УДК 531.36

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2003 Д. Г. Есипенко, В. В. Стрыгин

Воронежский государственный университет

Рассмотрена краевая задача для сингулярно возмущенной системы с быстрыми и медленными переменными и осциллирующими параметрами. Предложен метод, позволяющий строить высшие асимптотические приближения решения краевых задач такого вида, основанный на методах усреднения и пограничных функций. Показано, что при достаточно малых значениях параметра решение равномерно аппроксимируется суммой плавной, осциллирующей и двух пограничных составляющих.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, метод усреднения первоначально возник в связи с задачами небесной механики и позже был применен Ван-дер-Полем для анализа задач радио - и электротехники. Важным этапом в развитии метода усреднения стала работа Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1], основанная на идеях автономизации системы. Позднее Ю. А. Митропольский [2] показал, как строить высшие асимптотические приближения. В дальнейшем идеи Ю. А. Митропольского были развиты Л. М. Перко [3] для исследования систем с условно-периодическими коэффициентами. В [4, 5] В. В. Стрыгин предложил простую схему построения приближённого решения в виде ряда $x = u_0(\xi) + \varepsilon\{u_1(\xi) + v_1(\xi,t)\} + \dots,\ \ \xi = \varepsilon t$.

В работе [6] авторами был выделен новый класс задач, описываемый сингулярно возмущенными уравнениями с быстро осциллирующими коэффициентами и возникающий при описании некоторых гироскопических систем. Разработана методика построения асимптотических разложений решений начальных задач для систем такого рода. Было показано, что при достаточно малых значениях параметра решение начальной задачи равномерно аппроксимируется суммой плавной, осциллирующей и погранслойной составляющих.

Предметом рассмотрения в данной работе является краевая задача для сингулярно возмущенных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Развивая далее идеи работ [6, 7], построено асимптотическое разложение решения краевой задачи и проведено обоснование асимптотического характера полученного приближения.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символ $\mathcal{A}_\omega^N(G;\mathbb{R}^n)$ ($\omega \in \mathbb{Z}^k$ — фиксированный вектор) будет обозначать множество отображений $f : G\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде $f(x,\tau) = F(x,\omega\tau)$, где отображение $F(x,\eta)$ 2π-периодично по $\eta_1,\dots,\eta_k$ для любого $x \in G$ и, кроме того, при $j = 0,1,\dots,N$, $p = 0, 1, 2,\dots$, производные Фреше $F_{x\eta}^{(j)(p)}(x,\eta)$ являются непрерывными отображениями переменных (x,η) в соответствующее пространство полилинейных отображений. Функции класса $\mathcal{A}_\omega^N(G;\mathbb{R}^n)$ называют условно-периодическими.

Будем говорить, что вектор $\omega \in \mathbb{Z}^k$ является нерезонансным [3], если найдутся такие константы $\gamma,\ \beta > 0$, что $|(l,\omega)| \ge \gamma |l|^{-\beta}$ для всех $l \in \mathbb{Z}^k, l \ne 0$. Везде ниже будем предполагать, что ω — нерезонансный вектор.

Пусть $f \in \mathcal{A}_\omega^N(G;\mathbb{R}^n)$. Введем в рассмотрение следующие операторы: $M_\tau[f](x) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau)d\tau$,

$$K_\tau[f](x,\tau) = f - M_\tau[f],\ \ I_\tau[f](x,\tau) = \int_0^\tau f(x,s)ds.$$

Лемма 1. *Оператор M_τ действует из $\mathcal{A}_\omega^N(G;\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{C}^N(G;\mathbb{R}^n)$; операторы K_τ, $I_\tau K_\tau$ действуют из $\mathcal{A}_\omega^N(G;\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{A}_\omega^N(G;\mathbb{R}^n)$.*

Будем говорить, что функция $\varphi \in C([0,+\infty);\mathbb{R}^m)$ является погранслойной на $[0,+\infty)$, если найдутся константы $c>0, æ>0$ (фиксированные для конкретной φ), такие что при всех $\tau \in [0,\infty)$ справедлива оценка $\|\varphi(\tau)\|\,|_{\mathbb{R}^m} \le ce^{-æ\tau}$. Символ $P_+(\mathbb{R}^m)$ далее будет обозначать класс таких функций. Аналогично $P_-(\mathbb{R}^n)$ будет обозначать класс погранслойных функций на $[0,-\infty)$.

Пусть $\varphi \in P_+(\mathbb{R}^n)$. Определим интегральный оператор J_τ^+, полагая $J_\tau^+[\varphi] = -\int_\tau^\infty \varphi(s)ds.$ Аналогично определяется оператор J_τ^- на множестве $P_-(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. $J_\tau^+ : P_+(\mathbb{R}^n) \to P_+(\mathbb{R}^n);\ J_\tau^- : P_-(\mathbb{R}^n) \to P_-(\mathbb{R}^n)$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,\tau);$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = C(x)y + D(x,\tau) = F(x,y,\tau) \tag{1}$$

со следующими краевыми условиями

$$x(0,\varepsilon)=\alpha; y^j(0,\varepsilon)=\beta^j,\ j=1,\dots,k;$$
$$y^j(1,\varepsilon)=\beta^j,\ j=k+1,\dots,m. \tag{2}$$

Здесь ε — малый положительный параметр, $\tau = t/\varepsilon$ — быстрое время, $t\in[0,1]$. Пусть выполнены следующие требования.

I. $C \in \mathbf{C}^{N+1}(G_1;M_{m,m}),\ D \in \mathcal{A}_\omega^{N+1}(G_1;\mathbb{R}^m)$, $f \in \mathcal{A}_\omega^{N+1}(G_1\times G_2;\mathbb{R}^n)$; все производные функции $f(x,y,\tau)$ по y непрерывны в $G_1\times G_2\times[0,\infty)$. Здесь $G_1 \subset \mathbb{R}^n, G_2\subset\mathbb{R}^m$ — открытые выпуклые области.

II. Спектр $\{\lambda_j(x)\}, j=1,\dots,m$ матрицы $C(x)$ при каждом $x\in G_1$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\lambda_i(x)\ne\lambda_j(x)$, $i\ne j, i,j=1,\dots,m;$

б) $Re\lambda_i(x)<0$, $i=1,\dots,k$, $Re\lambda_i(x)>0$, $i=k+1,\dots,m.$

III. Пусть матрица $B(x)=\begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x)\\ B_{21}(x) & B_{12}(x)\end{pmatrix}$ образована из собственных векторов матрицы $C(x)$. Здесь $B_{11}(x)$ обозначает блок размера $k\times k$, а $B_{22}(x)$ — блок размера $(m-k)\times(m-k)$. Предположим, что $det(B_{11}(x))\ne 0,\ det(B_{22}(x))\ne 0$ при $x\in G_1$.

Асимптотику решения задачи (1)—(2) будем искать в виде

$$x_N = u(t,\varepsilon)+v(t,\tau,\varepsilon)+\pi(\tau,\varepsilon)+q(\tau_1,\varepsilon), \tag{3}$$

$$y_N = U(t,\varepsilon)+V(t,\tau,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon)+Q(\tau_1,\varepsilon), \tag{4}$$

где $\tau_1=(t-1)/\varepsilon$;
а $u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\dots+\varepsilon^N u_N(t)+\varepsilon^{N+1}b$,
$U(t,\varepsilon)=U_0(t)+\varepsilon U_1(t)+\dots+\varepsilon^N U_N(t)$ — регулярные ряды;
$v(t,\tau,\varepsilon)=\varepsilon v_1(t,\tau)+\varepsilon^2 v_2(t,\tau)+\dots+\varepsilon^N v_N(t,\tau)+\varepsilon^{N+1}v_{n+1}(t,\tau)$, $V(t,\tau,\varepsilon)=V_0(t,\tau)+\varepsilon V_1(t,\tau)+\dots+\varepsilon^N V_N(t,\tau)$ — вибрационные ряды условно-периодических функций, имеющих нулевое среднее, т. е. $M_\tau[v_i]=0, M_\tau[V_i]=0$ для всех i;
$\pi(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\pi_1(\tau)+\varepsilon^2\pi_2(\tau)+\dots+\varepsilon^N\pi_N(\tau)+\varepsilon^{N+1}\pi_{N+1}(\tau)$,
$\Pi(\tau,\varepsilon)=\Pi_0(\tau)+\varepsilon\Pi_1(\tau)+\dots+\varepsilon^N\Pi_N(\tau)$ — пограничные ряды в окрестности $t=0$; наконец,
$q(\tau_1,\varepsilon)=\varepsilon q_1(\tau_1)+\varepsilon^2 q_2(\tau_1)+\dots+\varepsilon^N q_N(\tau_1)+\varepsilon^{N+1}q_{N+1}(\tau_1)$, $Q(\tau_1,\varepsilon)=Q_0(\tau_1)+\varepsilon Q_1(\tau_1)+\dots+\varepsilon^N Q_N(\tau_1)$ — пограничные ряды в окрестности $t=1$.

Для определения коэффициентов разложения подставим (3), (4) в (1), (2). Получим

$$\frac{du}{dt}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\pi}{d\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dq}{d\tau_1}= = f(u+v+\pi+q, U+V+\Pi+Q,\tau), \tag{5}$$

$$\varepsilon\frac{dU}{dt}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial\tau}+\frac{d\Pi}{d\tau}+\frac{dQ}{d\tau_1}= = F(u+v+\pi+q, U+V+\Pi+Q,\tau). \tag{6}$$

Далее, как это делалось в работе [7], введем функции $\bar f$, Πf, Qf, полагая

$$\bar f(t,\tau,\varepsilon)=f(u(t,\varepsilon)+v(t,\tau,\varepsilon),U(t,\varepsilon)+V(t,\tau,\varepsilon),\tau);$$
$$\Pi f(\tau,\varepsilon)=f(u(\varepsilon\tau,\varepsilon)+v(\varepsilon\tau,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\pi(\tau,\varepsilon),U(\varepsilon\tau,\varepsilon)+V(\varepsilon\tau,\tau,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon),\tau)-$$
$$-f(u(\varepsilon\tau,\varepsilon)+v(\varepsilon\tau,\tau,\varepsilon),U(\varepsilon\tau,\varepsilon)+V(\varepsilon\tau,\tau,\varepsilon),\tau);$$
$$Qf(\tau_1,\varepsilon)=f(u(1+\varepsilon\tau_1,\varepsilon)+v(1+\varepsilon\tau_1,1/\varepsilon+\tau_1,\varepsilon)+$$
$$+q(\tau_1,\varepsilon),U(1+\varepsilon\tau_1,\varepsilon)+V(1+\varepsilon\tau_1,1/\varepsilon+\tau_1,\varepsilon)+$$
$$+Q(\tau_1,\varepsilon),1/\varepsilon+\tau_1)-f(u(1+\varepsilon\tau_1,\varepsilon)+$$
$$+v(1+\varepsilon\tau_1,1/\varepsilon+\tau_1,\varepsilon),U(1+\varepsilon\tau_1,\varepsilon)+$$
$$+V(1+\varepsilon\tau_1,1/\varepsilon+\tau_1,\varepsilon),\varepsilon).$$

В точности аналогично (заменой f на F) вводятся функции $\bar F$, ΠF и QF для правой части (6). Теперь, пренебрегая величинами порядка $O(exp\{-1/\varepsilon\})$, перепишем (5), (6) в виде

$$\frac{du}{dt}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\pi}{d\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dq}{d\tau_1}=\bar f+\Pi f+Qf, \quad (7)$$

$$\varepsilon\frac{dU}{dt}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{d\Pi}{d\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ}{d\tau_1}= =\bar F+\Pi F+QF. \quad (8)$$

Разложим $\bar f$ по степеням ε: $\bar f=\bar f_0+\varepsilon \bar f_1+\ldots$. Аналогичные выражения получаются для $\Pi f, Qf, \bar F, \Pi F, QF$.

Так как ряды $v(t,\tau,\varepsilon)$ и $V(t,\tau,\varepsilon)$ условно-периодические, таким же свойством будут обладать коэффициенты разложения $\bar f_0$, $\bar F_0$, $\bar f_1$, $\bar F_1,\ldots$. Поэтому, воспользовавшись операторами M_τ, K_τ, разделим плавные и вибрационные компоненты $\bar f$ и $\bar F$:

$$\bar f=M_\tau[\bar f_0]+K_\tau[\bar f_0]+\varepsilon\{M_\tau[\bar f_1]+K_\tau[\bar f_1]\}+\ldots;$$

$$\bar F=M_\tau[\bar F_0]+K_\tau[\bar F_0]+\varepsilon\{M_\tau[\bar F_1]+K_\tau[\bar F_1]\}+\ldots.$$

Приравняем теперь в (7), (8) коэффициенты при одинаковых степенях ε^i, $i=0,1,\ldots,N$, разделяя регулярные, вибрационные и погранслойные компоненты (далее $v_0\equiv 0, \pi_0\equiv 0, q_0\equiv 0$, $U_{-1}\equiv 0$, $V_{-1}\equiv 0$).

$$\frac{du_i}{dt}=M_\tau[\bar f_i], \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \tau}=K_\tau[\bar f_i]-\frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\frac{d\pi_{i+1}}{d\tau}=\Pi_i f, \frac{dq_{i+1}}{d\tau_1}=Q_i f,$$

$$M_\tau[\bar F_i]-\frac{dU_{i-1}}{dt}=0, \frac{\partial V_i}{\partial \tau}=K_\tau[\bar F_i]-\frac{\partial V_{i-1}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{d\Pi_i}{d\tau}=\Pi_i F, \frac{dQ_i}{d\tau_1}=Q_i F.$$

Отсюда для определения начального приближения имеем:

$$\frac{du_0}{dt}=M_\tau[f(u_0(t),U_0(t)+V_0(t,\tau),\tau)]; \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau}=K_\tau[f(u_0(t),U_0(t)+V_0(t,\tau),\tau)]; \quad (12)$$

$$\frac{d\pi_1}{d\tau}=f(u_0(0),U_0(0)+V_0(0,\tau)+\Pi_0(\tau),\tau)- -f(u_0(0),U_0(0)+V_0(0,\tau),\tau); \quad (13)$$

$$\frac{dq_1}{d\tau_1}=f(u_0(1),U_0(1)+V_0(1,1/\varepsilon+\tau_1)+ +Q_0(\tau_1),1/\varepsilon+\tau_1)-f(u_0(1),U_0(1)+ +V_0(1,1/\varepsilon+\tau_1),1/\varepsilon+\tau_1); \quad (14)$$

$$C(u_0(t))U_0(t)+M_\tau[D(u_0(t),\tau)]=0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau}=C(u_0(t))V_0(t,\tau)+K_\tau[D(u_0(t),\tau)]; \quad (16)$$

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau}=C(u_0(0))\Pi_0; \frac{dQ_0}{d\tau_1}=C(u_0(1))Q_0. \quad (17)$$

Систему (11)—(17) естественно дополнить следующими условиями

$$u_0(0)=\alpha; \quad (18)$$

$$M_\tau[v_1]=0; \quad M_\tau[V_0]=0; \quad (19)$$

$$\pi_1\in P_+(\mathbb{R}^n); \quad q_1\in P_-(\mathbb{R}^n); \quad (20)$$

$$\Pi_0^j(0)=\beta^j-U_0^j(0)-V_0^j(0,0),\ j=1,\ldots,k, \quad \Pi_0\in P_+(\mathbb{R}^m); \quad (21)$$

$$Q_0^j(0)=\beta^j-U_0^j(0)-V_0^j(0,0),\ j=k+1,\ldots,m, \quad Q_0\in P_-(\mathbb{R}^m); \quad (22)$$

Искомые функции $u_0, v_1, \pi_1, q_1, U_0$, V_0, Π_0, Q_0 будем определять следующим образом.

1) Считая $u_0\in G_1$ параметром из (15), находим

$$U_0(u_0)=-C^{-1}(u_0)M_\tau[D(u_o,\tau)].$$

Позднее мы уточним функцию U_0.

2) Из (16), учитывая (19), находим $V_0(u_0,\tau)\in \mathcal{A}_\omega^{N+1}(G_1;\mathbb{R}^m)$.

Предположим далее, что в дополнение к условиям I, II выполнены следующие требования:

IV а) при $u_0\in G_1, \tau\in[0,\infty), U_0(u_0)+V_0(u_0,\tau)\in G_2$;

IV б) задача (11), (18) имеет единственное решение $u_0:[0,1]\to G_1$;

IV в) $Re\lambda_1(u_0(t))\le Re\lambda_2(u_0(t))\le\ldots\le Re\lambda_m(u_0(t))$ при $t\in[0,1]$.

3) Пусть функция $u_0(t)$ определена. Теперь мы можем уточнить U_0 и V_0, полагая $U_0(t)=U_0(u_0(t))$, $V_0(t,\tau)=V_0(u_0(t),\tau)$.

4) Далее, из (12), (19) имеем $v_1=K_\tau I_\tau K_\tau[f(u_0(t),U_0(t)+V_0(t,\tau),\tau)]$, и $v_1\in \mathcal{A}_\omega^{N+1}([0,T];\mathbb{R}^n)$ в силу леммы 1.

5) Функции $\Pi_0\in P_+(\mathbb{R}^m)$ и $Q_0\in P_-(\mathbb{R}^m)$ однозначно определяются из (17), (21), (22). Пусть при $\tau\in[0,\infty)$ справедливо условие

IV г) $\Pi_0(0)+U_0(\alpha)+V_0(\alpha,\tau)\in G_2$, $Q_0(1)+ +U_0(u_0(1))+V_0(u_0(1),\tau)\in G_2$.

6) Наконец, из (13), (14), учитывая (20) и лемму 2, пользуясь операторами J_τ^+, J_τ^-, однозначно находим $\pi_1(\tau)$, $q_1(\tau_1)$.

Этим построение нулевого приближения завершено. Действуя аналогично, из уравнений (9)—(10) последовательно при $i=1,2,\ldots,N$

сможем определить $u_i \in \mathbf{C}^{N+2-i}([0,1];\mathbb{R}^n)$, $v_{i+1} \in \mathcal{A}_\omega^{N+1-i}([0,1];\mathbb{R}^n)$, $\pi_{i+1} \in P_+(\mathbb{R}^n)$, $q_{i+1} \in P_-(\mathbb{R}^n)$, $U_i \in \mathbf{C}^{N+1-i}([0,1];\mathbb{R}^m)$, $V_i \in \mathcal{A}_\omega^{N+1-i}([0,1];\mathbb{R}^m)$, $\Pi_i \in P_+(\mathbb{R}^m)$, $Q_i \in P_-(\mathbb{R}^m)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I — IV. Тогда найдутся константы* $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *краевая задача (1)—(2) имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\|x(t,\varepsilon) - x_N(t,\varepsilon)\|_{\mathbf{C}_{[0,1]}} + \|y(t,\varepsilon) - y_N(t,\varepsilon)\|_{\mathbf{C}_{[0,1]}} \le C\varepsilon^{N+1},$$

где C *не зависит от* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. (Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики.) — Киев: Изд-во АН УССР, 1937, 364 с.

2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971, 440 с.

3. *Perko L. M.* Higher Order Averaging and Related Methods for Perturbed Periodic and Quasi-Periodic Systems. // SIAM. J. Appl. Math., 1968, Vol. 17, № 4, P. 698—724.

4. *Стрыгин В. В.* Об одной модификации метода усреднения при отыскании высших приближений. // ПММ, 1984, Т. 48, Вып. 6, С. 1042—1045.

5. *Стрыгин В. В.* Об асимптотическом интегрировании уравнений движения механических систем, находящихся под воздействием быстро осциллирующих сил. // ПММ, 1989, Т. 53, Вып. 3, С. 518—519.

6. *Стрыгин В. В., Есипенко Д. Г.* Гибридный метод построения асимптотики для нелинейной сингулярно возмущенной задачи Коши с быстро осциллирующими условно-периодическими коэффициентами. // Дифференц. уравнения, 1998, № 3, Т. 34, С. 320—325.

7. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973, 272 с.