i(Y)b$. Но здесь ξ_i — функция, отличная от ϑ_i , хотя и выражающаяся через нее. Она также заменяется рациональной функцией r_i , приближающей ее на отрезке $[-y_1, 0]$, содержащем спектр матрицы Y , а приближенное решение вычисляется по формуле $\tilde{x} = r_i(Y)b$.

В § 4 описывается полный алгоритм решения, а в § 5 приводятся результаты численного эксперимента.

В тех же предположениях о малости емкостей конденсаторов и индуктивностей катушек уравнение первого порядка $D \frac{d}{dt} x + Bx = f$, описывающую ту же электрическую цепь, обладает близкими свойствами. В частности, спектр матричного пучка $\lambda D + B$ также содержится в $(-\infty, 0]$. Но как перенести излагаемый метод на уравнение первого порядка не ясно. См. по этому поводу обсуждение в конце статьи.

Авторы выражают благодарность В. П. Золотову за полезные обсуждения.

1. ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Напомним [1, 2], что применение метода контурных токов или узловых напряжений приводит к записи уравнений Кирхгофа линейной RLC -цепи в виде векторного интегро-дифференциального уравнения

$$N \frac{d}{dt} x + Dx + B \int x dt = bu,$$

где b — фиксированный вектор, а u — заданная скалярная функция, описывающая форму входного сигнала. Это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка

$$N \frac{d^2}{dt^2} x + D \frac{d}{dt} x + Bx = bu'. \quad (1)$$

Последнее уравнение обладает важным преимуществом по сравнению с уравнениями первого порядка [5, 6, 7], описывающими ту же электрическую цепь: в нем коэффициенты N , D и B являются неотрицательно определенными. В этом параграфе мы увидим, как эту особенность можно использовать. В основе наших рассуждений лежит теория операторных пучков [17, 18]. Основные результаты параграфа — теоремы 17 и 18, в которых решение уравнения второго порядка сводится к решению двух уравнений первого порядка.

Итак, будем рассматривать уравнение (1) в предположении, что N , D и B — самосопряженные неотрицательно определенные матрицы. Переобозначая функцию u' через u , его можно переписать в виде

$$N \frac{d^2}{dt^2} x + D \frac{d}{dt} x + Bx = bu. \quad (2)$$

Рассмотрим для уравнений (1) и (2) начальную задачу на оси: функция u предполагается равной нулю до некоторого момента времени t_0 , а решение x ищется в классе функций, удовлетворяющих соответствующему уравнению на всей оси, и также равное нулю до момента времени t_0 . Если не оговорено противное, будет предполагаться, что $t_0 = 0$.

Матричную функцию

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 N + \lambda D + B$$

называют [17,18] пучком, соответствующим уравнению (2), а матричную функцию

$$\mathcal{M}(\mu) = N + \mu D + \mu^2 B$$

— обратным пучком. Если $\mathcal{L}(\lambda)\phi = 0$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ и ненулевого $\phi \in \mathbb{C}$, то число λ называют собственным значением, а вектор ϕ — собственным вектором пучка. Множество всех собственных значений называют спектром пучка. Очевидно, собственные значения пучка \mathcal{L} удовлетворяют уравнению

$$\det \mathcal{L}(\lambda) = 0.$$

Левую часть этого уравнения называют *характеристическим многочленом*.

Предложение 1. Пусть N, D и B — самосопряженные неотрицательно определенной матрицы. Тогда спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ лежит в левой комплексной полуплоскости.

Доказательство. Пусть ϕ — собственный вектор пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, соответствующий собственному значению λ . Тогда имеем

$$0 = \langle \mathcal{L}(\lambda)\phi, \phi \rangle = \lambda^2 \langle N\phi, \phi \rangle + \lambda \langle D\phi, \phi \rangle + \langle B\phi, \phi \rangle = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

где $a = \langle N\phi, \phi \rangle$, $b = \langle D\phi, \phi \rangle$ и $c = \langle B\phi, \phi \rangle$. По предположению, $a, b, c \geq 0$. Таким образом, λ есть решение квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ с неотрицательными коэффициентами a, b и c . Несложно проверить, что решения такого уравнения имеют неположительные действительные части. \square

Далее будем предполагать, что матрица D обратима. Для нашего основного примера это соответствует тому, что электрическая цепь содержит достаточно много сопротивлений. В этом случае уравнение (2) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} Mx + \frac{d}{dt} x + Ax = D^{-1}bu, \tag{3}$$

где $M = D^{-1}N$ и $A = D^{-1}B$. В силу приводимого ниже предложения 4 матрицы M и A являются самосопряженными и неотрицательно определенными относительно D -скалярного произведения (4).

Пусть D — самосопряженная положительно определенная матрица. Наряду с обычным скалярным произведением в \mathbb{R}^n рассмотрим D -скалярное произведение

$$\langle \phi, \psi \rangle_D = \langle D\phi, \psi \rangle, \tag{4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — обычное скалярное произведение. И наряду с обычными нормами будем рассматривать D -нормы векторов и операторов (матриц)

$$\begin{aligned} \|\psi\|_D &= \sqrt{\langle D\psi, \psi \rangle}, \\ \|A\|_D &= \sup\{\|A\psi\|_D : \|\psi\|_D = 1\} = \\ &= \sup\{\sqrt{\langle DA\psi, A\psi \rangle} \sqrt{\langle D\psi, \psi \rangle} = 1\} = \\ &= \sup\{\sqrt{\langle DA\psi, A\psi \rangle} / \sqrt{\langle D\psi, \psi \rangle} \mid \psi \neq 0\}, \end{aligned}$$

порожденные скалярным произведением (4).

Предложение 2. Пусть B — неотрицательно определенная матрица. Тогда матрица $A = D^{-1}B$ является самосопряженной и неотрицательно определенной относительно скалярного произведения (4), т.е.

$$\langle A\phi, \psi \rangle_R = \langle \phi, A\psi \rangle_R \text{ и } \langle A\phi, \phi \rangle_R \geq 0$$

для всех $\phi, \psi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle D^{-1}B\phi, \psi \rangle_D &= \langle DD^{-1}B\phi, \psi \rangle = \langle B\phi, \psi \rangle, \\ \langle \phi, D^{-1}B\psi \rangle_D &= \langle D\phi, D^{-1}B\psi \rangle = \\ &= \langle \phi, DD^{-1}B\psi \rangle = \langle \phi, B\psi \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку правые части совпадают, матрица $A = D^{-1}B$ является D -самосопряженной.

Покажем, что матрица $A = D^{-1}B$ неотрицательно определена. В самом деле, имеем $\langle A\phi, \phi \rangle_D = \langle D^{-1}B\phi, \phi \rangle_D = \langle B\phi, \phi \rangle \geq 0$, поскольку B неотрицательно определена. \square

Замечание 1. Обозначим через \mathbb{R}_D^n пространство \mathbb{R}^n , наделенное скалярным произведением (4) и порожденной им нормой. Обозначим через T матрицу $D^{1/2}$. Нетрудно проверить, что $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_D^n$ является изометрическим изоморфизмом. При этом D -самосопряженной матрице $A = D^{-1}B : \mathbb{R}_D^n \rightarrow \mathbb{R}_D^n$ соответствует самосопряженная матрица $T(D^{-1}B)T^{-1} = D^{-1/2}BD^{1/2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Следствие 3. В условиях предложения 4 спектр матрицы $A = D^{-1}B$ содержится в $[0, +\infty)$. Существует D -ортонормированный базис $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ в \mathbb{R}^n , состоящий из собственных векторов матрицы A .

Доказательство. Это хорошо известные свойства самосопряженной неотрицательно определенной матрицы. \square

Пусть $\|\cdot\|_*$ — некоторая фиксированная норма на алгебре матриц. Положим $a = \|A\|_* = \|D^{-1}B\|_*$ и $b = \|M\|_* = \|D^{-1}N\|_*$. Сопоставим уравнению (3) квадратное уравнение

$$bz^2 - z + a = 0, \tag{5}$$

Всюду ниже предполагается, что

$$1 - 4ab > 0 \tag{6}$$

или в явном виде

$$\|D^{-1}B\|_* \|D^{-1}N\|_* < 1/4.$$

В случае выполнения условия (6) уравнение (5) имеет действительные корни

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4ab}}{2b} \text{ и } z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2b}.$$

В терминах нашего основного примера предположение (6) соответствует малой величине индуктивностей катушек и большой величине емкостей конденсаторов, присутствующих в цепи, при условии составления уравнений по методу контурных токов, см. также пример в § 5; либо малой величине емкостей конденсаторов и большой величине индуктивностей катушек при условии использования метода узловых напряжений.

Предложение 4. Пусть выполнено условие (6). Тогда матричное уравнение

$$MZ^2 + Z + A = 0 \quad (7)$$

имеет единственное решение Z , удовлетворяющее неравенству $\|Z\|_* \leq z_1$. Более того, Z может быть получено как предел последовательности

$$Z_0 = 0, \quad Z_1 = -A, \quad Z_{k+1} = -A - MZ_k^2,$$

которая сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство. Перепишем уравнение (7) в виде

$$Z = -A - MZ^2$$

и рассмотрим отображение $\mathcal{F}(Z) = -A - MZ^2$, действующее в пространстве матриц. Покажем, что \mathcal{F} переводит шар $Q = \{Z : \|Z\|_* \leq z_1\}$ в себя, и \mathcal{F} является сжимающим отображением с коэффициентом $k = 1 - \sqrt{1 - 4ab} < 1$. Поэтому в силу принципа сжимающих отображений \mathcal{F} имеет единственную неподвижную точку в Q и последовательные приближения $Z_{k+1} = -A - MZ_k^2$ при любом $Z_0 \in Q$ сходятся к этой неподвижной точке.

Итак, проверим сначала, что \mathcal{F} переводит шар Q в себя. Пусть $Z \in Q$, т.е. $\|Z\|_* \leq z_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(Z)\|_* &= \|-A - MZ^2\|_* \leq \\ &\leq \|A\|_* + \|M\|_* \|Z\|_*^2 = a + b\|Z\|_*^2 \leq a + bz_1^2 = z_1, \end{aligned}$$

так как z_1 — корень уравнения $a + bz^2 = z$.

Проверим теперь, что \mathcal{F} является сжимающим на Q с коэффициентом $k = 2z_1b = 1 - \sqrt{1 - 4ab} < 1$. Действительно, для $Z_1, Z_2 \in Q$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(Z_1) - \mathcal{F}(Z_2)\|_* &= \|MZ_1^2 - MZ_2^2\|_* \\ &\leq \|M\|_* \|Z_1^2 - Z_2^2\|_* \\ &= b\|Z_1^2 - Z_2^2\|_* \\ &= b\|Z_1^2 - Z_1Z_2 + Z_1Z_2 - Z_2^2\|_* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq b(\|Z_1^2 - Z_1Z_2\|_* + \|Z_1Z_2 - Z_2^2\|_*) \\ &\leq b(\|Z_1\|_* \|Z_1 - Z_2\|_* + \|Z_1 - Z_2\|_* \|Z_2\|_*) \\ &\leq b(\|Z_1\|_* + \|Z_2\|_*) \|Z_1 - Z_2\|_* \\ &\leq 2z_1b\|Z_1 - Z_2\|_* \\ &= k\|Z_1 - Z_2\|_*. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 5. Пусть Z — произвольное решение уравнения (7). Тогда дифференциальное уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1}\right)\left(\frac{d}{dt}\mathbf{1} - Z\right)x = D^{-1}bu. \quad (8)$$

Доказательство. Поскольку $MZ^2 + Z + A = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}M + \mathbf{1}\frac{d}{dt} + A &= \frac{d^2}{dt^2}M + \mathbf{1}\frac{d}{dt} + A - (MZ^2 + Z + A) \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2}M - MZ^2\right) + \left(\frac{d}{dt}\mathbf{1} - Z\right) \\ &= M\left(\mathbf{1}\frac{d^2}{dt^2} - Z^2\right) + \left(\frac{d}{dt}\mathbf{1} - Z\right) \\ &= M\left(\mathbf{1}\frac{d}{dt} + Z\right)\left(\mathbf{1}\frac{d}{dt} - Z\right) + \left(\mathbf{1}\frac{d}{dt} - Z\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}M + MZ\right)\left(\mathbf{1}\frac{d}{dt} - Z\right) + \left(\mathbf{1}\frac{d}{dt} - Z\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1}\right)\left(\frac{d}{dt}\mathbf{1} - Z\right). \quad \square \end{aligned}$$

Ниже мы будем рассматривать вспомогательное уравнение

$$\frac{d}{dt}x - Zx = f \quad (9)$$

и сведем решение исходного уравнения (3) к решению уравнения (9).

Предложение 6. ([17, теорема 30.2]) Пусть

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} (\lambda^2 M + \lambda \mathbf{1} + A)^{-1} d\lambda, \\ H &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \lambda (\lambda^2 M + \lambda \mathbf{1} + A)^{-1} d\lambda, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\rho \in (z_1, z_2)$ — произвольное число. Тогда матрицы G и H являются D -самосопряженными, причем G является D -положительно определенной. Более того, матрица $Z = HG^{-1}$ — решение уравнения (7), и ее спектр лежит в круге $\{\lambda : |\lambda| \leq z_1\}$.

Доказательство. Доказательство см. в [17]. Заметим лишь, что для $z_1 < z < z_2$ имеем $z > bz^2 + a$, или, подробнее, $z > \|M\|_* z^2 + \|A\|_*$.

Следовательно, матрица $\lambda^2 M + \lambda \mathbf{1} + A$ обратима при всех λ , $z_1 < |\lambda| < z_2$. \square

Следствие 7. (ср. с предложением 2 и следствием 3) Матрица $Z = HG^{-1}$ является самосопряженной и неположительно определенной относительно DG^{-1} -скалярного произведения, т.е. при всех $\phi, \psi \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Z\phi, \psi \rangle_{DG^{-1}} = \langle \phi, Z\psi \rangle_{DG^{-1}}, \quad \langle Z\phi, \phi \rangle_{DG^{-1}} \leq 0,$$

где

$$\langle \phi, \psi \rangle_{DG^{-1}} = \langle DG^{-1}\phi, \psi \rangle.$$

Спектр матрицы Z содержится в $[-z_1, 0]$, и существует DG^{-1} -ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы Z .

Доказательство. DG^{-1} -самосопряженность матрицы Z следует из D -самосопряженности матриц G и H :

$$\begin{aligned} \langle Z\phi, \psi \rangle_{DG^{-1}} &= \langle DG^{-1}Z\phi, \psi \rangle = \langle DG^{-1}HG^{-1}\phi, \psi \rangle = \\ &= \langle DHG^{-1}\phi, G^{-1}\psi \rangle = \langle DG^{-1}\phi, HG^{-1}\psi \rangle = \\ &= \langle DG^{-1}\phi, Z\psi \rangle = \langle \phi, Z\psi \rangle_{DG^{-1}}. \end{aligned}$$

Как следствие существует DG^{-1} -ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы Z .

В силу предложения 1 спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda \mathbf{1} + A$ лежит в левой полуплоскости. С другой стороны, из предложения 5 видно, что спектр Z содержится в спектре пучка $\mathcal{L}(\lambda)$. Значит, спектр Z также содержится в левой полуплоскости.

Но в силу предложения 6 спектр Z содержится в круге радиуса z_1 . Наконец, в силу DG^{-1} -самосопряженности матрицы Z ее спектр лежит на действительной оси. Следовательно, спектр матрицы Z содержится в $[-z_1, 0]$. В частности, Z является DG^{-1} -неположительно определенной. \square

Рассмотрим квадратное уравнение

$$b - y + ay^2 = 0 \tag{11}$$

и его корни

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4ab}}{2a} = \frac{1}{z_2}, \\ y_2 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2a} = \frac{1}{z_1}. \end{aligned}$$

Предложение 8. Пусть выполнено условие (6). Тогда матричное уравнение

$$M + Y + AY^2 = 0 \tag{12}$$

имеет единственное решение Y , удовлетворяющее условию $\|Y\|_* \leq y_1$. Более того, Y может получено как предел последовательности

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = -M, \quad Y_{k+1} = -M - AY_k^2.$$

Доказательство. Доказательство практически дословно повторяет доказательство предложения 4. \square

Предложение 9. Пусть Y — произвольное решение уравнения (12). Тогда дифференциальное уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$-\left(\frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)\left(\frac{d}{dt}Y - \mathbf{1}\right)x = D^{-1}bu. \tag{13}$$

Доказательство. Поскольку $M + Y + AY^2 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}M + \mathbf{1} \frac{d}{dt} + A = \\ &= -\frac{d^2}{dt^2}(M + Y + AY^2) + \frac{d^2}{dt^2}M + \frac{d}{dt}\mathbf{1} + A = \\ &= -\frac{d^2}{dt^2}Y - \frac{d^2}{dt^2}AY^2 + \frac{d}{dt}\mathbf{1} + A = \\ &= -\frac{d^2}{dt^2}AY^2 + A - \frac{d^2}{dt^2}Y + \frac{d}{dt}\mathbf{1} = \\ &= -A\left(\frac{d}{dt}Y + \mathbf{1}\right)\left(\frac{d}{dt}Y - \mathbf{1}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}Y - \mathbf{1}\right) = \\ &= -\left(\frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)\left(\frac{d}{dt}Y - \mathbf{1}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 10. Пусть

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (M + \mu\mathbf{1} + \mu^2 A)^{-1} d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} (\lambda^2 M + \lambda\mathbf{1} + A)^{-1} d\lambda, \\ F &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} \mu(M + \mu\mathbf{1} + \mu^2 A)^{-1} d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{1}{\lambda} (\lambda^2 M + \lambda\mathbf{1} + A)^{-1} d\lambda, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\tau \in (y_1, y_2)$ — произвольное число, $\rho = 1/\tau$. Тогда матрицы G и F являются DG^{-1} -самосопряженными, причем G положительно определена. Более того, матрица $Y = FG^{-1}$ есть решение уравнения (12), и ее спектр лежит в $\{\mu : |\mu| \leq y_1 = 1/z_2\}$.

Доказательство. Очевидно, это частный случай предложения 6. Отметим лишь, что

интегралы связаны заменой переменных $\mu = 1/\lambda$. \square

Следствие 11. Матрица $Y = FG^{-1}$ является самосопряженной и положительно определенной относительно DG^{-1} -скалярного произведения, т.е. при всех $\phi, \psi \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Y\phi, \psi \rangle_{DG^{-1}} = \langle \phi, Y\psi \rangle_{DG^{-1}}, \quad \langle Y\phi, \phi \rangle_{DG^{-1}} \leq 0.$$

Спектр матрицы Y содержится в $[-y_1, 0]$, и существует DG^{-1} -ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы Y .

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству следствия 7.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{d}{dt} Yx - x = f. \quad (15)$$

Его роль аналогична роли уравнения (9).

Предложение 12. Пусть Z — решение уравнения (7) со спектром, лежащим в круге $\{\lambda : |\lambda| \leq z_1\}$, а Y — решение уравнения (12) со спектром, лежащим в $\{\mu : |\mu| \leq y_1\}$. (Напомним, что $1/y_1 = z_2$ и $1/z_1 = y_2$.) Тогда матрицы $MZ + 1$ и $AY + 1$ обратимы и

$$\begin{aligned} MZ &= Y^{*,D}A, \\ Z^{*,D} &= -A(A Y + 1)^{-1}, \\ Y^{*,D} &= -M(MZ + 1)^{-1}, \end{aligned}$$

где $Y^{*,D}$ означает матрицу, сопряженную к Y относительно D -скалярного произведения.

Доказательство. Рассмотрим пучки

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda 1 + A \quad \text{и} \quad \mathcal{M}(\mu) = M + \mu 1 + \mu^2 A,$$

ср. с формулами (10) и (14). Согласно предложениям 6 и 10 матрица

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} (\mathcal{L}(\lambda))^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (\mu^2 \mathcal{L}(1/\mu))^{-1} d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (\mathcal{M}(\mu))^{-1} d\mu \end{aligned}$$

обратима. С другой стороны, в силу предложений 5 и 9 функцию \mathcal{L} можно представить как

$$\mathcal{L}(\lambda) = (\lambda M + MZ + 1)(\lambda 1 - Z), \quad (16)$$

$$\mathcal{L}(\lambda) = -(\lambda(A Y + 1) + A)(\lambda Y - 1). \quad (17)$$

Поскольку $\mathcal{L}(\lambda)$ обратима при всех λ , $z_1 < |\lambda| < z_2$ (см. доказательство предложе-

ния 6), все множители (включая $\lambda M + MZ + 1$ и $\lambda(A Y + 1) + A$) в этих представлениях также обратимы при тех же λ . Поэтому имеем

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} (\lambda 1 - Z)^{-1} (\lambda M + MZ + 1)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (1 - \mu Z)^{-1} (M + \mu(MZ + 1))^{-1} d\mu. \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $MZ + 1$ через Q . Тогда последнюю формулу можно переписать в виде

$$G = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (1 - \mu Z)^{-1} (M + \mu Q)^{-1} d\mu.$$

Пусть μ_0 , $y_1 < |\mu_0| < y_2$, — произвольная точка. Напомним, что матрица $M + \mu_0 Q$ обратима. Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (1 - \mu Z)^{-1} (M + \mu Q)^{-1} d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (1 - \mu Z)^{-1} (M + \mu_0 Q)^{-1} (M + \mu_0 Q) \times \\ &\quad \times (M + \mu_0 Q + (\mu - \mu_0)Q)^{-1} d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (1 - \mu Z)^{-1} (M + \mu_0 Q)^{-1} \times \\ &\quad \times (1 + (\mu - \mu_0)Q(M + \mu_0 Q)^{-1})^{-1} d\mu. \end{aligned}$$

Покажем, что матрица $Q = MZ + 1$ обратима. Предположим противное. Тогда $Q\phi = 0$ для некоторого $\phi \neq 0$. Следовательно, $Q(M + \mu_0 Q)^{-1}\psi = 0$ для $\psi = (M + \mu_0 Q)\phi$. Поэтому $(1 + (\mu - \mu_0)Q(M + \mu_0 Q)^{-1})\psi = \psi$. Тогда $\psi = (1 + (\mu - \mu_0)Q(M + \mu_0 Q)^{-1})^{-1}\psi$. Из выписанного выше представления имеем

$$\begin{aligned} G\psi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (1 - \mu Z)^{-1} (M + \mu_0 Q)^{-1} \times \\ &\quad \times (1 + (\mu - \mu_0)Q(M + \mu_0 Q)^{-1})^{-1} \psi d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\tau} (1 - \mu Z)^{-1} (M + \mu_0 Q)^{-1} \psi d\mu. \end{aligned}$$

Напомним, что спектр Z лежит в $\{\lambda : |\lambda| \leq z_1\}$. Поэтому подынтегральная функция $\mu \mapsto (1 - \mu Z)^{-1}$ не имеет полюсов внутри круга, ограниченного контуром $|\mu| = \tau$. Следовательно, по теореме Коши, интеграл равен нулю, т.е. $G\psi = 0$. Но по предложению 6 матрица G обратима. Получилось противоречие. Следовательно, матрица $Q = MZ + 1$ обратима.

Обратимость $AY + 1$ доказывается аналогично.

Напомним, что матрицы A и M являются D -самосопряженными. Поэтому $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda \mathbf{1} + A$ также D -самосопряженная при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Из (16) имеем

$$\begin{aligned} & (\lambda M + MZ + \mathbf{1})(\lambda \mathbf{1} - Z) = \\ & = -(\lambda Y^{*,D} - \mathbf{1})(\lambda(Y^{*,D}A + \mathbf{1}) + A) \end{aligned}$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу единственности аналитического продолжения это равенство справедливо для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\lambda M(MZ + \mathbf{1})^{-1} + \mathbf{1})(MZ + \mathbf{1})(\lambda \mathbf{1} - Z) = \\ & = -(\lambda Y^{*,D} - \mathbf{1})(Y^{*,D}A + \mathbf{1})(\lambda \mathbf{1} + (Y^{*,D}A + \mathbf{1})^{-1}A). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & (\lambda Y^{*,D} - \mathbf{1})^{-1}(\lambda M(MZ + \mathbf{1})^{-1} + \mathbf{1})(MZ + \mathbf{1}) = \\ & = -(Y^{*,D}A + \mathbf{1})(\lambda \mathbf{1} + (Y^{*,D}A + \mathbf{1})^{-1}A)(\lambda \mathbf{1} - Z)^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку спектр Y лежит в $\{\mu : |\mu| \leq y_1\}$, левая часть не имеет полюсов в круге $\{\lambda : |\lambda| < z_2\}$. Следовательно, правая часть также не имеет полюсов в этом круге. Напомним, что матрица $Y^{*,D}A + \mathbf{1}$ обратима. Поэтому у функции $\lambda \mapsto (\lambda \mathbf{1} + (Y^{*,D}A + \mathbf{1})^{-1}A)(\lambda \mathbf{1} - Z)^{-1}$ нет полюсов в $\{\lambda : |\lambda| < z_2\}$. Очевидно, у нее также нет полюсов и в $\{\lambda : |\lambda| > z_1\}$. Поэтому она аналитична во всей комплексной плоскости. Заметим, что эта функция стремится к $\mathbf{1}$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Значит, она ограничена. Тогда по теореме Лиувилля это константа. Нетрудно видеть, что эта константа и есть $\mathbf{1}$. Поэтому $(\lambda \mathbf{1} + (Y^{*,D}A + \mathbf{1})^{-1}A)(\lambda \mathbf{1} - Z)^{-1} = \mathbf{1}$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, откуда следует

$$Z = -(Y^{*,D}A + \mathbf{1})^{-1}A$$

или

$$Z^{*,D} = -A(A Y + \mathbf{1})^{-1}.$$

Теперь наше равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (\lambda Y^{*,D} - \mathbf{1})^{-1}(\lambda M(MZ + \mathbf{1})^{-1} + \mathbf{1})(MZ + \mathbf{1}) = \\ & = -(Y^{*,D}A + \mathbf{1}). \end{aligned}$$

Подставляя $\lambda = 0$, получаем $MZ + \mathbf{1} = Y^{*,D}A + \mathbf{1}$ или

$$MZ = -Y^{*,D}A.$$

Перепишем теперь предыдущее равенство в виде

$$(\lambda Y^{*,D} - \mathbf{1})^{-1}(\lambda M(MZ + \mathbf{1})^{-1} + \mathbf{1}) = -\mathbf{1},$$

откуда

$$Y^{*,D} = -M(MZ + \mathbf{1}). \quad \square$$

Следствие 13. Решение Z уравнения (7) со спектром, лежащим в круге $\{\lambda : |\lambda| \leq z_1\}$, является единственным; и решение Y уравнения (12) со спектром, лежащим в круге $\{\mu : |\mu| \leq y_1\}$, также является единственным.

Доказательство. Действительно, представления $Z^{*,D} = -A(A Y + \mathbf{1})^{-1}$ и $Y^{*,D} = -M(MZ + \mathbf{1})^{-1}$ справедливы для любой пары корней Z и Y . Поэтому, если зафиксировать один из корней, то второй определяется единственным образом. \square

Предложение 14. Для любой матрицы T имеем $T^{*,D} = D^{-1}T^*D$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} T_{ij}^{*,D} &= \langle T^{*,D}e_i, e_j \rangle = \langle D^{-1}DT^{*,D}e_i, e_j \rangle = \\ &= \langle DT^{*,D}e_i, D^{-1}e_j \rangle = \langle T^{*,D}e_i, D^{-1}e_j \rangle_D = \\ &= \langle e_i, TD^{-1}e_j \rangle_D = \langle De_i, TD^{-1}e_j \rangle = \langle e_i, DTD^{-1}e_j \rangle = \\ &= \langle (DTD^{-1})^*e_i, e_j \rangle = \langle D^{-1}T^*De_i, e_j \rangle = (D^{-1}T^*D)_{ij}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 15. Матрицы

$$\Omega = (MZ + \mathbf{1}) - A(A Y + \mathbf{1})^{-1}M, \quad (17)$$

$$\mathfrak{U} = (A Y + \mathbf{1}) - M(MZ + \mathbf{1})^{-1}A \quad (18)$$

допускают представления

$$\Omega = MZ + Z^{*,D}M + \mathbf{1} = D^{-1}NZ + D^{-1}ZN + \mathbf{1},$$

$$\mathfrak{U} = AY + Y^{*,D}A + \mathbf{1} = D^{-1}BY + D^{-1}YB + \mathbf{1}.$$

Кроме того, если Ω и \mathfrak{U} обратимы, то

$$\Omega^{-1}D^{-1} = (NZ + ZM + D)^{-1}, \quad (19)$$

$$\mathfrak{U}^{-1}D^{-1} = (BY + YB + D)^{-1}, \quad (20)$$

Доказательство. Эквивалентность трех представлений для Ω и \mathfrak{U} следует из предложений 12 и 14, а также определений $M = D^{-1}N$ и $A = D^{-1}B$.

Формула (19) вытекает из преобразований

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}D^{-1} &= (D^{-1}NZ + D^{-1}ZN + \mathbf{1})^{-1}D^{-1} = \\ &= (D^{-1}(NZ + ZN + D))^{-1}D^{-1} = \\ &= (NZ + ZN + D)^{-1}DD^{-1} = (NZ + ZN + D)^{-1}. \end{aligned}$$

Формула (20) доказывается аналогично. \square

Предложение 16. Имеют место формулы

$$(MZ + \mathbf{1})^{-1}A = (NZ + D)^{-1}B,$$

$$(AY + \mathbf{1})^{-1}M = (BY + D)^{-1}N.$$

Доказательство. Доказательство очевидно. \square

Приведем, наконец, формулы, выражающие решение уравнения (2) через специальные решения уравнений (9) и (15).

Теорема 17. *Предположим, что обратная к матрице (17) существует. Тогда решение начальной задачи на оси для уравнения (2) можно представить в виде*

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 и x_2 — решения уравнений

$$x_1' - Zx_1 = \Omega^{-1}D^{-1}bu = (NZ + ZN + D)^{-1}bu$$

и

$$\begin{aligned} Yx_2' - x_2 &= (AY + \mathbf{1})^{-1}M\Omega^{-1}D^{-1}bu = \\ &= (BY + D)^{-1}N(NZ + ZN + D)^{-1}bu. \end{aligned}$$

Доказательство. Подставим $x = x_1 + x_2$ в левую часть уравнения (3), равносильного (2), и воспользуемся представлениями (8) и (13):

$$\begin{aligned} Mx'' + x' + Ax &= \\ &= (Mx_1'' + x_1' + Ax_1) + (Mx_2'' + x_2' + Ax_2) = \\ &= \left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1}\right)(x_1' - Zx_1) - \\ &\quad - \left(\frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)(Yx_2' - x_2) = \\ &= \left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1}\right)\Omega^{-1}D^{-1}bu - \\ &\quad - \left(\frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)(AY + \mathbf{1})^{-1}M\Omega^{-1}D^{-1}bu = \\ &= \left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1} - \frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1})(AY + \mathbf{1})^{-1}M - \right. \\ &\quad \left. - A(A Y + \mathbf{1})^{-1}M\right)(\Omega^{-1}D^{-1}bu) = \\ &= \left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1} - \frac{d}{dt}M - \right. \\ &\quad \left. - A(A Y + \mathbf{1})^{-1}M\right)(\Omega^{-1}D^{-1}bu) = \\ &= (MZ + \mathbf{1} - A(A Y + \mathbf{1})^{-1}M)(\Omega^{-1}D^{-1}bu) = \\ &= \Omega(\Omega^{-1}D^{-1}bu) = D^{-1}bu. \end{aligned}$$

Итак, мы видим, что x удовлетворяет уравнению (3). \square

Напомним, что уравнение (2) имеет вариант (1). Приведем для его решения явную вычислительную формулу.

Теорема 18. *Предположим, что обратная к матрице (18) существует. Тогда решение начальной задачи на оси для уравнения (1) можно представить в виде*

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 и x_2 — решения уравнений

$$\begin{aligned} x_1' - Zx_1 &= -(MZ + \mathbf{1})^{-1}A^{-1}\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu = \\ &= -(NZ + D)^{-1}B(BY + YB + D)^{-1}bu \end{aligned} \quad (21)$$

и

$$Yx_2' - x_2 = -\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu = -(BY + YB + D)^{-1}bu. \quad (22)$$

Доказательство. Подставим $x = x_1 + x_2$ в левую часть уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}Mx + \frac{d}{dt}x + Ax = D^{-1}bu', \quad (23)$$

равносильного (1), и воспользуемся представлениями (8) и (13):

$$\begin{aligned} Mx'' + x' + Ax &= \\ &= (Mx_1'' + x_1' + Ax_1) + (Mx_2'' + x_2' + Ax_2) = \\ &= \left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1}\right)(x_1' - Zx_1) - \\ &\quad - \left(\frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)(Yx_2' - x_2) = \\ &= -\left(\frac{d}{dt}M + MZ + \mathbf{1}\right)(MZ + \mathbf{1})^{-1}A\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu + \\ &\quad + \left(\frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu = \\ &= \left(-\frac{d}{dt}M(MZ + \mathbf{1})^{-1}A - (MZ + \mathbf{1})(MZ + \mathbf{1})^{-1}A + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)(\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu) = \\ &= \left(-\frac{d}{dt}M(MZ + \mathbf{1})^{-1}A - \right. \\ &\quad \left. - A + \frac{d}{dt}(AY + \mathbf{1}) + A\right)(\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu) = \\ &= -\frac{d}{dt}(M(MZ + \mathbf{1})^{-1}A + (AY + \mathbf{1}))(\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu) = \\ &= \frac{d}{dt}\mathfrak{U}\mathfrak{U}^{-1}D^{-1}bu = \frac{d}{dt}D^{-1}bu = D^{-1}bu'. \end{aligned}$$

Тем самым x удовлетворяет уравнению (23). \square

Итак, уравнения (2) и (1) свелись к уравнениям первого порядка

$$x' - Zx = b_1 u$$

и

$$Vx' - x = b_2 u$$

со специальными векторами b_1, b_2 и исходной функцией u . Методам их приближенного решения посвящены параграфы 2 и 3.

**2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ
УРАВНЕНИЯ $x' - Zx = bu$**

В этом параграфе обсуждается способ решения уравнения

$$x' - Zx = bu. \tag{24}$$

Будем предполагать, что функция u непрерывна и равна нулю левее некоторой точки t_0 . Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\vartheta_t(\lambda) = \int_{-\infty}^t e^{\lambda(t-s)} u(s) ds = \int_0^{+\infty} e^{\lambda s} u(t-s) ds. \tag{25}$$

Проблем со сходимостью этих интегралов не возникает, поскольку, например, в последнем интеграле функция $s \mapsto u(t-s)$ отлична от нуля только при $s \leq t - t_0$. Более того, видно, что при фиксированном t функция $\lambda \mapsto \vartheta_t(\lambda)$ является целой. Полезно заметить, что если в первом интеграле вынести $e^{\lambda t}$ за знак интеграла, то видно, что $\vartheta_t(\lambda)$ является преобразованием Лапласа функции $s \mapsto \eta(t-s)u(s)$, где η — функция Хевисайда, вычисленным в точке λ . В частности, если $u(t) = 0$ при $t > t_1$, то

$$\vartheta_t(\lambda) = e^{\lambda t} \hat{u}(\lambda) \text{ при } t > t_1,$$

где \hat{u} — преобразование Лапласа функции u .

Теорема 19. *Решение начальной задачи на оси для уравнения (24) можно представить в виде*

$$x(t) = \vartheta_t(Z)b. \tag{26}$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [21]), что решение x уравнения (24) можно представить в виде

$$x(t) = \int_0^{+\infty} e^{Zs} b u(t-s) ds = \left(\int_0^{+\infty} e^{Zs} u(t-s) ds \right) b.$$

Так что для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\vartheta_t(Z) = \int_0^{+\infty} e^{Zs} u(t-s) ds.$$

Согласно определению аналитической функции от матрицы имеем (проблем с заменой

порядка интегрирования не возникает, поскольку, как уже отмечалось, несобственный интеграл фактически берется по конечному отрезку $[0, t - t_0]$)

$$\begin{aligned} \vartheta_t(Z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \vartheta_t(\lambda) (\mathbf{1}\lambda - Z)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\int_0^{+\infty} e^{\lambda s} u(t-s) ds \right) (\mathbf{1}\lambda - Z)^{-1} d\lambda = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda s} (\mathbf{1}\lambda - Z)^{-1} d\lambda \right) u(t-s) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{Zs} u(t-s) ds. \end{aligned}$$

Типичный входной импульс u , используемый в электронике, имеет график, изображенный на рис. 1. Аналитическое представление этого импульса имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t/r & \text{при } 0 \leq t < r, \\ 1 & \text{при } r \leq t < w+r, \\ -(t - (w+2r))/r & \text{при } w+r \leq t < w+2r, \\ 0 & \text{при } w+2r \leq t. \end{cases} \tag{27}$$

Характерные параметры имеют значения: r порядка 0.1 наносекунды, а w — порядка 1 наносекунды. Для решения конкретных вычислительных задач с таким входным импульсом полезно следующее предложение.

Предложение 20. *Пусть u задается формулой (27). Тогда функция (27) допускает представление*

$$\vartheta_t(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 r} \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ e^{\lambda t} - \lambda t - 1 & \text{при } 0 \leq t < r, \\ e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-r)} - \lambda r & \text{при } r \leq t < w+r, \\ (1 - e^{-\lambda(w+r)} - e^{-\lambda r}) e^{\lambda t} + \\ + \lambda(t - w - 2r) + 1 & \text{при } w+r \neq t < w+2r, \\ e^{\lambda t} (1 - e^{-\lambda r}) (1 - e^{-\lambda(w+r)}) & \text{при } w+2r \leq t. \end{cases}$$

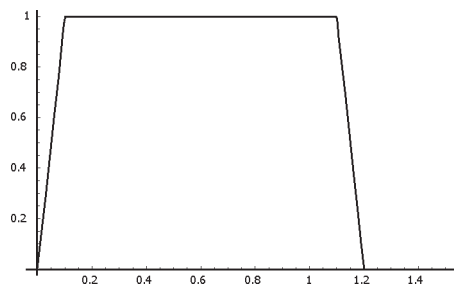


Рис. 1. График типичного входного импульса u

В частности, при $r = 0$

$$\vartheta_i(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ e^{\lambda t} - 1 & \text{при } 0 \leq t < w, \\ e^{\lambda t}(1 - e^{-\lambda w}) & \text{при } w \leq t. \end{cases}$$

А при $\lambda = 0$

$$\vartheta_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ \frac{t^2}{2r} & \text{при } 0 \leq t < r, \\ t - r/2 & \text{при } r \leq t < w + r, \\ -\frac{(2r^2 + (t-w)^2 + r(2w-4t))}{2r} & \text{при } w + r \leq t < w + 2r, \\ w + r & \text{при } w + 2r \leq t. \end{cases}$$

В частности, при $r = 0$

$$\vartheta_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ t & \text{при } 0 \leq t < w, \\ w & \text{при } w \leq t. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство сводится к прямым вычислениям. \square

Для матриц Z небольшого порядка точное решение уравнения (24) можно построить с помощью следующего предложения.

Предложение 21. Решение начальной задачи на оси для уравнения (24) можно представить в виде

$$x(t) = T \text{DiagonalMatrix}[\vartheta_i(\lambda_k)] T^{-1} b,$$

где λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, — собственные значения матрицы Z ; $\text{DiagonalMatrix}[\vartheta_i(\lambda_k)]$ — диагональная матрица со значениями $\vartheta_i(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, на диагонали; а T — матрица, столбцами которой являются соответствующие собственные векторы матрицы Z .

Доказательство. В силу следствия 7 матрица Z имеет простой спектр. Поэтому чтобы сослаться на теорему 19, достаточно заметить, что

$$\vartheta_i(Z) = T \text{DiagonalMatrix}[\vartheta_i(\lambda_k)] T^{-1}. \quad \square$$

В случае, когда порядок n матрицы Z является большим, нахождение собственных значений и собственных векторов является трудоемкой вычислительной задачей. Для этого случая мы предлагаем следующий приближенный метод.

Напомним, что согласно теореме 19 решение уравнения (24) можно строить по формуле (26), основной частью которой является

аналитическая функция ϑ_i от матрицы Z . Чтобы получить приближенное решение уравнения (24), возьмем функцию r_i , приближающую функцию ϑ_i , а затем в качестве приближенного решения возьмем функцию

$$\tilde{x}(t) = r_i(Z)b. \quad (28)$$

Функцию r_i следует выбирать из тех соображений, чтобы $r_i(Z)$ вычислялось сравнительно просто.

Общие рекомендации спектральной теории [11, 19, 20] говорят, что для того, чтобы величина $|\tilde{x}(t) - x(t)|$ была маленькой, надо выбирать r_i так, чтобы она хорошо приближала ϑ_i на спектре матрицы Z . Напомним, что в силу следствия 7 спектр матрицы Z содержится в $[-z_1, 0]$.

В качестве r_i мы предлагаем брать рациональные функции, приближающие ϑ_i на $[-z_1, 0]$. Если требуется решать много различных задач с одной и той же функцией u , можно создать банк приближений r_i для ϑ_i на $(-\infty, 0]$; такие приближения можно использовать для любой матрицы Z .

Задача построения рациональных аппроксимаций является классической, см., например, [22, 23]. Для практического построения r_i можно, например, использовать команду `GeneralMiniMaxApproximation` из пакета символьных вычислений `Mathematica` [24], вычисляющую наилучшее рациональное приближение. Оказывается, уже рациональные приближения r_i сравнительно низкого порядка дают достаточно высокую точность; например, наилучшее рациональное приближение степени 3/9 приближает функцию $\lambda \mapsto e^\lambda$ на $(-\infty, 0]$ с точностью $2.6 \cdot 10^{-8}$. Более подробное обсуждение способов построения рациональных приближений r_i и точности получаемых приближенных решений см. в [25].

При вычислении рациональной функции $r_i(\lambda) = p_i(\lambda)/q_i(\lambda)$ от матрицы Z , где p_i и q_i — многочлены, возникает проблема обращения многочлена $q_i(Z)$ от матрицы Z . Матрица $q_i(Z)$ является, как правило, плохо обусловленной. Чтобы обойти эту трудность, прежде чем подставлять матрицу Z в рациональную функцию r_i , функцию r_i целесообразно представить в виде суммы элементарных дробей. Если корни знаменателя являются простыми, а степень числителя меньше степени знаменателя, такое представление имеет вид

$$r_i(\lambda) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\lambda - w_k}.$$

В этом случае

$$r_i(Z) = \sum_{k=1}^m c_k (Z - w_k \mathbf{1})^{-1}.$$

Отметим, что вычислять обратные матрицы $(Z - w_k \mathbf{1})^{-1}$ целиком не обязательно, поскольку для построения приближенного решения требуется найти лишь $r_i(Z)b$. Для этого достаточно решить уравнения $(Z - w_k \mathbf{1})v_k = b$.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $Yx' - x = bu$

В этом параграфе обсуждается способ решения уравнения

$$Yx' - x = bu. \tag{29}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\xi_t(\mu) = \begin{cases} \frac{\vartheta_t(1/\mu)}{\mu} & \text{при } \mu \in (-\infty, 0), \\ \lim_{\mu \rightarrow -0, \mu \in \mathbb{R}} \frac{\vartheta_t(1/\mu)}{\mu} & \text{при } \mu = 0. \end{cases}$$

Предложение 22. Пусть функция u непрерывна и ограничена. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{\mu \rightarrow -0, \mu \in \mathbb{R}} \frac{\vartheta_t(1/\mu)}{\mu} = -u(t).$$

Таким образом,

$$\xi_t(\mu) = \begin{cases} \frac{\vartheta_t(1/\mu)}{\mu} & \text{при } \mu \in (-\infty, 0), \\ -u(t) & \text{при } \mu = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Доказательство. Выполняя замену $\lambda = 1/\mu$, видим, что

$$\lim_{\mu \rightarrow -0, \mu \in \mathbb{R}} \frac{\vartheta_t(1/\mu)}{\mu} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty, \lambda \in \mathbb{R}} \lambda \theta_t(\lambda).$$

Заметим, что ядро $\phi_\lambda(s) = \lambda e^{\lambda s}$ интеграла

$$\lambda \vartheta_t(\lambda) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{\lambda s} u(t-s) ds$$

обладает следующими свойствами: $\phi_\lambda(s) < 0$ при $s \in [0, +\infty)$ и $\lambda < 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $\int_0^{+\infty} \lambda e^{\lambda s} ds = -1$ при $\lambda < 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$; для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ найдется такое $B \in (-\infty, 0]$, что $|\int_\delta^{+\infty} \lambda e^{\lambda s} ds| < \varepsilon$ при всех $\lambda < B$. Отсюда и из не-

прерывности и ограниченности функции u следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty, \lambda \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{\lambda s} u(t-s) ds = -u(t). \quad \square$$

Теорема 23. Решение начальной задачи на оси для уравнения (29) можно представить в виде

$$x(t) = \xi_t(Y)b. \tag{31}$$

Доказательство. В силу следствия 11 спектр матрицы Y содержится в $(-\infty, 0]$ и существует базис из собственных векторов матрицы Y . В базисе из собственных векторов матрицы Y уравнение (29) распадается на независимые скалярные уравнения

$$\begin{aligned} \mu_1 x'_1 - x_1 &= b_1 u(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \mu_n x'_n - x_n &= b_n u(t), \end{aligned}$$

где μ_k — собственные значения матрицы Y . Если $\mu_k < 0$, то имеем решение (ср. с теоремой 19)

$$x_k(t) = \frac{\vartheta_t(1/\mu_k)}{\mu_k} b_k = \xi_t(\mu_k) b_k.$$

Если же $\mu_k = 0$, то

$$x_k(t) = -b_k u(t) = \xi_t(0) b_k.$$

Таким образом, приходим к общей формуле

$$x(t) = \xi_t(Y)b.$$

Очевидно, эта формула не зависит от выбора базиса. \square

Поскольку функция $\xi_t(\mu)$ непрерывна, ее можно с любой степенью точности приблизить на $[-y_1, 0]$ рациональной функцией r_t . Заменяя в формуле (31) ξ_t на r_t , получаем формулу для приближенного решения:

$$\tilde{x}(t) = r_t(Y)b.$$

Далее действуем, как в предыдущем пункте.

4. АЛГОРИТМ МЕТОДА

Опишем целиком, например, алгоритм приближенного решения уравнения (1), основанный на теореме 18.

Будем предполагать, что заданы коэффициенты N, D и B , вектор b , а также функция u .

Вычисляем матрицы $M = D^{-1}N$ и $A = D^{-1}B$. Берем некоторую норму $\|\cdot\|_*$ в алгебре матриц, например, эффективно вычисляемую норму

$$\|T\|_* = \max_i \sum_j |t_{ij}|.$$

Вычисляем $\|M\|_*$ и $\|A\|_*$. Проверяем выполнение условия

$$\|M\|_* \|A\|_* < 1/4,$$

позволяющего пользоваться результатами § 1. Заодно находим корни z_1 и z_2 уравнения (5) и обратные им величины $y_1 = 1/z_2$ и $y_2 = 1/z_1$.

Вычисляем матрицы Z и Y с помощью итерационных процессов, описанных в предложениях 4 и 8.

Вычисляем векторы (см. теорему 18)

$$b_1 = -(NZ + D)^{-1}B(BY + YB + D)^{-1}b,$$

$$b_2 = -(BY + YB + D)^{-1}b.$$

Отметим, что обратные матрицы $(BY + YB + D)^{-1}$ и $(NZ + D)^{-1}$ считать целиком не обязательно. Например, чтобы вычислить вектор $(BY + YB + D)^{-1}b$, достаточно решить систему уравнений $(BY + YB + D)w = b$.

Вычисляем функцию ϑ_i в соответствии с формулой (25) (см. также предложение 20). Строим рациональное приближение r_i для ϑ_i на $[-z_1, 0]$ подходящей точности. Находим приближенное решение уравнения (21) по формуле

$$x_1(t) = r_i(Z)b_1.$$

Вычисляем функцию ξ_i в соответствии с формулой (30). Строим рациональное приближение r_i для ξ_i на $[-y_1, 0]$ подходящей точности. Находим приближенное решение уравнения (22) по формуле

$$x_2(t) = r_i(Y)b_2.$$

Выписываем решение уравнения (1) по формуле

$$x = x_1 + x_2.$$

Уравнение (2) решается аналогично.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим дискретную модель длинной линии, изображенную на рис. 2. Здесь n кон-

денсаторов и проводимостей, $n + 1$ катушек индуктивности и сопротивлений. Будем предполагать, что все L_k и R_k кроме крайних равны соответственно величинам L/n и R/n , а $L_0 = L_n$ и $R_0 = R_n$ равны соответственно величинам $L/2n$ и $R/2n$; а $C_k = C/n$, $G_k = G/n$, где L , C , R и G — заданные параметры. Будем предполагать, что к левым зажимам подсоединен источник напряжения $E_{left} = u(t)$, а правые зажимы закорочены: $E_{right} = 0$. Будем интересоваться токами I_0 и I_n через левые и правые зажимы.

Уравнения Кирхгофа для этой цепи, выписанные по методу контурных токов, имеют вид

$$\frac{L}{n} \mathbf{N}_s \frac{d}{dt} I(t) + \left(\frac{R}{n} \mathbf{N}_s + \frac{n}{G} \mathbf{D}_s \right) I(t) + \frac{n}{C} \mathbf{B}_s \int I(t) dt = bu'(t), \quad (32)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} I_0 \\ J_0 \\ I_1 \\ J_1 \\ \vdots \\ J_{n-1} \\ I_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_s = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 \end{pmatrix},$$

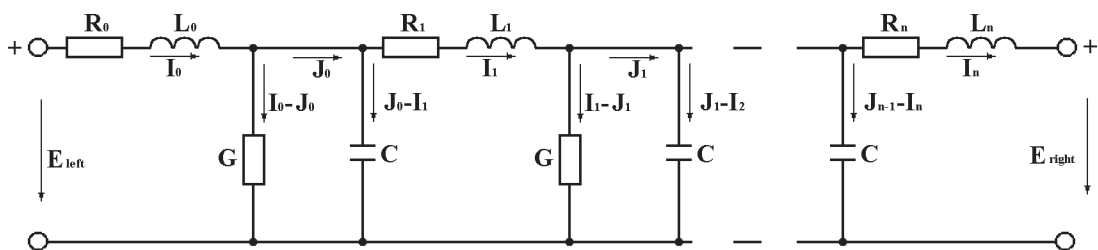


Рис. 2. Дискретная модель длинной линии

$$D_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $N = \frac{L}{n} N_s$, $D = \frac{R}{n} N_s + \frac{n}{G} D_s$ и $B = \frac{n}{C} B_s$, уравнение (32) можно записать в виде (1). Подчеркнем, что матрица $D = \frac{R}{n} N_s + \frac{n}{G} D_s$ в этом уравнении является обратимой.

В качестве параметров схемы были взяты следующие значения: $R = 3.125$, $L = 0.01$, $G = 0.005$, $C = 80$; число секций $n = 50$ (соответственно размер матриц в уравнении равен $2n + 1 = 101$). На левый вход подавался входной импульс напряжения $E_{left} = u$ вида (27) с параметрами $r = 0.1$, $w = 1$.

В этом случае $a = \|A\|_* = 40.0$, $b = \|M\|_* = 0.0032$, $\|M\|_* \|A\|_* = 0.128 < 1/4$. Тем самым условие (6) выполнено и поэтому можно строить приближенное решение уравнения (32) указанным в § 4 способом.

Находим корни уравнений (5) и (11) (ср. с рис. 3):

$$\begin{aligned} z_1 &= 47.0986, & z_2 &= 265.401, \\ y_1 &= 0.003768, & y_2 &= 0.021232. \end{aligned}$$

Вычисляем матрицы Z и Y в соответствии с предложениями 4 и 8. Для вычисления матрицы Z потребовалось 17 итераций, чтобы добиться величины $6.23 \cdot 10^{-9}$ невязки $\|MZ^2 + Z + A\|_*$;

матрица Y получена за 9 итераций с нормой невязки $\|M + Y + AY^2\|_*$ равной $7.31 \cdot 10^{-9}$.

В качестве приближения для функции ϑ_t использовалась рациональная функция наилучшего приближения со степенями числителя и знаменателя 3 и 4 соответственно, вычисленная на отрезке $[-z_1, 0]$ для каждого значения t с шагом 0.05 при $0 \leq t \leq 1.2$ и с шагом 0.4 при $1.2 < t \leq 80$. Максимальная погрешность $\max_{t \in [0, 80]} \max_{\lambda \in [-z_1, 0]} |\vartheta_t(\lambda) - r_t(\lambda)|$ составила 0.0001. Перед подстановкой матрицы Z в рациональную функцию $r_t(\lambda)$ она раскладывалась в сумму элементарных дробей.

Функция ξ_t на отрезке $[-y_2, 0]$ при $t \geq 1.2$ и при $0.1 \leq t \leq 1.1$ практически является константой. Поэтому в качестве ее приближения бралась соответствующая константа. При $t \in [0, 0.1]$ и при $t \in [1.1, 1.2]$ в качестве приближения использовался многочлен наилучшего приближения степени 10. Максимальная погрешность $\max_{t \in [0, 0.1] \cup [1.1, 1.2]} \max_{\lambda \in [-y_1, 0]} |\xi_t(\lambda) - r_t(\lambda)|$ составила 0.000027.

Графики токов I_0 и I_n через зажимы линии, получившиеся в результате вычислений, показаны на рисунках 4 и 7. Они практически не отличаются от получаемых более трудоемкими методами исследования той же электрической схемы. На рисунках 5, 6, 8 и 9 приведены также результаты вычисления соответствующих координат решений x_1 уравнения (21) и решений x_2 уравнения (22) в соответствии с теоремой 18.

Из графика 9 видно, что при вычислении тока I_n (но не тока I_0) слагаемым, вносимым x_2 , можно пренебречь. Иными словами, уравнение второго порядка (1) можно заменить уравнением первого порядка (21). Подчеркнем, что переход от уравнения (1) к урав-

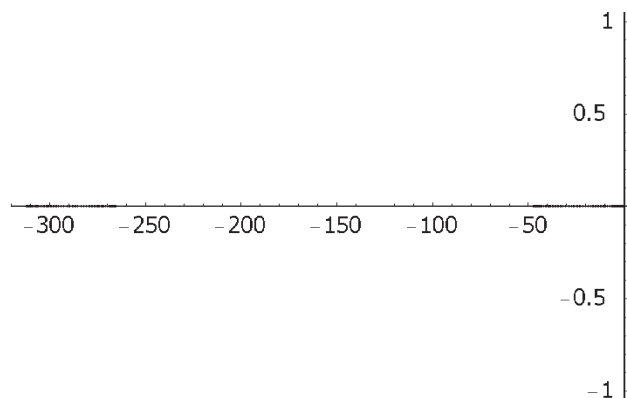


Рис 3. Спектр пучка $\lambda^2 N + \lambda D + B$, соответствующего уравнению (32)

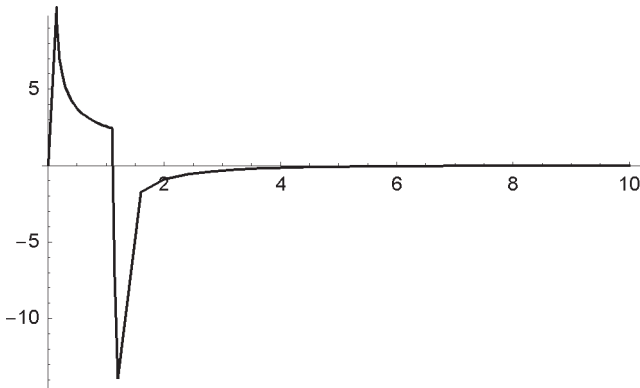


Рис. 4. Ток I_0 через левые зажимы линии

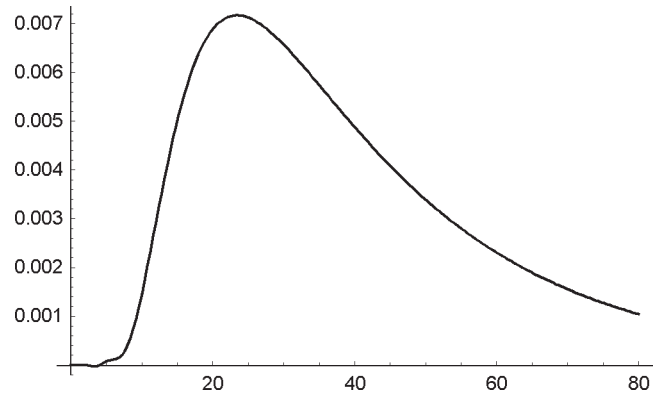


Рис. 7. Ток I_n через правые зажимы линии

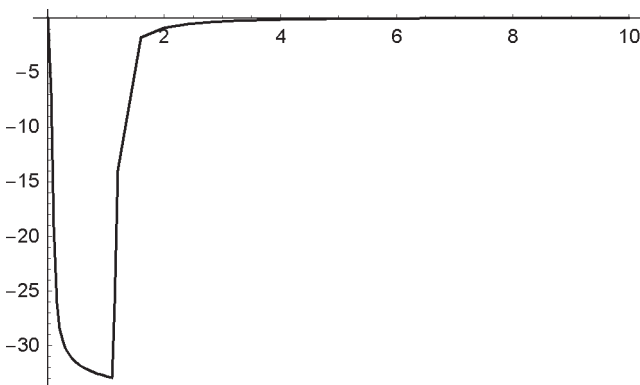


Рис. 5. Координата решения x_1 уравнения (21), соответствующая току I_0

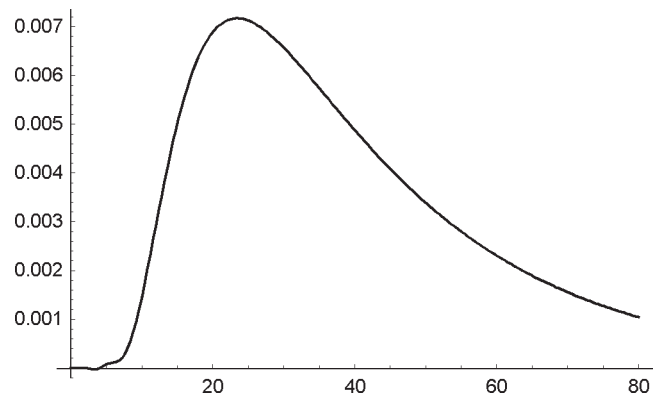


Рис. 8. Координата решения x_1 уравнения (21), соответствующая току I_n

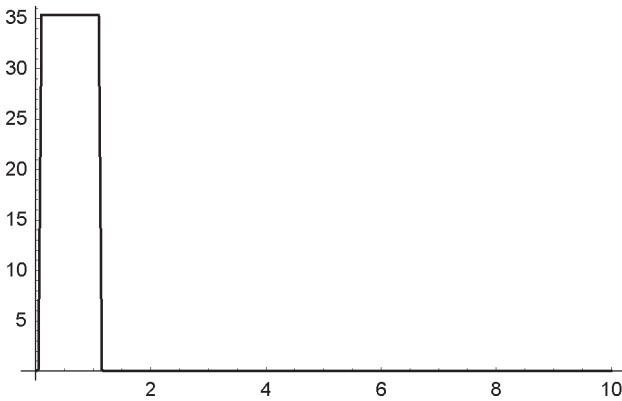


Рис. 6. Координата решения x_2 уравнения (22), соответствующая току I_0

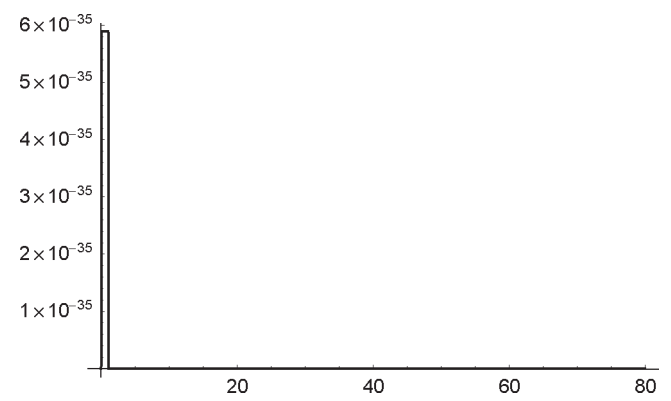


Рис. 9. Координата решения x_2 уравнения (22), соответствующая току I_n

нению (21) не сводится к отбрасыванию слагаемого $N \frac{d^2}{dt^2} x$, содержащего вторую производную: если бы это было так, то коэффициент Z совпадал бы с матрицей $-A = D^{-1}B$; в действительности $\|Z - (-A)\| = 5.12$, в то время как $\|Z\| = 47.1$. Тем самым переход от уравнения (1) к уравнению (21) можно в данном случае интерпретировать как способ учета

малых индуктивностей вместо простого их отбрасывания.

Попытаемся в заключение описать, что произойдет, если пользоваться дифференциальными уравнениями первого порядка, описывающими работу той же электрической схемы. На рис. 3 показан спектр пучка $\lambda^2 N + \lambda D + B$, соответствующего уравнению (32). При исполь-

зовании другого дифференциального уравнения спектр не может измениться, поскольку каждая точка λ_k спектра порождает в решении линейно независимое слагаемое вида $e^{\lambda_k t}$. Из рисунка 3 видно, что спектр состоит из двух частей, разделенных значительной дыркой (это и является основной особенностью рассматриваемого класса уравнений, вытекающей из условия (6)). Выделяя два уравнения с коэффициентами Z и Y , мы косвенно разделяем этот спектр на две части: правая связана с матрицей Z , а левая — с матрицей Y . Поэтому при построении рациональных приближений r_i для ϑ_i и для ξ_i мы строим эти приближения раздельно на каждой из частей спектра. При использовании уравнения первого порядка спектр придется рассматривать как единое целое. Если, например, мы вновь будем решать уравнение путем построения рационального приближения r_i для функций типа ϑ_i и ξ_i , то это приближение придется строить на более широком множестве, что приведет к уменьшению его точности при том же порядке рациональной функции r_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. М.—Л.: Госэнергоиздат. 1961.
2. Сешу С., Рид М.Б. Линейные графы и электрические цепи. М.: Высшая школа, 1971.
3. Глориозов Е.Л., Ссорин В.Г., Сыпчук П.П. Введение в автоматизацию схемотехнического проектирования. М.: Советское радио, 1976.
4. Ильин В.П. Машинное проектирование электронных схем. М.: Энергия, 1972.
5. Vlach J., Singhal K. Computer methods for circuit analysis and design. New York: Van Nostrand Reinhold, 1983, 1994.
6. Дезоер Ч.А., Ку Э.С. Основы теории цепей. М.: Связь, 1976.
7. Попов В.П. Основы теории цепей. М.: Высшая школа, 1998.
8. Weierstrass K. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen // Akad. der Wiss. Berlin 18. May 1868. Werke Vol. II, P. 19—44.
9. Kroneker L. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen // Akad. der Wiss. Berlin 27. Nov. 1890, Werke Vol. III, P. 141—155.
10. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
12. Баскаков А.Г., Чернышев К.И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Математический сборник, 2002. Т. 193, N 11. С. 4—42.
13. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи математических наук. 1994. Т. 49, Вып. 4. С. 47—74.
14. Stewart G.W. On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$ // SIAM J. Numer. Anal., 1972, Vol. 9, P. 669—686.
15. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
16. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.
17. Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца. 1986.
18. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
19. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.
21. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
22. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
23. Baker G.A. Essentials of Padé Approximations. New York: Academic Press, 1996.
24. Воробьев Е.М. Введение в систему «Математика». М.: Финансы и статистика, 1998.
25. Kurbatov V.G., Oreshina M.N. Interconnect macromodelling and approximation of matrix exponent // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. 2004, в печати.