ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 2

УДК:517.986.6

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2003 Б. Д. Гельман, Х. Р. Ал-Хашеми

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный педагогический университет

Существуют различные классы многозначных отображений, образы которых принадлежат некоторому семейству подмножеств, для которых доказаны, как теоремы о существовании однозначных сечений (если отображения полунепрерывны снизу), так и теоремы о существовании однозначных аппроксимаций (если отображения полунепрерывны сверху).

В настоящей работе выясняются условия, которым должны удовлетворять образы многозначного отображения, чтобы теорему существования однозначных аппроксимаций многозначных отображений можно было получить из теоремы о существовании однозначных сечений.

Хорошо известно, какую важную роль в изучении многозначных отображений играют однозначные сечения и аппроксимации (см., например, [5]). Одной из первых и наиболее важных теорем существования непрерывных сечений у многозначных отображения является теорема Майкла (в статье теорема 2), а однозначных ε-аппроксимаций — теорема Челины (см., например, [4]).

Аналогично, существуют различные классы многозначных отображений, образы которых принадлежат некоторому семейству подмножеств, для которых доказаны, как теоремы о существовании однозначных сечений (если отображения полунепрерывны снизу), так и теоремы о существовании однозначных аппроксимаций (если отображения полунепрерывны сверху). Это, например, многозначные отображения, образы которых выпуклы по переключению, являются типа R_δ и др.

Естественно возникает вопрос, каким условиям должны удовлетворять образы многозначного отображения, чтобы теорему существования однозначных аппроксимаций многозначных отображений можно было получить из теоремы о существовании однозначных сечений. Ответу на этот вопрос и посвящена данная статья.

Другие подходы к рассматриваемой проблеме были предложены в работах [7], Д. Реповша и П. В. Семенова (в печати) и др.

* Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00189

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Пусть Y — метрическое пространство, обозначим тогда:

$P(Y)$ — множество всех непустых подмножеств в Y;

$C(Y)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств в Y.

Если Y — подмножество нормированного пространства E, то обозначим

$V(Y)$ - множество всех непустых выпуклых подмножеств в Y;

$Cv(Y)$ - множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств в Y.

Многозначное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x. В дальнейшем, если образы многозначного отображения F являются замкнутыми, то будем записывать это следующим образом, $F : X \to C(Y)$. Аналогично, обозначение $F : X \to Cv(Y)$ ($F : X \to V(Y)$) означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми замкнутыми (выпуклыми) множествами.

Пусть X, Y — метрические пространства, $F : X \to P(Y)$ — многозначное отображение. Графиком многозначного отображения F называется множество

$$\Gamma_X(F) = \{(x, z) \mid \ z \in F(x), x \in X\} \subset X \times Y.$$

Всюду в дальнейшем многозначные отображения обозначаются прописными, а однозначные — строчными буквами.

Определение 1. *Многозначное отображение $F: X \to P(Y)$ называется полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ найдется открытая окрестность U точки x_0, такая, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для любого $x \in U$.*

Если F — полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным снизу.

Спроведливо следующее предложение, характеризующее полунепрерывные снизу отображения в точке.

Предложение 1. *Для того чтобы отображение $F: X \to P(Y)$ было полунепрерывно снизу в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K \subset F(x_0)$ и любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta = \delta(x_0, K, \varepsilon) > 0$ такое, что как только $\rho(x_0, x) < \delta$, то $K \subset U_\varepsilon(F(x))$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение F полунепрерывно снизу в точке x_0, $K \subset F(x_0)$ — произвольный компакт, ε — произвольное положительное число. Предположим противное, тогда для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x_\delta \in U_\delta(x_0)$ и $y_\delta \in K \subset F(x_0)$ такие, что $y_\delta \notin U_\varepsilon(F(x_\delta))$.

Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, стремящуюся к нулю. Обозначим соответствующие точки $x_{\delta_n} = x_n$, $y_{\delta_n} = y_n$. Тогда, $\rho(x_n, x_0) < \delta_n$, $y_n \in K \subset F(x_0)$ и $y_n \notin U_\varepsilon(F(x_n))$. Так как множество K является компактом, то без ограничения общности можно считать, что $\{y_n\} \to y_* \in K$. Нетрудно видеть, что для достаточно больших n точка $y_* \notin U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_n))$. Рассмотрим открытое множество $V = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_*)$. Очевидно, что $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$, однако, не существует открытой окрестности точки x_0 такой, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для любого x из этой окрестности. Это противоречит полунепрерывности снизу отображения F в точке x_0.

Достаточность. Пусть для любого компакта $K \subset F(x_0)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x_0, K, \varepsilon) > 0$ такое, что как только $\rho(x_0, x) < \delta$, то $K \subset U_\varepsilon(F(x))$. Покажем, что отображение F полунепрерывно снизу в точке x_0. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Y$. Пусть точка $x_0 \in X$ такая, что $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$. Пусть точка $y_0 \in (F(x_0) \cap V)$. Пусть число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(y_0) \subset V$. Так как точка y_0 является компактом в метрическом пространстве Y, то существует $\delta = \delta(x_0, y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что как только $\rho(x_0, x) < \delta$, то $y_0 \subset U_\varepsilon(F(x))$. Следовательно, для любой точки $x \in U_\delta(x_0)$ пересечение $F(x) \cap V \neq \varnothing$, т.е. отображение F полунепрерывно снизу в точке x_0.

Несложно доказывается следующее утверждение (см., например, [1]).

Предложение 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) F — полунепрерывно снизу;

2) для любого открытого множества $V \subset Y$ полный прообраз этого множества

$$F_\Pi^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \cap V \neq \varnothing\}$$

является открытым множеством в X.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства полунепрерывных снизу многозначных отображений. Эти утверждения являются обобщениями соответствующих утверждений из [1].

Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство.

Лемма 1. *Если многозначное отображение $F: X \to P(Y)$ — полунепрерывно снизу, то выпуклая оболочка $coF: X \to V(Y)$, $(coF)(x) = co(F(x))$, также является полунепрерывным снизу многозначным отображением.*

Доказательство. Обозначим $F_1(x) = coF(x)$. Пусть $V \subset Y$ — произвольное открытое множество, пусть точка $x_0 \in X$ такая, что $F_1(x_0) \cap V \neq \varnothing$. Тогда существует точка $y_0 \in (F_1(x_0) \cap V)$, т.е. $y_0 \in F_1(x_0)$ и $y_0 \in V$.

Так как V — открытое множество, то существует положительное число ε_0 такое, что $U_{\varepsilon_0}(y_0) \subset V$. Поскольку $y_0 \in F_1(x_0)$, то в силу определения выпуклой оболочки множества существует конечное число точек $y_1, \ldots, y_k \in F(x_0)$ таких, что $y_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$, где $\lambda_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Рассмотрим окрестности точек y_i; $U_{\varepsilon_0}(y_i) = U_i$. Покажем, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i U_i \subset U_{\varepsilon_0}(y_0)$. Действительно, пусть произвольные точки $z_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, k$, тогда,

$$z_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i \in \sum_{i=1}^{k} \lambda_i U_i.$$

Оценим

$$\|y_0 - z_0\| = \left\|y_0 - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i (y_i - z_i)\right\| \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \|y_i - z_i\| < \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = \varepsilon_0.$$

Следовательно, $z_0 \in U_{\varepsilon_0}(y_0)$. Это и означает, что $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i U_i \subset U_{\varepsilon_0}(y_0)$.

Рассмотрим теперь множества $V_i = F_{\Pi}^{-1}(U_i)$, $i = 1,\dots,k$. Множество $W = \bigcap_{i=1}^{k} V_i$ — открыто, т.к. V_i - открытые множества. Очевидно, что множество $W \neq \varnothing$, так как точка $x_0 \in W$.

Пусть точка $x \in W$, покажем, что $F_1(x) \cap V \neq \varnothing$. По определению F_{Π}^{-1} имеем: $F(x) \cap U_i \neq \varnothing, i = 1,\dots,k$. Следовательно, существуют точки $z_i \in (F(x) \cap U_i)$. Так как $z_i \in U_i$, то $z_0 = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i \subset \sum_{i=1}^{k}\lambda_i U_i \subset U_{\varepsilon_0}(y_0)$. Поскольку $z_i \in F(x)$, то $z_0 = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i \in coF(x) = F_1(x)$. Следовательно, $F_1(x) \cap U_{\varepsilon_0}(y_0) \neq \varnothing$.

Учитывая,что $U_{\varepsilon_0}(y_0) \subset V$, получаем $F_1(x) \cap V \neq \varnothing$. Это и доказывает, полунепрерывность снизу многозначного отображения F_1.

Лемма 2. *Если многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ — полунепрерывно снизу, то замыкание $\overline{F} : X \to C(Y)$, $(\overline{F})(x) = \overline{F(x)}$, также является полунепрерывным снизу многозначным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Y$ и точку x_0 такую, что $\overline{F}(x_0) \cap V \neq \varnothing$. Тогда существует точка $y_0 \in (\overline{F}(x_0) \cap V)$. Так как множество V — открыто, то найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $U_{\varepsilon_0}(y_0) \subset V$. Так как $y_0 \in \overline{F}(x_0)$, то существует последовательность $\{y_n\} \subset F(x_0)$ такая, что $y_n \to y_0$. Тогда найдется такой номер n_0, что для любого $n \ge n_0$ будет выполнено неравенство: $\|y_n - y_0\| < \varepsilon_0$. Следовательно, $y_n \in U_{\varepsilon_0}(y_0) \subset V$.

Тогда $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$, и существует открытая окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для любой точки $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Так как $F(x) \subset \overline{F}(x)$, то $\overline{F}(x) \cap V \neq \varnothing$. Следовательно, многозначное отображение $\overline{F}$ — полунепрерывно снизу.

Предложение 3. *Если многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ — полунепрерывно снизу, то $\overline{co}F : X \to Cv(Y)$, $(\overline{co}F)(x) = \overline{co}(F(x))$, также является полунепрерывным снизу многозначным отображением.*

Доказательство вытекает из лемм 1 и 2.

Рассмотрим теперь другой класс многозначных отображений. Пусть как и раньше, X и Y — метрические пространства.

Определение 2. *Многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y, V \supset F(x_0)$, существует открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(U) \subset V$. Если F — полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным сверху.*

Предложение 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1) F — полунепрерывно сверху;

2) для любого открытого множества $V \subset Y$ малый прообраз этого множества

$$F_M^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \subset V\}$$

является открытым множеством в X.

Доказательство этого утверждения несложно (см., например, [1]).

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СВЕРХУ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫМИ СНИЗУ

Пусть X, Y — метрические пространства, $F : X \to P(Y)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение.

Определение 3. *Многозначное полунепрерывное снизу отображение $G : X \to P(Y)$ будем называть полунепрерывной снизу ε-аппроксимацией отображения F, если выполнены следующие два условия:*

(i) $F(x) \subset G(x)$ для любого $x \in X$;

(ii) график $\Gamma(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma(F))$.

В этом разделе нас будет интересовать следующая проблема:

пусть многозначное полунепрерывное сверху отображение F имеет образы принадлежащие некоторому семейству подмножеств $A(Y)$ пространства Y. При каких условиях на это семейство существует полунепрерывная снизу ε-аппроксимация отображения F, образы которого также принадлежат этому семейству $A(Y)$?

Дадим следующее определение.

Определение 4. *Семейство подмножеств $A(Y)$ пространства Y будем называть апп-*

роксимационным, если существует отображение $\lambda : P(Y) \to A(Y)$, сопоставляющее произвольному непустому подмножеству из Y некоторое подмножество из семейства $A(Y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

a) для любого $B \in A(Y)$ множество $\lambda(B) = B$;

b) если $B, C \in P(Y)$ и $C \subset B$, то $\lambda(C) \subset \lambda(B)$;

c) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого множества $B \subset Y$ выполнено включение $\lambda(U_\delta(B)) \subset U_\varepsilon(\lambda(B))$;

d) для любого множества $B \subset Y$, любой точки $y \in \lambda(B)$ и любого $\varepsilon > 0$, найдутся компактное подмножество $B' \subset B$ и точка $y' \in \lambda(B')$ такие, что $\rho(y, y') < \varepsilon$.

Аппроксимационные семейства множеств обладают следующими свойствами.

Предложение 5. *Пусть $A(Y)$ — аппроксимационное семейство в пространстве Y. Тогда:*

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $C \in A(Y)$ и $B \subset U_\delta(C)$, то $\lambda(B) \subset U_\varepsilon(C)$;

2) если многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ — полунепрерывно снизу, то многозначное отображение $F^\lambda : X \to A(Y)$, $F^\lambda(x) = \lambda(F(x))$ также полунепрерывно снизу.

Доказательство. Докажем 1. Пусть множество $B \subset U_\delta(C)$, где $C \in A(Y)$. Тогда

$$\lambda(B) \subset \lambda(U_\delta(C)) \subset U_\varepsilon(\lambda(C)) = U_\varepsilon(C).$$

Докажем теперь свойство 2. Пусть V — произвольное открытое множество в Y. Покажем, что полный прообраз $(F^\lambda)^{-1}_\Pi(V)$ является открытым множеством в X. Пусть точка $x_0 \in (F^\lambda)^{-1}_\Pi(V)$, тогда существует точка $y_0 \in (\lambda(F(x_0)) \cap V)$. Рассмотрим положительное число ε_0 такое, что $U_{\varepsilon_0}(y_0) \subset V$.

Пусть положительное число $\delta = \delta(\varepsilon_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ такое, что для любого множества $B \subset Y$ выполнено включение $\lambda(U_\delta(B)) \subset U_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\lambda(B))$. Рассмотрим положительное число $\eta < \delta$. Тогда существует такой компакт K, принадлежащий $F(x_0)$ и такая точка y_0', что $y_0' \in \lambda(K)$ и $\rho(y_0, y_0') < \eta$. Так как отображение F полунепрерывно снизу, то существует положительное число μ такое, что $K \subset U_\eta(F(x))$, как только $\rho(x, x_0) < \mu$. Тогда, если $\rho(x, x_0) < \mu$, то имеем следующие включения:

$$y_0 \in U_\eta(\lambda(K)) \subset U_\eta(\lambda(U_\eta(F(x))) \subset$$
$$\subset U_{\eta + \frac{\varepsilon_0}{2}}(\lambda(F(x))) \subset U_{\varepsilon_0}(\lambda(F(x)).$$

Следовательно, пересечение $U_{\varepsilon_0}(y_0) \cap \cap \lambda(F(x)) \neq \varnothing$. Таким образом, $U_\mu(x_0) \subset (F^\lambda)^{-1}_\Pi(V)$, что и доказывает полунепрерывность снизу многозначного отображения F^λ.

Рассмотрим некоторые примеры аппроксимационных семейств.

Пример 1. Пусть $C(Y)$ — множество замкнутых подмножеств метрического пространства Y. Рассмотрим отображение $\lambda : P(Y) \to C(Y)$, $\lambda(B) = \overline{B}$. Очевидно, что это отображение удовлетворяет условиям a-d, т.е. семейство $C(Y)$ является аппроксимационным семейством.

Пример 2. Пусть Y — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E. Рассмотрим систему $Cv(Y)$ замкнутых выпуклых подмножеств в Y. Это семейство является аппроксимационным. Действительно, в качестве отображения $\lambda : P(Y) \to M(Y)$ рассмотрим отображение, которое каждому множеству $B \subset Y$ сопоставляет множество $\overline{co}(B)$. Нетрудно проверить, что это отображение удовлетворяет условиям a—d.

Пример 3. Пусть T — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E. Пусть Y — метрическое пространство, гомеоморфное T. Пусть $g : T \to Y$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий следующему условию:

существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что для любых $x, y \in T$ справедливы неравенства

$$c_1 \|x - y\| \le \rho(g(x), g(y)) \le c_2 \|x - y\|.$$

Рассмотрим систему множеств

$$A_g(Y) = \{g(B) \mid B \in Cv(T)\}.$$

Предложение 6. *При сделанных предположениях система $A_g(Y)$ является аппраксимационной.*

Доказательство. Для доказательства этого предложения определим отображение $\lambda : P(Y) \to A_g(Y)$ следующим образом,

$$\lambda(C) = g(\overline{co}(g^{-1}(C))).$$

Очевидно, что $\lambda(C) \in A_g(Y)$. Проверим выполнение свойств a—d.

Пусть $B \in A_g(Y)$, тогда $g^{-1}(B) \in Cv(Y)$. Следовательно, $\overline{co}(g^{-1}(B)) = g^{-1}(B)$. Применяя к множеству B отображение λ, получаем:

$$\lambda(B) = g(\overline{co}(g^{-1}(B))) = g(g^{-1}(B)) = B.$$

Это и доказывает свойство a.

Справедливость свойства b очевидна.

Проверим справедливость свойства c. Пусть C — произвольное подмножество в Y, тогда для любой точки $y \in g^{-1}(U_\delta(C))$ существует точка $y' \in g^{-1}(C)$ такая, что

$$c_1 \|y - y'\| \le \rho(g(y), g(y')) < \delta.$$

Следовательно,

$$g^{-1}(U_\delta(C)) \subset U_{\frac{\delta}{c_1}}(g^{-1}(C)).$$

Тогда

$$\overline{co}(g^{-1}(U_\delta(C))) \subset \overline{co}(U_{\frac{\delta}{c_1}}(g^{-1}(C))).$$

Пусть произвольная точка $z \in \overline{co}(g^{-1}(U_\delta(C)))$, тогда для нее существует точка $z' \in \overline{co}(g^{-1}(C))$ такая, что $\|z - z'\| < \frac{\delta}{c_1}$. Тогда

$$\rho(g(z), g(z')) \le c_2 \|z - z'\| < \frac{c_2\delta}{c_1}.$$

Следовательно,

$$g(\overline{co}(g^{-1}(U_\delta(C)))) \subset U_{\frac{c_2\delta}{c_1}}(g(\overline{co}(g^{-1}(C)))).$$

Таким образом,

$$\lambda(U_\delta(C)) \subset U_{\frac{c_2\delta}{c_1}}(\lambda(C)),$$

что и доказывает свойство c.

Несложно проверяется и свойство d.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $A(Y)$ — аппроксимационное семейство подмножеств в метрическом пространстве Y, пусть $F : X \to A(Y)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует полунепрерывная снизу ε-аппроксимация $F_\varepsilon : X \to A(Y)$ такая, что образ $F_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X))$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие понятия.

Пусть X — метрическое пространство, $\sigma = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ — открытое покрытие пространства X. Обозначим $St(x) = \bigcup_{x \in U_\alpha} U_\alpha$ — «звезду» точки x относительно покрытия σ.

Пусть Y — метрическое пространство, $F : X \to P(Y)$ — многозначное отображение. Рассмотрим многозначное отображение $F_\sigma : X \to P(Y)$ построеное по покрытию σ, $F_\sigma(x) = F(St(x))$.

Лемма 3. *Для любого многозначного отображения F отображение F_σ является полунепрерывным снизу.*

Доказательство. Пусть V — открытое множество в пространстве Y, Пусть точка $x_0 \in X$ такая, что $F_\sigma(x_0) \cap V \ne \varnothing$. Тогда найдется точка $y_0 \in F_\sigma(x_0) \cap V$, следовательно, найдется найдется точка $x_1 \in St(x_0)$ такая, что $y_0 \in F(x_1)$. Так как точка $x_1 \in St(x_0)$, то существует элемент покрытия $U_{\alpha_0} \ni x_0, x_1$. Тогда для любой точки $x \in U_{\alpha_0}$ множество $St(x) \ni x_1$. Следовательно, $F_\sigma(x) = F(St(x)) \ni y_0$, т.е. $F_\sigma(x) \cap V \ne \varnothing$, что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее условию **(c)** аппроксимационного семейства. В силу полунепрерывности сверху многозначного отображения F, для любой точки $x \in X$ существует положительное число $\eta(x)$ такое, что для любой точки $x' \in U_{\eta(x)}(x)$ выполнено включение $F(x') \subset U_\delta(F(x))$. Без ограничения общности будем считать, что $0 < \eta(x) < \varepsilon$. Пусть $\mu(x) = \frac{1}{4}\eta(x)$. Рассмотрим открытое покрытие $\{U_{\mu(x)}(x)\}_{x \in X}$ и выберем из него локально конечное подпокрытие $\sigma = \{U_{\mu_j}(x_j)\}_{j \in J}$. Определим многозначное отображение F_ε следующим образом:

$$F_\varepsilon(x) = \lambda(F_\sigma(x)).$$

Покажем, что отображение F_ε и будет искомым отображением.

Действительно, это отображение полунепрерывно снизу, т.к. отображение F_σ полунепрерывно снизу. Также очевидно включение $F(x) \subset F_\sigma(x) \subset F_\varepsilon(x)$ для любой точки $x \in X$.

Покажем, что отображение F_ε удовлетворяет условию (ii) определения полунепрерывной снизу аппроксимации. Пусть x - произвольная точка из X. Тогда звезда этой точки $St(x) = \bigcup_{j=1}^{k} U_{\mu_j}(x_j)$. Пусть $\mu_s = \max_{1 \le j \le k} \mu_j$, тогда $x \in U_{\mu_s}(x_j)$ для любого $j = 1, 2..., k$. Таким образом, $x_j \in U_{2\mu_s}(x_s)$ для любого $j = 1, 2..., k$. Следовательно, $St(x) \subset U_{3\mu_s}(x_s) \subset U_{\eta(x_s)}(x_s)$. В силу определения множества $U_{\eta(x_s)}(x_s)$ для любой точки $x' \in St(x)$ выполнено включение

$$F(x') \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_s).$$

Следовательно, $F_\sigma(x) = F(St(x)) \subset U_\delta(F(x_s)$. В силу свойства 3 аппроксимационного семейства, получаем:

$$F_\varepsilon(x) = l(F_\sigma(x) \subset U_\varepsilon(F(x_s).$$

Так как $\rho(x, x_s) < \eta_s < \varepsilon$, то график $\Gamma(F_\varepsilon) \subset$ $\subset U_\varepsilon(\Gamma(F))$.

Выполнение условия $F_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X))$ вытекает из определения отображения F_ε. Теорема доказана.

3. СИСТЕМЫ МАЙКЛА

Пусть X и Y — метрические пространства, $F : X \to P(Y)$ — некоторое многозначное отображение.

Определение 5. *Непрерывное отображение* $f : X \to Y$ *называется непрерывным сечением многозначного отображения* F, *если для любой точки* $x \in X$ *выполнено включение* $f(x) \in F(x)$.

Справедлива следующая классическая теорема Майкла о существовании непрерывного сечения многозначного отображения [6].

Теорема 2. *Пусть* E — *банахово пространство,* $F : X \to Cv(E)$ — *полунепрерывное снизу многозначное отображение,* A — *замкнутое подмножество в* X. *Если* $f : A \to E$ *непрерывное сечение* $F|_A$, *то у* F *существует непрерывное сечение* $g : X \to E$ *такое, что* $g|_A = f$.

Пусть $M(Y)$ — семейство подмножеств в Y. Дадим следующее определение.

Определение 6. *Будем говорить, что семейство подмножеств* $M(Y)$ *является системой Майкла, если, для любого метрического пространства* X, *полунепрерывного снизу многозначного отображения* $F : X \to M(Y)$, *замкнутого подмножества* $A \subset X$ *и непрерывного сечения* $f : A \to Y$ *многозначного отображения* $F|_A$, *существует непрерывное сечение* $g : X \to Y$ *многозначного отображения* F *такое, что* $g|_A$.

Рассмотрим некоторые примеры систем Майкла.

Пример 4. Пусть E — банахово пространство, Y — замкнутое подмножество в E. Пусть $Cv(Y)$ — множество замкнутых выпуклых подмножеств в Y. Тогда это семейство является системой Майкла. Доказательство этого вытекает из теоремы Майкла.

Пример 5. Пусть E — банахово пространство, T — замкнутое подмножество в E, Y — метрическое пространство, гомеоморфное T. Пусть $g : T \to Y$ - гомеоморфизм этих пространств. Рассмотрим систему множеств

$$M_g(Y) = \{g(A) \mid A \in Cv(T)\}.$$

Нетрудно видеть, что система множеств $M_g(Y)$ также является системой Майкла.

Пример 6. В работе [3] была изучена система подмножеств $M(Y)$ метрического пространства Y, которая описывалась следующей системой аксиом.

1. Множество $Y \in M(Y)$ *и для любой точки* $y \in Y$ *множество* $\{y\} \in M(Y)$.

2. Если $\{A_i\}_{i \in I}$ — *подсистема из* $M(Y)$, *то* $\bigcap_{i \in I} A_i \in M(Y)$.

3. Для любого натурального числа k *и любых точек* $y_1, y_2, ..., y_k \in Y$ *множество*

$$\lambda(y_1, y_2, ..., y_k) = \bigcap \{A \mid A \in M(Y), y_1, y_2, ..., y_k \in A\}$$

является бесконечно связным.

4. Для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что любых* $A \in M(Y)$, *натурального числа* k *и любых точек* $y_1, y_2, ..., y_k \in U_\delta(A)$ *имеем* $\lambda(y_1, y_2, ..., y_k) \subset U_\varepsilon(A)$.

5. Для любых $A \in M(Y)$, $y \in Y$ *и любого* $r > 0$ *множество* $\overline{A \cap B_r[y]} \in M(Y)$.

В работе [3] доказана теорема, которая в нашей терминалогии может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 3. *Если пространство* Y *полно и система множеств* $M(Y)$ *удовлетворяет условиям 1—5, то эта система множеств является системой Майкла.*

В этой работе также приводятся другие примеры систем Майкла.

Очевидно следующее свойство подмножеств, входящих в системы Майкла.

Предложение 6. *Пусть* $M(Y)$ — *ситема Майкла. Если множество* $A \in M(Y)$ *и является замкнутым, то* A — *ретракт пространства* Y.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $F : Y \to M(Y)$ определенное условием: $F(y) = A$ для любой точки $y \in Y$. Очевидно, что это отображение полунепрерывно снизу и его сужение $F|_A$ на множество A имеет непрерывное сечение $f(y) = y$. По определению системы Майкла это сечение непрерывно продолжается на все пространство Y. Полученное сечение и будет искомой ретракцией.

4. СИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ МАЙКЛА

Пусть Y — метрическое пространство, $M(Y)$ — система Майкла в Y.

Определение 7. *Будем говорить, что система подмножеств* $M(Y)$ *является сильной системой Майкла, если эта система одновременно является системой Майкла и аппроксимационным семейством в* Y. *Сильную систему Майкла будем обозначать* $AM(Y)$.

Рассмотрим некоторые примеры сильных систем Майкла.

Пусть Y — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E. Очевидно, что система $Cv(Y)$ замкнутых выпуклых подмножеств в Y является сильной системой Майкла.

Также очевидно, что семейство $M_g(Y)$, описанное в примере 3, также является сильной системой Майкла.

Пример 7. Рассмотрим систему подмножеств $M(Y)$ метрического пространства Y, описанную в примере 6. Рассмотрим отображение $\lambda : P(Y) \to M(Y)$ определенное условием:

$$\lambda(B) = \{x \in \bigcap A' | A' \in M(Y), B \subset A'\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. *Пусть Y — полное метрическое пространство. Пусть семейство подмножеств $M(Y)$ удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. Множество $Y \in M(Y)$ и для любой точки $y \in Y$ множество $\{y\} \in M(Y)$.

2. Если $\{A_i\}_{i\in I}$ — подсистема из $M(Y)$, то $\bigcap_{i\in I} A_i \in M(Y)$.

3. Для любого натурального числа k и любых точек $y_1, y_2, ..., y_k \in Y$ множество

$$\lambda(y_1, y_2, ..., y_k) = \bigcap\{A | A \in M(Y), y_1, y_2, ..., y_k \in A\}$$

является бесконечно связным.

4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого множества $B \subset Y$ выполнено включение $\lambda(U_\delta(B)) \subset U_\varepsilon(\lambda(B))$,

5. Для любых $\overline{A \in M(Y)}$, $y \in Y$ и любого $r > 0$ множество $\overline{A \cap B_r[y]} \in M(Y)$.

6. Для любого множества $B \subset Y$, любой точки $y \in \lambda(B)$ и любого $\varepsilon > 0$, найдутся компактное подмножество $B'_\varepsilon \subset B$ и точка $y' \in \lambda(B')$ такие, что $\rho(y, y') < \varepsilon$.

Тогда система $M(Y)$ является сильной системой Майкла.

Сильные системы Майкла тесно связаны с проблемой существования однозначных ε-аппроксимаций многозначных отображений. Дадим определение.

Определение 8. *Непрерывное однозначное отображение $f : X \to Y$ называется однозначной ε-аппроксимацией многозначного отображения F, если график $\Gamma_X(f)$ отображения f принадлежит ε-окрестности графика $\Gamma_X(F)$ многозначного отображения F.*

Из теоремы 1 и определения сильной системы Майкла вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть многозначное отображение $F : X \to AM(Y)$ полунепрерывно сверху, тогда для любого $\varepsilon > 0$ у F существуют однозначная ε-аппроксимация f_ε и $f_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X))$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Действительно, в силу того, что $AM(Y)$ является аппроксимационным семейством, существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $F_\varepsilon : X \to AM(Y)$ такое, что оно является ε-аппроксимацией отображения F и образ $F_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X))$. В силу того, что $AM(Y)$ является системой Майкла, у отображения F_ε существует непрерывное сечение f_ε, которое и будет искомым отображением.

Из этой теоремы естественно вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть E — банахово пространство, многозначное отображение $F : X \to Cv(E)$ полунепрерывно сверху, тогда для любого $\varepsilon > 0$ у F существуют однозначная ε-аппроксимация f_ε и $f_\varepsilon(X) \subset \overline{co}(F(X))$.*

Это следствие ранее было доказано в [4].

Следствие 2. *Пусть Y и семейство множеств $M_g(Y)$ такие же, как и в примере 5. Пусть многозначное отображение $F : X \to \to M_g(Y)$ полунепрерывно сверху, тогда для любого $\varepsilon > 0$ у F существуют однозначная ε-аппроксимация f_ε и $f_\varepsilon(X) \subset g(\overline{co}(g^{-1}(F(X))))$.*

Следствие 3. *Пусть Y и семейство множеств $M(Y)$ такие же, как и в предложении 7. Пусть многозначное отображение $F : X \to M(Y)$ полунепрерывно сверху, тогда для любого $\varepsilon > 0$ у F существуют однозначная ε-аппроксимация f_ε и $f_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X)$, где $\lambda(F(X)) = \{x \in \bigcap A' \mid A' \in M(Y), F(X) \subset A'\}$.*

Теорема 5. *Пусть Y — метрическое пространство, A — замкнутое подмножество в Y, $AM(Y)$ — сильная система Майкла в Y. Если многозначное отображение $F : X \to AM(Y)$ — полунепрерывно сверху и отображение $f : A \to Y$ является непрерывным сечением многозначного отображения $F|_A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-аппроксимация f_ε такая, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для любой точки $x \in A$ и $f_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X))$.*

Доказательство.

Пусть $F_\varepsilon : X \to AM(Y)$ — многозначная полунепрерывная снизу ε-аппроксимация, существующая в силу теоремы 1. Так как отображение F_ε является полунепрерывным снизу и $AM(Y)$ — сильная система Майкла в Y, то у F_ε существует непрерывное однозначное сечение, которое является непрерывным продолжением f. Очевидно, что это сечение и будет искомым отображением f_ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.
2. *Гельман Б.Д.* Однозначные сечения и аппроксимации многозначных отображений.//Вестник ВГУ, серия физика, математика, 2002, № 2.
3. *Gyrniewicz L., Marano S.A., Ślosarski M.* Fixed points of contractive multivalued maps// Proc. Amer. Math. Soc., 1996, V. 124, P. 2675—2683.
4. *Cellina A.* Approximation of set-valued functions and fixed-point theorems// Ann. math. Pura. Appl., 1969, V. 82, P. 17—24.
5. *Repovs D., Semenov P.V.* Continuous Selections of Multivalued Mappings. Mathematics and its Applications № 455, Kluwer, Dordrecht, 1998.
6. *Michael E.* Continuous selections, 1// Ann. of Math., 1956, V. 63, № 2, P. 361—382.
7. *Щепин Е.В., Бродский Н.Б.* Селекторы фильтраций многозначных отображений// Труды мат. инст. Стеклова, В. 212, С. 220—240.