ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 2

УДК 517.9;514.8

ВЫЖИВАЮЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

© 2003 Ю. Е. Гликлих, А. В. Обуховский

Воронежский государственный университет

Изучается вопрос о возможности соединить две точки, принадлежащие компактной области с гладкой границей в полном римановом многообразии, решением дифференциального включения второго порядка, целиком лежащим в указанной области. Предполагается, что в случае попадания на границу области решение отражается от границы по физическому закону «угол падения равен углу отражения». Построены и изучены аналоги геодезических и интегральных операторов с параллельным переносом, обладающие свойством отражения на границе. На основе использования построенных объектов доказана теорема существования искомого решения при некоторых естественных условиях.

В настоящей работе* изучается вопрос о возможности соединить две точки, принадлежащие компактной области с гладкой границей в полном римановом многообразии, решением дифференциального включения второго порядка, целиком лежащим в указанной области. Следуя общей идеологии теории выживаемости (см., например, [5]), мы называем подобные решения выживающими. Предполагается, что в случае попадания на границу области решение отражается от границы по физическому закону «угол падения равен углу отражения».

Для исследования поставленной задачи модифицируется метод интегральных операторов с римановым параллельным переносом (см. монографическое изложение этого метода, например, в [3, 4], а также англоязычную книгу [7]).

Необходимые факты из теории многозначных отображений см. в [2, 6, 9].

Пусть M — полное риманово многообразие конечной размерности n. Рассмотрим на M замкнутое ограниченное (т.е. по теореме Хопфа−Ринова — компактное, см., например, [1]) множество K, являющееся замыканием открытой области в M и имеющее гладкую границу ∂K.

Определение 1. *Будем говорить, что на K задано многозначное векторное поле Ξ, если в каждом касательном пространстве $T_m M$, $m \in K$, задано множество $\Xi(m)$.*

В дальнейшем многозначные векторные поля будут удовлетворять дополнительным свойствам типа непрерывности, замкнутости образов $\Xi(m)$, зависеть от различных параметров и.т.д.

Рассмотрим произвольную граничную точку $m \in \partial K$, тогда любой вектор X в касательном пространстве в этой точке представим в виде линейной комбинации векторов $X = X_1\vec{\delta} + X_2\vec{n}$, где $\vec{\delta}$ — единичный касательный вектор к ∂K в точке m, $\vec{n}$ — направленный внутрь единичный вектор нормали, $X_1, X_2 \in R$.

Определим касательный конус $T_K(m)$ на K следующим образом:

Определение 2. *Касательным конусом $T_K(m)$ в точке m к области K на M, мы будем называть все $T_m M$, если $m \in Int\ K$, и полупространство касательного пространства $T_m M$ состоящее из всех векторов вида $X = X_1\vec{\delta} + X_2\vec{n}$, где $X_2 \geq 0$, если $m \in \partial K$.*

Заметим, что корректно рассматривать $T_K(m)$ в каждой точке $m \in K$, как образ точки m при многозначном отображении $T_K : K \to TM$. Понятно, что отображение T_K является многозначным векторным полем.

Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ - топологические пространства, $F : \mathbf{X} \to 2^{\mathbf{Y}}$ - многозначное отображение.

* Исследование частично поддержано грантом РФФИ 03-01-00112, грантом программы Университеты России УР.04.01.008 и грантом VZ-010-0 Министерства образования РФ и CRDF.

Определение 3. *Многозначное отображение F называется полунепрерывным снизу в точке $m \in \mathbf{X}$, если для любого открытого множества $V \subset \mathbf{Y}$ такого, что $F(m) \cap V \neq \varnothing$ найдется окрестность $U(m)$ точки m такая, что для любого $m^* \in U(m)$ выполняется $F(m^*) \cap V \neq \varnothing$.*

Теорема 4. *Многозначное векторное поле $T_K : K \to TM$, ставящее в соответствие каждому $m \in K$ множество $T_K(m)$ в T_mM, полунепрерывно снизу.*

Доказательство. 1. Для любой точки $m \in Int\ K$ отображение T_K ставит ей в соответствие все T_mM, и поэтому оно будет очевидным образом непрерывно по Хаусдорфу, а следовательно и полунепрерывно снизу.

2. Пусть теперь $m \in \partial K$. Тогда для любого открытого $V \subset TM$ такого, что $T_K(m) \cap V \neq \varnothing$, существует окрестность $U(m)$ такая, что для любого $m^* \in U(m)$ выполняется $T_K(m^*) \cap V \neq \varnothing$. Это означает, что отображение $TK(m)$ полунепрерывно в точке m и, следовательно, оно полунепрерывно на всей границе ∂K. □

Рассмотрим некоторую карту U на M, $U \bigcap K \neq \varnothing$. В этой карте некоторое многозначное векторное поле $\Xi : K \to TM$ может быть описано, как отображение $\Xi_{|U} : U \bigcap K \to R^n$, где R^n — модельное пространство многообразия M.

Утверждение 5. *Многозначное векторное поле $\Xi : K \to TM$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда в любой карте U, $U \bigcap K \neq \varnothing$, отображение $\Xi_{|U} : U \bigcap K \to R^n$ полунепрерывно снизу в каждой точке $m \in U \bigcap K$.*

Утверждение 5 очевидно.

Определение 6. *Многозначное отображение $F : \mathbf{X} \to 2^{\mathbf{Y}}$ называется квазиоткрытым в точке $m \in \mathbf{X}$, если $IntF(m) \neq \varnothing$ и если для любого $y \in IntF(m)$ найдутся такая окрестность $V(y) \subset \mathbf{Y}$ и такая окрестность $U(m) \subset \mathbf{X}$, что $V(y) \subset F(m^*)$ для всех $m^* \in U(m)$. Если F квазиоткрыто в каждой точке $m \in \mathbf{X}$, то оно называется квазиоткрытым.*

Следующая теорема доказана как теорема 1.3.8. в [2].

Теорема 7. *Пусть $\mathbf{Y}$ — конечномерное линейное топологическое пространство. Многозначное отображение $F : \mathbf{X} \to Cv(2^{\mathbf{Y}})$ (где $Cv(2^{\mathbf{Y}})$ — непустые, замкнутые, выпуклые подмножества $\mathbf{Y}$) квазиоткрыто в точке $m \in \mathbf{X}$ тогда и только тогда, когда $IntF(m) \neq \varnothing$ и F полунепрерывно снизу в точке m.*

Из теоремы 4 и теоремы 7 мы получаем, что многозначное векторное поле $T_{K|U} : U \to R^n$ квазиоткрыто.

Пусть на K задано многозначное векторное поле $F(t, m, X)$, зависящее от $t \in [0, l]$ и параметра $X \in T_mM$ и имеющее замкнутые образы.

Везде ниже мы предполагаем, что все образы $F(t, m, X)$ равномерно ограничены по норме в касательных пространствах, порожденной римановой метрикой, и что это многозначное векторное поле полунепрерывно снизу по совокупности переменных. Рассмотрим многозначное векторное поле $\Phi(t, m, X) = F(t, m, X) \bigcap T_K(m)$.

Теорема 8. *При выполнении условия*

$$\Phi(t, m, X) = F(t, m, X) \cap T_K(m) \subset \overline{F(t, m, X) \cap IntT_K(m)}. \tag{1}$$

многозначное векторное поле $\Phi(t, m, X)$ полунепрерывно снизу.

Доказательство. По теореме 1.3.9 из [2] в каждой карте U при выполнении условия (1) отображение $\Phi_{|U} : R \times U \times R^n \to R^n$ полунепрерывно снизу, так как $F : R \times U \times R^n \to R^n$ полунепрерывно снизу, а $T_{K|U} : U \to R^n$ квазиоткрыто. Тогда утверждение теоремы 8 следует из утверждения 5. □

Рассмотрим дифференциальное включение второго порядка

$$\frac{D}{dt}\dot{m}(t) \in F(t, m(t), \dot{m}(t)), \tag{2}$$

где $\frac{D}{dt}$ — ковариантная производная связности Леви–Чивита на M, $\dot{m}(t) = \frac{d}{dt}m(t)$.

Определение 9. *Кривая $m(t)$, целиком лежащая в K, C^1-гладкая и имеющая абсолютно непрерывную производную во внутренних точках K и такая, что включение (2) выполнено для почти всех $t \in [0, l]$, называется выживающим решением включения (2).*

Теорема 10. *Пусть выполнено условие (1) и пусть точки $m_0, m_1 \in K$ таковы, что существует целиком лежащая внутри K геодезическая $a(t)$ связности Леви–Чивита, для которой $a(0) = m_0$, $a(1) = m_1$ и вдоль которой точки m_0 и m_1 не сопряжены. Тогда существует число $L(m_0, m_1, a) > 0$ такое, что для любого $0 < t_1 < L(m_0, m_1, a)$ существует решение $m(t)$ включения (2), удовлетворяющее условию $m(0) = m_0$, $m(t_1) = m_1$.*

Доказательство. Так как по теореме 8 при выполнении условия (1) $\Phi(t,m,X)$ полунепрерывно снизу, то при указанных условиях из теоремы 3.1 работы [8] следует утверждение теоремы 10 для дифференциального включения

$$\frac{D}{dt}\dot{m}(t) \in \Phi(t, m(t), \dot{m}(t)).$$

Поскольку по построению $\Phi(t,m,X) \subset F(t,m,X)$, то указанное решение является также и решением (2). □

Ниже в этой статье мы рассмотрим случай, когда в K нет геодезических, соединяющих m_0 с m_1 и целиком лежащих в K.

Для точки $m \in \partial K$ ведем оператор отражения $R: T_mM \to T_mM$ следующим образом: для $X = X_1\vec{\delta} + X_2\vec{n}$ положим $R(X) = X_1\vec{\delta} - X_2\vec{n}$.

Рассмотрим на K произвольную кривую $m(t)$, которая является гладкой во внутренних точках. Мы будем говорить, что кривая $m(t)$ обладает свойством отражения на границе, если в момент времени t^*, когда $m(t^*) \in \partial K$, выполнено условие: $\lim_{t\uparrow t^*} \dot{m}(t) = R(\lim_{t\downarrow t^*} \dot{m}(t))$, где $t \downarrow t^*$ означает, что t стремится к t^* при $t > t^*$, а $t \uparrow t^*$ — что t стремится к t^* при $t < t^*$.

Определение 11. *Выживающей геодезической называется кривая $a(t)$, целиком лежащая в K, обладающая свойством отражения на границе и такая, что для всех t, при которых $a(t) \in Int\,K$, она является гладкой и удовлетворяет уравнению $\frac{D}{dt}\dot{a}(t) = 0$.*

Для кусочно C^1-кривой $\gamma(t)$ в M обозначим аналогично [3, 4] через $\Gamma[\gamma(\cdot)]_{t,s}X$ вектор в $T_{\gamma(t)}M$, полученный параллельным переносом вектора $X \in T_{\gamma(s)}M$ вдоль $\gamma(\cdot)$. Пусть $a_X(t)$ − выживающая геодезическая с начальной скоростью $\dot{a}_X(0) = X \in T_{a(0)}M$, пересекающая ∂K в точках $t_1, t_2, \dots$. Тогда при $t \in [0, t_1)$ кривая $a_X(t)$ является обычной геодезической с начальной скоростью X, при $t \in [t_1, t_2)$ — обычной геодезической, начинающейся в точке $a_X(t_1)$ с начальной скоростью $R(\Gamma[a_X(\cdot)]_{t_1,0}X)$, при $t \in [t_2, t_3)$ — обычной геодезической, начинающейся в точке $a_X(t_2)$ с начальной скоростью $R(\Gamma[a_X(\cdot)]_{t_2,t_1} R(\Gamma[a_X(\cdot)]_{t_1,0}X))$ и так далее. Очевидно, что при сделанных выше предположениях о компактности области K и гладкости границы ∂K для любой точки $m \in K$ и любого вектора $X \in T_K(m)$ существует единственная выживающая геодезическая $a_X(t)$ с начальными условиями $a_X(0) = m$ и $\dot{a}_X(0) = X$, которая определена при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и является кусочно-гладкой.

Зафиксируем точку $m_0 \in K \subset M$. Аналогично стандартному определению назовем выживающим экспоненциальным отображением $exp_{m_0}^{T_K}: T_K(m_0) \to K$ оператор, ставящий в соответствие вектору $X \in T_K(m_0)$ значение $a_X(1)$ выживающей геодезической $a_X(t)$, выходящей из m_0 с начальным касательным вектором X.

Определение 12. *Назовем $X \in T_K(m_0)$ вектором общего положения, если во всех точках, в которых выживающая геодезическая a_X пересекает границу ∂K, пересечение этой геодезической с ∂K трансверсально.*

Теорема 13. *Пусть $X \in T_K(m_0)$— вектор общего положения такой, что $exp_{m_0}^{T_K}(X) \in Int\ K$. Тогда $exp_{m_0}^{T_K}$ гладко в некоторой окрестности точки X в $T_K(m_0)$.*

Доказательство. Если геодезическая $a_X(t)$ не попадает на границу, утверждение теоремы следует из свойств обычного экспоненциального отображения, в частности, из его C^∞-гладкости. Рассмотрим альтернативный случай. Пусть $t^*(X)$— момент первого выхода $a_X(t)$ на границу ∂K. Так как по условию пересечение трансверсально, из описания экспоненциального отображения в терминах потока базисного векторного поля на расслоении ортонормированных базисов (см., например, [1]) и из теоремы о гладкой зависимости решений задачи Коши от начальных данных параметров следует, что существует шар $U_\varepsilon \subset T_{m_0}M$ некоторого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в X такой, что для любого $Y \in U_\varepsilon$ соответствующая геодезическая $a_Y(t)$ пересекается с ∂K трансверсально и при этом момент пересечения $t^*(Y)$ и точка пересечения $a_Y(t^*(Y))$ гладко зависят от Y. Как сказано выше, после отражения геодезические $a_Y(t)$ описываются в терминах обычного экспоненциального отображения от векторов $R(\Gamma[a_Y(\cdot)]_{t^*(Y),0}Y)$, которые гладко зависят от Y. При следующих пересечениях с границей ситуация аналогична. □

Определение 14. *Точку $m_1 = exp_{m_0}^{T_K}(X) \in Int\ K$ будем называть несопряженной с m_0 вдоль выживающей геодезической $a_X(t)$, если X — точка общего положения и в X дифференциал $d\ exp_{m_0}^{T_K}$ имеет максимальный ранг.*

Теорема 15. *Пусть внутренняя точка $m_1 \in M$ не сопряжена с точкой m_0 вдоль гео-*

дезической $a_X(\cdot)$. *Тогда* $exp_{m_0}^{T_K}$ *отображает некоторую окрестность точки* X *в* $T_K(m_0)$ *диффеоморфно на некоторую окрестность точки* m_1 *в* M.

Утверждение теоремы 15 — очевидное следствие из невырожденности $d\,exp_{m_0}^{T_K}$ в случае максимального ранга.

Рассмотрим $m_0 \in M$, $I = [0, l]$ и пусть $v : I \to T_{m_0}M$ непрерывная кривая. Следуя [3,4,7], обозначим через $\mathcal{S}v : I \to M$ C^1-кривую в M такую, что $\mathcal{S}v(0) = m_0$ и касательный вектор $\frac{d}{dt}\mathcal{S}v(t)$ параллелен вдоль $\mathcal{S}v(\cdot)$ вектору $v(t) \in T_{m_0}M$ при любом $t \in I$. Такая кривая существует и единственна, ее конструкция основана на развертке Картана (см. подробное доказательство в [3, 4]).

Рассмотрим множество непрерывных кривых $\gamma : I \to T_K(m_0)$, которое обозначим $C^0(I, T_K(m_0))$. Отметим, что $C^0(I, T_K(m_0))$ является областью в банаховом пространстве $C^0(I, T_{m_0}M)$. Нам также потребуется множество отображений (кривых) в K, определенных на I, обладающих свойством отражения на границе и являющихся C^1-гладкими во внутренних точках K. Это множество мы обозначим $\tilde{C}^1(I, K)$. Понятно, что кривые из $\tilde{C}^1(I, K)$ кусочно C^1-гладкие.

Определим оператор $\mathcal{S}^K C^0(I, T_K(m_0)) \to \to \tilde{C}^1(I, K)$ следующим образом: $\mathcal{S}^K v(t) = \mathcal{S}v(t)$ при $t \in [0, \tilde{t}_1]$, где $\tilde{t}_1$ — момент первого выхода $\mathcal{S}v(t)$ на границу ∂K; $\mathcal{S}^K v(t) = \mathcal{S}R(\Gamma[\mathcal{S}^K v(\cdot)]_{\tilde{t}_1,0} v(t))$ при $t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, где $\tilde{t}_2$ — момент первого выхода кривой $\mathcal{S}R(\Gamma[S^K v(\cdot)]_{\tilde{t}_1,0} v(t))$ при $t > \tilde{t}_1$, $\mathcal{S}^K v(t) = \mathcal{S}R(\Gamma[\mathcal{S}^K v(\cdot)]_{\tilde{t}_2,0} v(t))$ при $t \in [\tilde{t}_2, \tilde{t}_3]$, где $\tilde{t}_3$ — момент первого выхода кривой $\mathcal{S}R(\Gamma[\mathcal{S}^K v(\cdot)]_{\tilde{t}_2,0} v(t))$ при $t > \tilde{t}_2$ и так далее.

Теорема 16. *Пусть внутренняя точка* $m_1 \in K$ *не сопряжена с внутренней точкой* m_0 *вдоль некоторой выживающей геодезической* $a(t)$, ($a(0) = m_0$, $a(1) = m_1$) *связности Леви-Чивита на* M. *Тогда для любого числа* $k > 0$ *существует число* $L(m_0, m_1, k, a) > 0$ *такое, что для* $0 < t_1 < L(m_0, m_1, k, a)$ *и для любой кривой* $u(t) \in U_k \subset C^0([0, t_1], T_{m_0}M)$ *(где* U_k *шар радиуса* k *с центром в нуле) в некоторой ограниченной окрестности вектора* $t_1^{-1}\dot{a}(0) \in T_{m_0}M$ *существует единственный вектор* $C_u \in T_{m_0}M$, *непрерывно зависящий от* u, *такой, что* $\mathcal{S}^K(u + C_u)(t_1) = m_1$. *При этом* $\mathcal{S}^K$ *является гладким на* U_k.

Доказательство. Здесь рассуждения являются модификацией доказательства теоремы 3.3 из [4]. Легко видеть, что $(\mathcal{S}^K \dot{a}(0))(1) = exp_{m_0}^{T_K}(\dot{a}(0))$ и что $\mathcal{S}^K(v(\cdot) + \dot{a}(0))(1)$ можно представить как возмущение $exp_{m_0}^{T_K}$ параметром $v(\cdot) \in C^0([0,1], T_{m_0}M)$ (напомним, что поскольку m_0 — внутренняя точка K, то $T_K(m_0) = T_{m_0}M$). При этом, если геодезическая $a(t)$ пересекает ∂K трансверсально, то трансверсальность пересечения сохраняется и при указанном возмущении, если $v(\cdot)$ достаточно мало.

Так как в точке $\dot{a}(0)$ отображение $exp_{m_0}^{T_K}$ гладко и $d\,exp_{m_0}^{T_K}$ имеет максимальный ранг, то по теореме 15 $exp_{m_0}^{T_K}$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность V вектора $\dot{a}(0)$ в $T_{m_0}M$ на некоторую окрестность точки m_1 в K. Тогда при $\hat{v}(\cdot)$ из достаточно малого ε-шара U_ε с центром в нуле пространства $C^0([0,1], T_{m_0}M)$ отображение, переводящее $X \in V$ в $\mathcal{S}^K(\hat{v}(\cdot) + X)(1)$, является на V гладким диффеоморфизмом. Отсюда легко получить существование и гладкую зависимость от $\hat{v}(\cdot)$ вектора $C_{\hat{v}}$ такого, что $\mathcal{S}^K(\hat{v}(\cdot) + C_v)(1) = m_1$. Пусть t_1 таково, что $t_1^{-1}\varepsilon > k$. Для $v \in U_k \subset C^0([0, t_1], T_{m_0}M)$ определим C_v формулой $C_v = t_1^{-1} C_{\hat{v}}$, где $\hat{v}(t) = t_1^{-1} v(t_1 \cdot t) \in U_\varepsilon$. Из конструкции оператора $\mathcal{S}^K$ нетрудно видеть, что $\mathcal{S}^K(v(\cdot) + C_v)(t_1 \cdot t) = = \mathcal{S}^K(\hat{v}(\cdot) + C_{\hat{v}})(t)$, т.е. $\mathcal{S}^K(v(\cdot) + C_v)(t_1) = m_1$. В качестве $L(m_0, m_1, k, a)$ возьмем супремум таких t_1. □

Пусть $m(t)$ ($t \in I$, $m(0) = m_0$) — кривая из $\tilde{C}^1(I, K)$ и $X(t, m)$ — векторное поле на K. Введем оператор $\Gamma^K X(t, m(t))$ параллельного переноса вектора $X(t, m(t))$ вдоль $m(\cdot)$ из точки $m(t)$ в точку $m(0) = m_0$ с отражением на границе следующим образом. Пусть $\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_N$ — точки, в которых кривая $m(\cdot)$ принадлежит ∂K. Тогда

$$\Gamma^K X(t, m(t)) =$$

$$= \begin{cases} \Gamma[m(\cdot)]_{0,\tilde{t}_1}(R(\Gamma[m(\cdot)]_{\tilde{t}_1,\tilde{t}_2}(R \ldots R(\Gamma[m(\cdot)]_{\tilde{t}_N,t} X(t, m(t)))\ldots) \\ \text{при } t \in [\tilde{t}_N, l] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma[m(\cdot)]_{0,\tilde{t}_1}(R(\Gamma[m(\cdot)]_{\tilde{t}_1,\tilde{t}_2}(R \ldots R(\Gamma[m(\cdot)]_{\tilde{t}_i,t} X(t, m(t)))\ldots) \\ \text{при } t \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma[m(\cdot)]_{0,t}(X(t, m(t))) \text{ при } t \in [0, \tilde{t}_1) \end{cases}$$

Теорема 17. *Пусть внутренняя точка* $m_1 \in K$ *не сопряжена с внутренней точкой* $m_0 \in K$ *вдоль некоторой выживающей геодезической* $a(t)$ ($a(0) = m_0$, $a(1) = m_1$) *связности*

Леви–Чивита и пусть поле $F(t,m,X)$ полунепрерывно снизу и равномерно ограничено некоторым k для всех t,m,X и удовлетворяет условию (1) Тогда существует число $L(m_0,m_1,a)$ такое, что для всех t_0, $0<t<L(m_0,m_1,a)$ включение (2) имеет выживающее решение $m(t)$, удовлетворяющее условиям $m(0)=m_0, m(t_0)=m_1$.

Доказательство теоремы 17. Пусть $I=[0,l]$. Рассмотрим многозначное векторное поле $\Phi(t,m(t),\dot m(t))$ вдоль кривой $m(t)=S^K v(t)$, где $v(t)\in C^0(I,T_{m_0}M)$. Применим к этому полю вдоль $m(\cdot)$ оператор Γ^K. Тогда для заданного v мы получим многозначные отображения $\Gamma^K\Phi S^K v: I\to T_{m_0}M$, заданное формулой

$$\Gamma^K\Phi S^K v(t)=\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(t)),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(t))),$$

и $\Gamma^K\Phi\mathcal{S}^K: I\times C^0(I,T_{m_0}M)\to T_{m_0}M$, заданное формулой

$$\Gamma^K\Phi\mathcal{S}^K(t,v)=\Gamma^K\Phi\mathcal{S}^K v(t).$$

Лемма 18. *Многозначное отображение $\Gamma^K\Phi\mathcal{S}^K: I\times C^0(I,T_{m_0}M)\to T_{m_0}M$ полунепрерывно снизу по совокупности переменных.*

Доказательство. Поскольку $\Phi(t,m,X)$ полунепрерывно снизу, то отображение $\Phi S^K(t,v(\cdot))=\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(t)),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(t)))$, переводящее $I\times C^0(I,T_{m_0}M)$ в TM, полунепрерывно снизу по совокупности переменных t и v, так как теореме 16 оператор $\mathcal{S}^K: U_k\to\tilde C^1(I,K)$ непрерывен. Применив оператор Γ^K, получим, что $\Gamma^K\Phi\mathcal{S}^K$ полунепрерывно снизу по совокупности t и v, поскольку оператор Γ^K непрерывен на $\mathcal{S}^K U_k$. $\square$

Для каждого v, определим $\mathcal{P}\Gamma\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(t)),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(t)))$ как множество всех измеримых сечений многозначного отображения $\Gamma^K\Phi\mathcal{S}^K v$.

Поскольку поле $\Phi(t,m,X)$ ограничено k и параллельный перенос сохраняет норму вектора, все сечения из $\mathcal{P}\Gamma\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(t)),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(t)))$ тоже ограничены тем же самым k и, следовательно, интегрируемы. Тогда сопоставление

$$v\in C^0(I,T_{m_0}M)\mapsto\mathcal{P}\Gamma\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(t)),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(t)))$$

задает многозначным отображением

$$\mathcal{P}\Gamma^K\Phi\mathcal{S}^K: C^0(I,T_{m_0}M)\to L^1((I,\mathcal{A},\mu),T_{m_0}M),$$

где $\mathcal{A}$ — борелевская σ-алгебра, а μ — нормализованная мера Лебега на I. Несложно показать, что это отображение полунепрерывно снизу и его образы разложимы. Тогда из теоремы Брессана–Коломбо (см., например, [6]) следует, что это отображение имеет непрерывное сечение, которое мы обозначим $p\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(\cdot)),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot)))$.

Ясно, что для достаточно малого $t_1>0$ выполнено неравенство $t_1<L(m_0,m_1,kt_1,a)$, где $L(m_0,m_1,kt_1,a)$ число из теоремы 16. Определим число $L(m_0,m_1,a)$, как супремум всех t_1, для которых $t_1<L(m_0,m_1,kt_1,a)$.

Пусть $t_0<L(m_0,m_1,a)$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $I=[0,t_0]$. Рассмотрим однозначное отображение, определенное формулой

$$Bv=\int_0^t p\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v)))ds, \tag{3}$$

где C_v вектор из теоремы 16. Поскольку, как легко видеть, при каждом $v(\cdot)\in C^0(I,T_{m_0}M)$ кривая $\int_0^t p\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v)))ds$ непрерывна по t, то оператор B переводит в себя пространство $C^0(I,T_{m_0}M)$.

Лемма 19. *Отображение $B: C^0([0,t_0],T_{m_0}M)\to\to C^0([0,t_0],T_{m_0}M)$ вполне непрерывно.*

Доказательство. Множества $\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v)))$ для всех v и t по построению ограничены в $T_{m_0}M$ константой k. Следовательно, все сечения $P\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot+C_v)))$ и, в частности, $p\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot+C_v)))$ ограничены той же самой константой. Это означает, что все кривые

$$\int_0^t p\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v)))ds\in$$
$$\in C^0(I,T_{m_0}M)$$

равномерно ограничены. Следовательно $B(C^0(I,T_{m_0}M))$ — компакт в $C^0(I,T_{m_0}M)$.

По построению $B: C^0([0,t_0],T_{m_0}M)\to\to L^1((I,\mathcal{A},\mu),T_{m_0}M)$ непрерывно. Поскольку C_v непрерывно зависит от v, это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при

$$\|v(\cdot)-v_1(\cdot)\|_{C^0(I,T_{m_0}M)}<\delta \tag{4}$$

выполняется

$$\|Bv(\cdot)-Bv_1(\cdot)\|_{L^1((I,A,\mu),T_{m_0}M)}=$$
$$\int_0^l\|p\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v(t)+C_v),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(t)+C_v)))-$$
$$-p\Gamma^K\Phi(t,\mathcal{S}^K(v_1(t)+C_{v_1}),\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_1(t)+C_{v_1})))\|_{T_{m_0}M}dt<\varepsilon$$

Но тогда при тех же ε, δ, $v(\cdot)$ и $v_1(\cdot)$ и при любом $t \in [0,l]$

$$\left\| \int_0^t (p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v(s)+C_v), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(s)+C_v))) - \right.$$

$$\left. -p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_1(s)+C_{v_1}), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_1(s)+C_{v_1}))))ds \right\|_{T_{m_0}M} \leq$$

$$\int_0^t \| p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v(s)+C_v), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(s)+C_v))) -$$

$$-p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_1(s)+C_{v_1}), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_1(s)+C_{v_1})))\|_{T_{m_0}M}\, ds \leq$$

$$\int_0^l \| p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v(t)+C_v), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(t)+C_v))) -$$

$$-p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_1(t)+C_{v_1}), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_1(t)+C_{v_1})))\|_{T_{m_0}M}\, dt < \varepsilon.$$

Отсюда сразу следует, что при выполнении (4)

$$\|Bv(\cdot) - Bv_1(\cdot)\|_{C^0(I, T_{m_0}M)} =$$

$$= \sup_{t\in[0,l]} \left\| \int_0^t (p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v(\cdot)+C_v), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v(\cdot+C_v))) - \right.$$

$$\left. -p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_1(\cdot)+C_{v_1}), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_1(\cdot+C_{v_1}))))dt \right\|_{T_{m_0}M} < \varepsilon.$$

Это означает непрерывность $B : C^0(I, T_{m_0}M) \to \to C^0(I, T_{m_0}M)$. $\square$

Пусть U_{kt_0} — шар радиуса kt_0 с центром в нуле в $C^0([0,t_0], T_{m_0}M)$. Поскольку параллельный перенос сохраняет норму вектора мы можем легко видеть, что вполне непрерывный оператор B отображает шар U_{kt_0} в себя и, следовательно (см., например, [2]), имеет в U_{kt_0} неподвижную точку $v_0(\cdot)$, т.е. такую, что $v_0(\cdot) = Bv_0(\cdot)$.

Теперь покажем, что $m(t) = \mathcal{S}^K(v_0(t)+C_{v_0})$ является решением включения (2). По построению $m(0)=m_0$, $m(t_0)=m_1$, $m(t)$ − C^1-кривая внутри K и $\dot m(t)$ абсолютно непрерывна. Поскольку $v_0(\cdot)$ неподвижная точка B, то

$$\dot v_0(t) = p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_0(t)+C_{v_0}), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_0(t+C_{v_0})))$$

и из определения $p\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_0(t)+C_{v_0})$, $\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_0(t+C_{v_0})))$ следует, что п.в.

$$\dot v_0(t) \in \Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_0(t)+C_{v_0}), \frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_0(t+C_{v_0}))). \tag{5}$$

Из свойств ковариантной производной и конструкции оператора Γ^K следует, что применив оператор $(\Gamma_t^K)^{-1} : T_{m_0}M \to T_{m(t)}M$, обратный к Γ^K, к $\dot v_0(t)$ и к $\Gamma^K \Phi(t, \mathcal{S}^K(v_0(t)+C_{v_0})$, $\frac{d}{dt}\mathcal{S}^K(v_0(t)+C_{v_0})))$, мы получим $\frac{D}{dt}\dot m(t)$ и $\Phi(t, m(t), \dot m(t))$, соответственно. Тогда из (3) следует, что

$$\frac{D}{dt}\dot m(t) \in \Phi(t, m(t), \dot m(t)).$$

Поскольку по построению $\Phi(t,m,X) \subset \subset F(t,m,X)$, это доказывает теорему. $\square$

Замечание 20. Из (1) несложно заметить, что уравнение $v_0(\cdot) = Bv_0(\cdot)$ является аналогом уравнения годографа скорости (см. [3, 4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бишоп Р.Л., Криттенден Р.Дж.* Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967. — 335 с.

2. *Борисович Ю.Е., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986. — 104 с.

3. *Гликлих Ю.Е.* Риманов параллельный перенос в нелинейной механике// Топологические и геометрические методы в математической физике /Серия «Новое в глобальном анализе». — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983. — С. 3—25.

4. *Гликлих Ю.Е.* Анализ на римановых многообразиях и задачи математической физики. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989. — 189 с.

5. *Aubin J.P.* Viability Theory. — Boston−Basel−Berlin: Birkhäuser Verlag, 1991. — 537 p.

6. *Deimling K.* Multivalued differential equations. Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. — 257 p.

7. *Gliklikh Yu.E.* Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods. New York: Springer-Verlag, 1997. — xv+213 p.

8. *Gliklikh Yu.E., Obukhovskiĭ A.V.* On a two point boundary value problem for second-order differential inclusions on riemannian manifolds.// Abstract and applied analysis. — 2003. — №. 10. — P. 591—600.

9. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.