УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА СЕТИ*

© 2003 А. В. Копытин

Воронежский государственный университет

Рассматривается волновое уравнение на графе Γ

$$u_{tt} = \Delta_\Gamma u, \tag{1}$$

где Δ_Γ — оператор Лапласа-Бельтрами (т.е. оператор взятия второй производной по натуральному параметру вдоль каждого ребра Γ). Доказывается, что для того, чтобы все решения уравнения (1) были ограничены по равномерной норме необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора $-\Delta_\Gamma$ содержался в $(0,+\infty)$ и оператор $-\Delta_\Gamma$ не имел присоединенных функций. Приводятся примеры графов для которых эти условия не выполняются, а, следовательно, уравнение (1) имеет неограниченные решения.

Гиперболические уравнения на сетях (геометрических графах) и соответствующие спектральные задачи интенсивно изучаются уже более 20 лет. Продвижения в этой области получены по нескольким направлениям. Установлены осцилляционные свойства спектра краевой задачи на сети (см. [5]—[7]), получены оценки на собственные значения (см. [2, 10]), найдены условия существования и единственности решения задачи Коши (см. [8]), получен аналог формулы Даламбера (см. [3]).

В настоящей работе устанавливается связь между спектральными свойствами оператора Лапласа−Бельтрами на сети и наличием у соответствующего волнового уравнения неограниченных по времени решений.

Пусть X — банахово пространство и $\mathcal{L}(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X.

Определение 1. Семейство $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ операторов из $\mathcal{L}(X)$ называется *сильно непрерывной косинус-функцией* (КОФ), если оно удовлетворяет условиям:

1. $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$ *;*

2. $C(0) = I$, I *— тождественный оператор в* X *;*

3. $C(t)x$ *непрерывна по* t *при любом* $x \in X$ *.*

Линейный оператор $A : D(A) \subset X \to X$ с областью определения $D(A)$ называется *генератором* КОФ C если

$$D(A) = \left\{ \begin{matrix} x \in X : \text{предел } \lim\limits_{t\to 0}(C(2t)x - x)/2t^2 \\ \text{существует} \end{matrix} \right\}$$

и

$$Ax = -\lim_{t\to 0}(C(2t)x - x)/2t^2 = -C''(0)x.$$

С каждой КОФ будем связывать *сильно непрерывную синус-функцию* (СОФ) S , определяемую как $S(t)x = \int_0^t C(s)x\,ds$, $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$. Как известно (см. [9]), задача Коши

$$u'' + Au = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \tag{2}$$

для уравнения (3) с оператором $A : D(A) \subset \subset X \to X$ таким, что $\overline{D(A)} = X$ и $\rho(A) \neq \varnothing$, равномерно корректно разрешима (см. определение в [9]) тогда и только тогда, когда A является генератором сильно непрерывной КОФ C . В этом случае решение задачи (1), (2) может быть записано в виде

$$u(t) = C(t)\varphi + S(t)\psi. \tag{3}$$

Функции, представимые в виде (3), называются обобщенными решениями задачи (1), (2) (слово «обобщенное» мы будем опускать в дальнейшем).

Рассмотрим геометрический граф Γ — связное множество в $\mathbb{R}^n$, представляющее собой объединение конечного числа криволинейных отрезков $\{e_i\}_{i=1}^m$, называемых ребрами графа, точками пересечения которых мо-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 02-01-00307).

гут быть лишь их концы, называемые вершинами графа. Фиксируем некоторые вершины, принадлежащих единственному ребру, и назовем их граничными. Множество граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$. Остальные вершины Γ назовем внутренними. При этом не исключается возможность того, что $\partial\Gamma = \varnothing$.

Пусть $C_0(\Gamma)$ — пространство непрерывных функций $u:\Gamma \to \mathbb{R}$, заданных на Γ и обращающихся в нуль на $\partial\Gamma$. В пространстве $C_0(\Gamma)$ рассмотрим оператор $\Delta_\Gamma = d^2/dx^2$ двукратного дифференцирования по натуральному параметру вдоль каждого ребра e_i с областью определения $D(\Delta_\Gamma)$, состоящей из функций, дважды непрерывно дифференцируемых на каждом отрезке и удовлетворяющих условию согласования в любой внутренней вершине v:

$$\sum_{i=1}^{d(v)} \alpha_i(v) u_i(v+) = 0,$$

где $\alpha(v) = \{\alpha_i(a)\}_{i=1}^{d(v)}$ — приписываемый v набор положительных чисел, $d(v)$ — количество отрезков, примыкающих к v, u_i — сужение функции u на $e_i \ni v$, а через $u_i(v+)$ обозначена производная u_i в точке v при параметризации e_i в направлении «от v». Заметим, что здесь мы рассматриваем более общий по сравнению с [3] случай, когда оператор Δ_Γ является, вообще говоря, *несимметрическим*.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u''(t) = (\Delta_\Gamma u)(t), \tag{4}$$

$$u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \tag{5}$$

Теорема 1. *Оператор $-\Delta_\Gamma$ порождает в $C_0(\Gamma)$ сильно непрерывную КОФ C.*

Эта КОФ C строится методом продолжений в [3].

Пусть длины ребер e_i графа Γ рационально соизмеримы. В этом случае не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что все ребра имеют единичную длину.

Теорема 2. *Для того, чтобы КОФ C, порождаемая оператором $-\Delta_\Gamma$, была ограничена на $\mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы спектр $-\Delta_\Gamma$ содержался в $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ и оператор $-\Delta_\Gamma$ не имел присоединенных функций.*

Доказательство. Пусть КОФ C ограничена на $\mathbb{R}$. Тогда $\sigma(C(1)) \subset [-1,1]$ в силу леммы 6 из [1]. В то же время, как легко видеть, если λ — собственное значение оператора $-\Delta_\Gamma$, то $\cos\sqrt{\lambda} \in \sigma(C(1))$. Отсюда следует, что $\sigma(-\Delta_\Gamma) \subset \mathbb{R}^+$.

Заметим, что резольвента R_λ оператора $-\Delta_\Gamma$ вполне непрерывна (см. [4]). Тогда по теореме Гильберта корневое подпространство для каждого собственного значения R_λ конечномерно. Поскольку множества собственных функций операторов $-\Delta_\Gamma$ и R_λ совпадают, а с учетом теоремы 19 из [1] система собственных функций $-\Delta_\Gamma$ полна в $C_0(\Gamma)$, резольвента R_λ не имеет присоединенных функций, и, следовательно, не имеет их и оператор $-\Delta_\Gamma$.

Пусть теперь $\sigma(-\Delta_\Gamma) \subset \mathbb{R}^+$ и оператор Δ_Γ не имеет присоединенных функций. Спектр $\sigma(-\Delta_\Gamma)$ состоит из конечного набора последовательностей собственных значений вида $\{\lambda_{i,k} = (\omega_i + 2\pi k)^2\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $\omega_i \in [0,\pi]$, $i \in \{1,2,\dots,q\}$, $q \le 2m$. Поскольку любая функция из $D(\Delta_\Gamma)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям оператора Δ_Γ (см. теорему 4 в [2]), а множество $D(\Delta_\Gamma)$, очевидно, плотно в $C_0(\Gamma)$, система собственных функций оператора Δ_Γ полна в $C_0(\Gamma)$. Заметим, что числа $\mu_i = \cos\omega_i$ являются собственными значениями оператора $C(1)$. Так как каждая собственная функция оператора $-\Delta_\Gamma$ является также собственной функцией оператора $C(1)$, пространство $C_0(\Gamma)$ разложимо в прямую сумму

$$C_0(\Gamma) = H_{\mu_1} \oplus H_{\mu_2} \oplus \ldots \oplus H_{\mu_q}, \tag{6}$$

где H_{μ_i} — собственное подпространство оператора $C(1)$, отвечающее собственному значению μ_i. Пусть φ — произвольная функция из $C_0(\Gamma)$. Через φ_i обозначим проекцию φ на подпространство H_{μ_i}, $i \in \{1,2,\dots,q\}$. Для упрощения выкладок будем считать, что каждому собственному значению $\lambda_{i,k}$ соответствует ровно одна с точностью до постоянного множителя собственная функция $\Phi_{i,k}$. Поскольку система собственных функций $\{\Phi_{i,k}\}$ полна в подпространстве H_{μ_i}, имеет место представление

$$\varphi_i = \lim_{j\to\infty} \sum_{k\in K_j} c_{j,k} \Phi_{i,k},$$

где $\{K_j\}$ — последовательность конечных подмножеств $\mathbb{Z}$. Тогда

$$C(t)\varphi_i = \lim_{j\to\infty} \sum_{k\in K_j} c_{j,k} \cos(\omega_i t + 2\pi k t) \Phi_{i,k}. \tag{7}$$

Для каждого i, $0 < \omega_i < \pi$, обозначим

$$f_i(t) =$$

$$= \frac{1}{\sin\omega_i} \left[\sin(\omega_i t + \omega_i) C(t)\varphi_i - \sin(\omega_i t) C(t+1)\varphi_i \right],$$

$$g_i(t) =$$
$$= \frac{1}{\sin\omega_i}\left[\cos(\omega_i t)C(t+1)\varphi_i - \cos(\omega_i t+\omega_i)C(t)\varphi_i\right].$$

Легко видеть, что для каждого i ($0<\omega_i<\pi$) имеет место равенство

$$C(t)\varphi_i = \cos(\omega_i t)f_i(t) + \sin(\omega_i t)g_i(t). \qquad (8)$$

Покажем, что функция $f_i(t)$ — 1-периодична. Имеем

$$\sin\omega_i f_i(t) = \sin(\omega_i t+\omega_i)C(t)\varphi_i - \sin(\omega_i t)C(t+1)\varphi_i =$$
$$= \sin(\omega_i t+\omega_i)\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in K_j} c_{j,k}\cos(\omega_i t+2\pi kt)\Phi_{i,k} -$$
$$-\sin(\omega_i t)\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in K_j} c_{j,k}\cos(\omega_i(t+1)+2\pi kt)\Phi_{i,k} =$$
$$= \lim_{j\to\infty}\sum_{k\in K_j} c_{j,k}[\sin(\omega_i t+\omega_i)\cos(\omega_i t+2\pi kt) -$$
$$-\sin(\omega_i t)\cos(\omega_i(t+1)+2\pi kt)]\Phi_{i,k} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in K_j} c_{j,k}[\sin(2\omega_i t+\sin(\omega_i-2\pi kt)+$$
$$+\sin(\omega_i+2\pi kt)-\sin(2\omega_i t+\omega_i+2\pi kt)]\Phi_{i,k} =$$
$$= \sin\omega_i\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in K_j} c_{j,k}\cos(2\pi kt)\Phi_{i,k}.$$

Таким образом,

$$f_i(t) = \lim_{j\to\infty}\sum_{k\in K_j} c_{j,k}\cos(2\pi kt)\Phi_{i,k}. \qquad (9)$$

Из равенства (4) следует 1-периодичность функции f_i Делая аналогичные выкладки для функции g_i получаем равенство

$$g_i(t) = -\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in K_j} c_{j,k}\sin(2\pi kt)\Phi_{i,k}, \qquad (10)$$

из которого следует 1-периодичность функции g_i.

Обозначим

$$\varphi_0 = \varphi - \sum_{\substack{i=1\\ \omega_i\ne 0,\pi}}^{q}\varphi_i,$$

$f_0(t)=C(t)\varphi_0$. Из равенства (7) следует 1- или 2-периодичность функции f_0. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} C(t)\varphi &= C(t)\varphi_0 + \sum_{\substack{i=1\\ \omega_i\ne 0,\pi}}^{q} C(t)\varphi_i = \\ &= f_0(t) + \sum_{\substack{i=1\\ \omega_i\ne 0,\pi}}^{q}[\cos(\omega_i t)f_i(t)+\sin(\omega_i t)g_i(t)]. \end{aligned} \qquad (11)$$

Поскольку представление (6) имеет место для произвольной функции φ из $C_0(\Gamma)$, из него следует не только ограниченность, но и квазипериодичность КОФ C. С учетом теоремы 4 из [1] легко получаем

Следствие 1. *Для того, чтобы решение задачи (4), (5) было ограничено на $\mathbb{R}$ при любых φ и ψ из $C_0(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора $-\Delta_\Gamma$ содержался в $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ и состоял из полупростых собственных значений.*

Заметим, что условие $0\notin\sigma(-\Delta_\Gamma)$ эквивалентно тому, что $\partial\Gamma\ne\varnothing$.

Следующие примеры показывают, что оператор $-\Delta_\Gamma$ может иметь как присоединенные функции так и комплексные собственные значения, а значит соответствующее волновое уравнение будет иметь неограниченные решения.

Пример 1. Рассмотрим граф-цикл, состоящий из одной единственной вершины и одного ребра единичной длины, которое начинается и заканчивается в этой вершине*. Задача на собственные значения оператора $-\Delta_\Gamma$ эквивалентна следующей задаче на отрезке $[0,1]$

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, x\in[0,1] \\ u(0)=u(1), \\ ku'(0)=u'(1). \end{cases} \qquad (12)$$

Решение задачи (12) имеет вид

$$u(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x},$$

где $\lambda=-\omega^2$, а константы A и B удовлетворяют системе

$$\begin{cases} A+B = Ae^{\omega}+Be^{-\omega}, \\ k(A-B) = Ae^{\omega}-Be^{-\omega}. \end{cases} \qquad (13)$$

Определитель этой системы равен $(1+k)e^{-\omega}(1-e^{\omega})^2$ и обращается в нуль при $e^{\omega}=1$, т.е. при $\omega=2\pi ni$ и $\lambda=(2\pi n)^2$. В то же время ранг системы (8) при $e^{\omega}=1$ и $k\ne 1$ равен единице, а значит имеется только одна собственная функция, вторая — присоединенная. Собственная функция имеет вид $u_n(x)=\cos(2\pi nx)$, а присоединенная к ней

$$v_n(x) = \left(\frac{1}{4\pi n(1-k)} - \frac{x}{4\pi n}\right)\sin(2\pi nx).$$

* Автором этого примера является доцент ВГУ А. В. Боровских.

Пример 2. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.

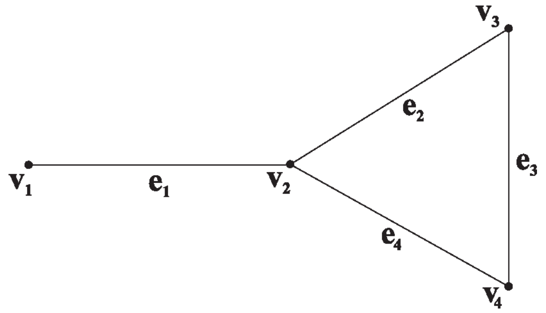

Рис. 1. Пример графа

Здесь вершина v_1 — граничная, а v_2, v_3 и v_4 — внутренние. Пусть ребро e_1 параметризовано в направлении от v_1 к v_2, e_2 — от v_2 к v_3, e_3 — от v_3 к v_4, и e_4 — от v_4 к v_2. Задача на собственные значения оператора $-\Delta_\Gamma$ имеет вид:

$$\begin{cases} -u_i'' = \lambda u_i, x \in [0,1], \; i = \overline{1,4} \\ u_1(0) = 0, \\ u_1(1) = u_2(0), \\ u_2(1) = u_3(0), \\ u_3(1) = u_4(0), \\ u_4(1) = u_2(0), \\ u_2'(0) = u_1'(1) + u_4'(1), \\ 3u_2'(1) = u_3'(0), \\ 3u_3'(1) = u_4'(0). \end{cases} \tag{14}$$

Решение этой задачи на i-ом ребре имеет вид:

$$u_i(x) = A_i e^{\omega x} + B_i e^{-\omega x}, \; i = \overline{1,4},$$

где $\lambda = -\omega^2$, а константы A_i и B_i удовлетворяют системе

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0, \\ A_1 z + B_1 z^{-1} = A_2 + B_2, \\ A_2 z + B_2 z^{-1} = A_3 + B_3, \\ A_3 z + B_3 z^{-1} = A_4 + B_4, \\ A_4 z + B_4 z^{-1} = A_2 + B_2, \\ A_2 - B_2 = A_1 z - B_1 z^{-1} + A_4 z - B_4 z^{-1}, \\ 3A_2 z - 3B_2 z^{-1} = A_3 - B_3, \\ 3A_3 z - 3B_3 z^{-1} = A_4 - B_4, \end{cases} \tag{15}$$

где $z = e^{\omega}$. Покажем, что определитель этой системы

$$D = 4z^{-4}(1 - z^2)(12z^6 + 11z^4 - 20z^3 + 11z^2 + 12)$$

помимо корней $z_{1,2} = \pm 1$ имеет комплексные корни, модуль которых отличен от 1. Поскольку при каждом $z \in \mathbb{R}$

$$12z^6 + 11z^4 - 20z^3 + 11z^2 + 12 =$$
$$= 12z^6 + z^2(11z^2 - 20z + 11) + 12 > 0,$$

все корни уравнения

$$12z^6 + 11z^4 - 20z^3 + 11z^2 + 12 = 0 \tag{16}$$

комплексны. Пусть все корни уравнения (16) по модулю равны 1. Тогда они имеют вид $z_{3,4} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$, $z_{5,6} = \cos\beta \pm i\sin\beta$ и $z_{7,8} = \cos\gamma \pm i\sin\gamma$. Имеем

$$12z^6 + 11z^4 - 20z^3 + 11z^2 + 12 =$$
$$= 12(z - \cos\alpha - i\sin\alpha)(z - \cos\alpha + i\sin\alpha)\times$$
$$\times(z - \cos\beta - i\sin\beta)(z - \cos\beta + i\sin\beta)\times$$
$$\times(z - \cos\gamma - i\sin\gamma)(z - \cos\gamma + i\sin\gamma) =$$
$$= 12(1 + z^2 - 2z\cos\alpha)(1 + z^2 - 2z\cos\beta)\times$$
$$\times(1 + z^2 - 2z\cos\gamma).$$

Обозначим $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$ и $c = \cos\gamma$. Тогда числа a, b и c удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ ab + bc + ac = -\dfrac{25}{48}, \\ abc = \dfrac{5}{24}, \end{cases} \tag{17}$$

причем $a, b, c \in [-1,1]$. Умножая первое уравнение системы (17) на a и вычитая из него второе, получаем равенство $a^2 - bc = 25/48$. Выражая из него bc и подставляя в третье уравнение системы (17), получаем уравнение

$$48a^3 - 25a - 10 = 0. \tag{18}$$

Обозначим $f(a) = 48a^3 - 25a - 10$. Имеем $f(-1) = -33 < 0$, $f(1) = 13 > 0$. Поскольку $f'(a) = 144a^2 - 25$, функция f возрастает на промежутках $[-1,-5/12]$, $[5/12,1]$ и убывает на промежутке $[-5/12, 5/12]$. А так как $f(-5/12) = -55/18 < 0$, уравнение (18) имеет единственный корень на отрезке $[-1,1]$. Поскольку система (17) симметрична относительно переменных a, b и c, если она имеет решение, то в этом решении значения a, b и c совпадают. Тогда из первого уравнения системы (17) следует, что $a = b = c = 0$. Но такое решение, очевидно, не удовлетворяет ни второму ни третьему уравнению системы (4). Следовательно, система (17) не имеет решений, удовлетворяющих условию $a, b, c \in [-1, 1]$. Таким образом, предположение о том, что все корни уравнения (16) по модулю равны 1 не верно.

Наличие у детерминанта системы (15) комплексного корня z такого, что $|z| \neq 1$ означает, что число ω, удовлетворяющее равенству $e^{\omega} = z$, комплексно и имеет ненулевую действительную часть. Следовательно, собственное значение $\lambda = -\omega^2$ оператора $-\Delta_\Gamma$ также комплексно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А. Г. Баскаков // Матем. сб. — 1984. — Т. 124(166). — С. 68—95.

2. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе/ М. Г. Завгородний // ДАН. — 1994. — Т. 335, № 3. — С. 281—283.

3. *Копытин А. В.* Некоторые вопросы теории эволюционных задач на сетях/ А. В. Копытин. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. — Воронеж, ВГУ, 2002. — 19 с.

4. *Покорный Ю.В.* О функции Грина задачи Дирихле на графе / Ю. В. Покорный, И. Г. Карелина // Доклады АН СССР. — 1991. Т. 318, № 3. — С. 942—944.

5. *Покорный Ю. В.* Теоремы Штурма для уравнений на графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин // Доклады АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 6. — С. 1306—1308.

6. *Покорный Ю. В.* О теоремах сравнения для уравнений на графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 7. — С. 1141—1150.

7. *Покорный Ю. В.* О распределении нулей собственных функций задачи Штурма−Лиувилля на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 3. — С. 316—318.

8. *Ali-Mehmeti F.* Nonlinear waves in networks / F. Ali-Mehmeti. — Academie-Verlag, 1994. — 173 p.

9. *Fattorini H.* O. Second-order linear differential equations in Banach spaces / H. O. Fattorini — Amsterdam, 1985.

10. *Nicaise S.* Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission / S. Nicaise // Lect. Notes Math. № 1771. — Springer-Verlag, 1985. — С. 532—541.