ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 2

УДК 519.2

# О ПРОЕКТИРОВАНИИ СОВРЕМЕННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

**© 2003 В. И. Костылев**

*Воронежский государственный университет*

Предложен общий подход к проектированию информационных систем, предназначенных для обработки сигналов. Показано, как задача преобразования класса сигналов в другой класс сигналов может быть решена с помощью каскадно соединенных вейвлет-системы и нелинейной статической системы.

## ВВЕДЕНИЕ

В [1] введено общее определение информационной системы как объекта, который функционирует на основе использования информации о событиях, ситуациях, процессах, происходящих вне и (или) внутри рассматриваемой системы.

Сигналы на входе и выходе информационной системы являются функциями времени, т.е. отображениями множества моментов времени $T$ на множество $X$ входных и множество $Y$ выходных сигналов. Математическая модель информационной системы определяется оператором $\mathbf{S}$, отображающим множество входных сигналов на множество выходных сигналов:

$$\mathbf{S} : X \to Y \qquad (1)$$

или

$$\{y(t)\} = S\{x(t)\},\ x(t) \in X,\ y(t) \in Y. \qquad (2)$$

Соотношение (2) можно [1] представить в виде семейства функционалов $F_t$:

$$y(t) \ = \ F_t(x_{-\infty}^t), \qquad (3)$$

где через $x_{-\infty}^t$ обозначен отрезок входного сигнала $x(t) \in X$ на интервале времени $(-\infty, t)$. Индекс в обозначении $F_t$ указывает на возможную зависимость вида функционала или его параметров от времени.

Описанный подход (оператор $\mathbf{S}$ или семейства функционалов $F_t$) характеризует так называемую модель «вход–выход» [2] информационной системы. В [3] теорию информационных систем, использующую модель (2) или (3) называют макротеорией систем.

Простейшей формой оператора $\mathbf{S}$ в (2) является однозначное отображение

$$y(t) = f_t[x(t)],\ t \in T,\ x(t) \in X,\ y(t) \in Y, \qquad (4)$$

которое характеризуется тем, что значение выходного сигнала $y(t)$ в момент времени $t$ определяется значением $x(t)$ входного сигнала в тот же самый момент времени $t$, и не зависит от значений входного сигнала в другие моменты времени. Если информационная система характеризуется соотношением (4), то она называется [1] **статической системой**[1]. В более общем случае информационная система характеризуется не функцией $f_t$, а функционалами $F_t$, как в (3), и тогда значение выходного сигнала $y(t)$ определяется не только значением входного сигнала в момент наблюдения $t$ выходного сигнала, но и значениями входного сигнала в моменты времени, предшествовавшие моменту времени наблюдения выходного сигнала. Такая информационная система называется [1] **физически реализуемой динамической системой**[2]. Заметим, что иногда в качестве идеализированных моделей рассматривают *физически нереализуемые* динамические системы, не удовлетворяющие принципу причинности. Простым примером такой системы служит идеальный фильтр нижних частот с равномерной амплитудночастотной и линейной фазо-частотной характеристиками. Сигнал на выходе такого фильтра, когда на его вход действует сигнал в виде единичного скачка [4]

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \qquad (5)$$

---

[1] Синонимами термина «статическая система» являются термины «неинерциальная система» и «система без памяти».

[2] Синонимами термина «динамическая система» являются термины «инерциальная система» и «система с памятью».

имеет вид [1]

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_ф(t - t_0)], \qquad (6)$$

где $\mathrm{Si}(\alpha)$ — интегральный синус, $\omega_ф$ и $t_0$ — параметры идеального фильтра, определяющие его полосу пропускания и угол наклона линейной фазо-частотной характеристики. Так как $\mathrm{Si}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha < 0$, то из (6) следует, что реакция идеального фильтра наступает раньше момента включения входного сигнала; следствие опережает причину.

Детерминированная информационная система называется **стационарной**[3], если отображение (1) не зависит от выбора начала отсчета времени. Характеристики таких систем постоянны во времени и, следовательно, нижние индексы в (3) и (4) должны быть опущены. Выходной сигнал $y(t)$ в этом случае зависит от времени $t$ только через входной сигнал $x(t)$.

Соотношение вход–выход для стационарных нелинейных статических систем имеет вид [1]

$$y(t) = f[x(t)],\ t \in T,\ x(t) \in X,\ y(t) \in Y. \qquad (7)$$

Для анализа зависимости выходного сигнала от входного часто бывает полезным [1] представить произвольную нелинейную функцию $f$ посредством элементарных функций, например степенных. Так, в соответствии с теоремой Вейерштрасса [5] любая функция $f(x)$, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале, может быть с любой точностью аппроксимирована полиномом, степень которого определяется точностью аппроксимации. Используя этот факт, соотношение (7) можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i(t). \qquad (8)$$

Структурная схема нелинейной статической системы, характеризуемой соотношением (8), представлена в [1].

Соотношение вход-выход для стационарных нелинейных динамических систем имеет вид [1]

$$y(t) = F(x_{-\infty}^{t}),\ t \in T,\ x(t) \in X,\ y(t) \in Y. \qquad (9)$$

Согласно теореме Фреше любой непрерывный функционал можно с любой заданной точностью аппроксимировать рядом Вольтерра [1, 6]

$$\begin{aligned} y(t) = &\int_0^\infty g_1(u_1)x(t-u_1)du_1 + \\ &+\int_0^\infty\int_0^\infty g_2(u_1,u_2)x(t-u_1)x(t-u_2)du_1du_2 + \ldots + \qquad (10) \\ &+\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty g_n(u_1,\ldots,u_n)x(t-u_1)\ldots x(t-u_n)du_1\ldots du_n + \ldots \end{aligned}$$

На практике ряд Вольтерра ограничивают конечным числом слагаемых, определяемым необходимой точностью аппроксимации функционала $F\left(x_{-\infty}^{t}\right)$.

Для *линейных* динамических систем указанный функционал — линейный. В правой части (10) в этом случае остается лишь первое слагаемое:

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau,\ 0 < t < \infty. \qquad (11)$$

В этом случае функцию $h(t)$ принято называть импульсной характеристикой информационной системы, а интеграл в правой части равенства (11) — интегралом Дюамеля. Импульсная характеристика полностью характеризует линейную динамическую систему. Из (11) очевидно, что импульсная характеристика системы является реакцией на входной сигнал в виде дельта-функции Дирака, т.е. $x(t) = \delta(t)$.

Из (11) также следует, что линейную динамическую систему однозначно можно охарактеризовать любой парой взаимосвязанных входного и выходного сигналов. Например, если входной сигнал $x(t)$ имеет вид (5), то выходной сигнал $y(t)$ называется переходной характеристикой системы [5]. Таким образом, идеальный фильтр нижних частот имеет переходную характеристику вида (6).

## ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Задача проектирования информационной системы ставится следующим образом. Заданы определенные во введении множество $X$ входных и множество Y выходных сигналов. Ограничимся рассмотрением случая стационарных сигналов. Тогда нам требуется синтезировать информационную систему, реализующую функционал $F\left(x_{-\infty}^{t}\right)$ так, что $X \to Y$.

Из (11) очевидно, что в общем случае такую задачу невозможно решить в классе линейных динамических систем. В самом деле,

[3] Синонимами термина «стационарная система» являются термины «система, инвариантная во времени» и «система с постоянными во времени параметрами».

пусть множество $X$ состоит только из одного сигнала и множество $Y$ состоит только из одного сигнала. И пусть интегральное уравнение (11) после подстановки в него этих сигналов имеет[4] решение относительно $h(t)$. Тогда и только тогда задачу проектирования можно решить в классе линейных динамических систем. Однако, линейные динамические системы в общем случае не могут преобразовывать одно множество сигналов в другое, даже если эти множества состоят хотя бы из двух сигналов каждое.

Из (8) следует, что нелинейные статические системы имеют крайне ограниченное применение для решения задачи преобразования множества сигналов $X$ в другое множество сигналов $Y$: каждый входной сигнал $x(t) \in X$ должен быть строго монотонным и не принимать нулевого значения, а области значений любых двух входных сигналов не должны перекрываться.

Таким образом, нелинейные статические системы могут использоваться для решения задачи проектирования информационной системы, однако множество входных сигналов $X$ должно удовлетворять в этом случае весьма жестким требованиям.

Очевидно, что задачу проектирования информационной системы можно строить в два этапа. На первом этапе множество $X$ входных сигналов преобразуется во вспомогательное множество $X^{\circ}$ сигналов, не представляющее самостоятельного интереса, но более удобное для обработки нелинейной статической системой. Т.е., выражение (1) можно намеренно усложнить

[4] Интегральное уравнение (11) не имеет решения, если спектр входного сигнала имеет нулевое значение на той частоте, на которой значение спектра выходного сигнала отлично от нуля.

$$\mathbf{S} : X \to X^{\circ} \to Y. \qquad (12)$$

Понятно, что и множество $Y^{\circ}$ выходных сигналов нелинейной статической системы может быть отличным от требуемого множества $Y$. Тогда

$$\mathbf{S} : X \to X^{\circ} \to Y^{\circ} \to Y. \qquad (13)$$

## ТИПОВОЕ ЗВЕНО РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Такая трехступенчатая процедура преобразования одного множества сигналов в другое, при условии, что преобразования $X \to X^{\circ}$ и $Y^{\circ} \to Y$ выполняются линейной динамической системой, а преобразование $X^{\circ} \to Y^{\circ}$ — нелинейной статической системой, широко используется в радиотехнике. Устройство, реализующее соответствующую процедуру обработки сигналов носит название [7] «типовое звено радиотехнических устройств». Его структурная схема показана на рис. 1.

В частности, типовым радиотехническим звеном является широко известный [8] энергетический приемник, состоящий из последовательно соединенных полосового фильтра, квадратичного детектора и интегратора (рис. 2).

Двухступенчатая процедура (12) применяется в радиотехнике гораздо реже.

## ПОВЫШЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

До сих пор мы неявно предполагали все сигналы скалярными. Полагая по-прежнему, что сигналы, составляющие множества $X$ и $Y$, — скалярны, снимем такое ограничение с сигналов, составляющих множество $X^{\circ}$.

Например, пусть $X$ — параметрическое множество косинусоидальных сигналов:

$$X = \{x(t, A) = A\cos t\},$$
$$t \in [-\pi, \pi), \;\; A \in [A_{\min}, A_{\max}]. \qquad (14)$$

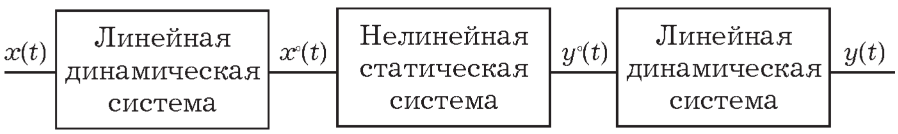


*Рис. 1.* Типовое звено радиотехнических устройств

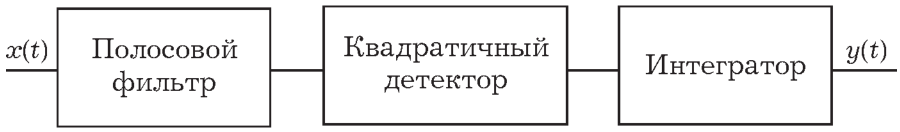


*Рис. 2.* Энергетический приемник

Косинусоидальные сигналы на интервале времени $t \in [-p,\ p)$ не являются монотонными, поэтому проектировать нелинейную статическую информационную систему, реализующую процедуру (1) для произвольного параметрического множества выходных сигналов

$$Y = \{y(t,A)\},\ t \in [-\pi,\pi),\ A \in [A_{\min}, A_{\max}], \quad (15)$$

не представляется возможным. Однако возможно реализовать процедуру (12), используя линейную динамическую систему на первом этапе и нелинейную статическую систему — на втором.

Преобразуем каждый входной скалярный сигнал $x(t,A) = A\cos t$ в двукомпонентный векторный[5] сигнал $\mathbf{x}(t,A) = [A\cos t, A\sin t]^T$. Таким образом, в результате преобразования $X \to X^\circ$ мы получили множество векторных сигналов

$$X^\circ = \{x(t,A) = [A\cos t, A\sin t]^T\},$$
$$t \in [-\pi,\pi),\ A \in [A_{\min}, A_{\max}]. \quad (16)$$

Практически вторую компоненту $A\sin t$ каждого сигнала $\mathbf{x}(t,A)$ можно получить из $x(t,A) = A\cos t$ с помощью таких известных линейных динамических систем, как фазовращатель или интегратор.

Нетрудно убедиться, что для любых $A_1 \in \in [A_{\min}, A_{\max}]$ и $A_2 \in [A_{\min}, A_{\max}]$ и любых $t_1 \in [-\pi,\pi)$ и $t_2 \in [-\pi,\pi)$ равенство $\mathbf{x}(t_1,A_1) = \mathbf{x}(t_2,A_2)$ достигается тогда и только тогда, когда $A_1 = A_2$ и $t_1 = t_2$. Таким образом, при любом значении параметра $A$ и в любой момент времени $t$ векторный сигнал $\mathbf{x}(t,A)$ принимает уникальное значение. Отсюда следует, что независимо от свойств сигналов $y(t,A)$, составляющих выходное множество (15), для преобразования $X^\circ \to Y$ множества сигналов $X^\circ$ вида (16) во множество сигналов $Y$ вида (15) достаточно нелинейной статической системы:

$$y(t,A) = f[x_1(t,A),\ x_2(t,A)],\ t \in [-\pi,\pi),$$
$$A \in [A_{\min}, A_{\max}],\ y(t,A) \in Y, \quad (17)$$

где $x_1(t,A)$ и $x_2(t,A)$ — компоненты вектора $\mathbf{x}(t,A) \in X^\circ$. Структурная схема информационной системы, преобразующей множество (14) косинусоидальных сигналов в произвольное множество (15), приведена на рис. 3.

Известное под названием «теорема Вейерштрасса–Стоуна» [9] обобщение теоремы Вейерштрасса, позволяет нам представить правую часть (17) в виде конечной суммы

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_{ij} x_1^{\,i}(t,A) x_2^{\,j}(t,A) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} A^i \cos^i t \sum_{j=0}^{m} C_{ij} A^j \sin^j t. \quad (18)$$

Возможность такого представления основана на том, что система функций

$$\varphi_{nm}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_{ij}\xi_1^{\,i}\xi_2^{\,j}, \quad (19)$$

заданных на компакте, составляет алгебру, разделяет точки этого компакта и не исчезает ни в одной точке этого компакта. Параметры $n$ и $m$ в (18) определяются необходимой точностью аппроксимации. Таким образом, задача проектирования информационной системы, предназначенной для обработки множества сигналов (14), сводится к определению набора коэффициентов $\{C_{ij}\}$ и нахождению параметров $n$ и $m$.

Например, если в частном случае $y(t,A) = A^2$, т.е. требуется квадратично продетектировать любой сигнал из входного множества $X$, то преобразование $X^\circ \to Y$ может быть выполнено нелинейной статической системой и состоит в вычислении квадратов модулей векторных сигналов $\mathbf{x}(t,A)$, т.е. $y(t,A) = x_1^2(t,A) + x_2^2(t,A)$. В этом частном случае в (18) $n=2$, $m=2$ и все коэффициенты $\{C_{ij}\}$, за исключением $C_{02} = C_{20} = 1$, равны нулю. Структурная схема соответствующей информационной системы приведена на рис. 4.

[5] Верхним индексом T обозначена операция транспонирования.

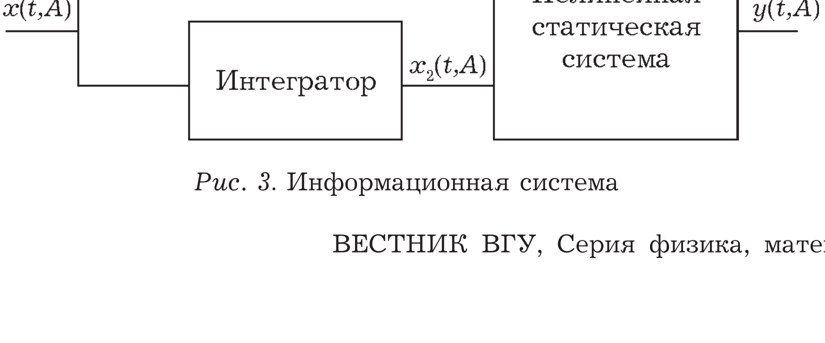


*Рис. 3.* Информационная система

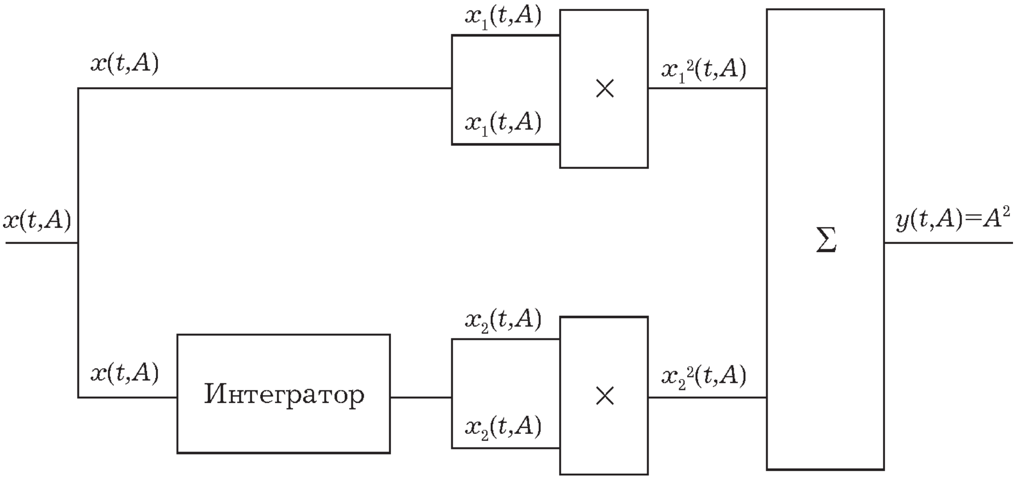


*Рис. 4.* Квадратичный детектор косинусоидальных сигналов

В общем случае размерность векторных сигналов $\mathbf{x}(t)$, составляющих множество $X^{\circ}$, может быть больше двух:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}. \tag{20}$$

Тогда решение задачи проектирования можно искать в обобщающем (18) виде:

$$y(t) = \sum_{j_1=0}^{N_1} \dots \sum_{j_n=0}^{N_n} C_{j_1 \dots j_n} x_1^{\ j_1}(t) \dots x_n^{\ j_n}(t). \tag{21}$$

## СОВРЕМЕННАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Преобразовать входной скалярный сигнал $x(t)$ в многомерный векторный сигнал вида (20) в настоящее время можно и целесообразно с помощью одного из известных вейвлет-преобразований [10]. В общем случае $j$-я компонента сигнала (20) будет иметь вид

$$x_j(t) = 2^{j/2} \int_0^{\infty} x(\tau) \psi(t - 2^j \tau) d\tau, \quad 0 < t < \infty, \ j = 1, 2, 3, \dots. \tag{22}$$

Здесь $\psi(t)$ — произвольный ортогональный вейвлет [10]. Простейшим примером ортогонального вейвлета является, например, функция Хаара [10, 11]:

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \le t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \le t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \tag{23}$$

В [11] описаны и другие вейвлеты, такие как вейвлет Морлетта, вейвлет Коифлета, вейвлет Добеши, частотный $B$-сплайновый вейвлет, гауссовский вейвлет, вейвлет «мексиканская шляпа», вейвлет Мейера, обратный биортогональный вейвлет, вейвлет Шеннона, вейвлет Симлета и другие.

Таким образом, структура современной информационной системы обработки сигналов сводится к виду, показанному на рис. 5.

Теоретически выходное множество сигналов вейвлет-преобразования вида (22) бесконечно. На рис. 5 количество таких сигналов равно $n$. Очевидно, $n$ должно быть таким, чтобы в любой момент времени $t$ векторный сигнал $\mathbf{x}(t)$ принимал уникальное значение.

**Определение 1.** Пусть множество $X^{\circ}$ векторных сигналов $\mathbf{x}(t) \in X^{\circ}$ типа (20) получено с помощью вейвлет-преобразования (22) из множества $X$ скалярных сигналов $x(t) \in X$. Минимальное значение параметра $n$ в (20), при котором для любых $t_1 \in T$ и $t_2 \in T$ равенство $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ достигается тогда и только тогда, когда $t_1 = t_2$, и для любого $t \in T$ выполняется неравенство $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$, будем называть оптимальной размерностью пространства векторных сигналов и обозначать $n_{\Psi}$.

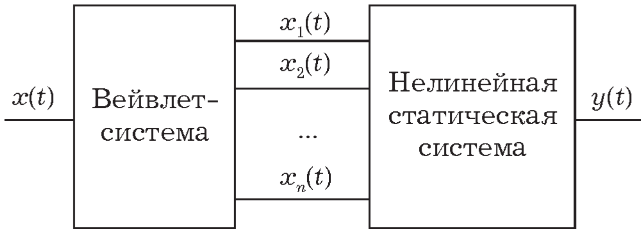


*Рис. 5.* Современная информационная система обработки сигналов

**Определение 2.** Будем называть множество скалярных сигналов $X$ и вейвлет $\psi(t) \in \Psi$ согласованными на заданном множестве вейвлетов $\Psi$, если $n_\psi \le n_\phi$ для любого вейвлета $\phi(t) \in \Psi$.

Таким образом, процедура проектирования современной системы обработки сигналов состоит в следующем.

1. Выбрать множество вейвлетов $\Psi$, преобразования по которым могут быть реализованы в проектируемой системе.

2. По заданному множеству входных сигналов $X$ определить согласованный вейвлет.

3. По заданному множеству выходных сигналов $Y$ определить входящие в (21) параметры $N_1$, $N_2$, ... $N_{n_\psi}$ и $C_{j_1 \ldots j_{n_\psi}}$ для всех $j_1 = 1, 2, \ldots, N_1$, $j_2 = 1, 2, \ldots, N_2, \ldots, j_{n_\psi} = 1, 2, \ldots, N_{n_\psi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин Б.Р., Шварц В.* Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.

2. *Задэ Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем (Метод пространства состояний). — М.: Наука, 1970. — 704 с.

3. *Директор С., Рорер Р.* Введение в теорию систем. — М.: Мир, 1974. — 644 с.

4. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. — СПб.: Питер, 2002. — 608 с.

5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. − М.: Наука, 1970. Т. 3. − 656 с.

6. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.К. Керимова / Под ред. П.И. Кузнецова. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.

8. *Урковиц Г.* Обнаружение неизвестных детерминированных сигналов по энергии // ТИИЭР. 1967. Т. 55. № 4. С. 50—59.

9. *Костылев В.И.* Радиофизическое применение теоремы Вейерштрасса−Стоуна // Второй Сибирский Конгресс по Прикладной и Индустриальной Математике (ИНПРИМ-96): Тез. докл. посв. памяти А.А. Ляпунова (1911—1973), А.П. Ершова (1931—1988), И.А. Полетаева (1915—1983). — Новосибирск, 1996. С. 223.

10. *Чуи Ч.* Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001. — 412 с.

11. *Дьяконов В.П., Абраменкова И.В.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. — СПБ.: Питер, 2002. — 608 с.