

УДК 519.6:532.542

К ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССАХ

© 2003 И. Ю. Бутусов, Ю. М. Бутусов

Воронежский государственный университет

Предлагается метод синтеза и анализа гидравлических цепей при неустановившемся течении несжимаемой жидкости.

Рассматривается гидравлическая цепь (г.ц.), являющаяся совокупностью устройств и соединяющих их трубопроводов, по которым течет несжимаемая жидкость при постоянной температуре; течение одномерное, параметры г.ц. сосредоточены.

При математическом моделировании г.ц. изображается в виде орграфа [1]. Трубопроводы вместе с регулирующими органами и насосами, установленными на них, изображаются в виде ветвей, образующих множество. Начальные и конечные точки ветвей — это узлы, которые образуют два множества: множество источников и потребителей — внешних узлов, множество точек ветвлений — внутренних узлов, в которых соединяются трубопроводы.

В результате изменения с течением времени давлений у источников и потребителей, функционирования регулирующих органов и насосов в г.ц. происходят переходные процессы: давления во внутренних узлах изменяются, течение жидкости становится нестационарным.

Уравнение нестационарного течения жидкости для ветви с номером « i » с учетом направления течения имеет вид [3].

$$f^{(i)} \dot{G}^{(i)} = P^{(q)} - P^{(r)} + P_h^{(i)} - c^{(i)} G^{(i)} |G^{(i)}|, \quad (1)$$

$$f^{(i)} = \int_{(q)}^{(r)} \frac{d\ell}{S^{(i)}(\ell)}.$$

Здесь $G^{(i)}$ — величина массового расхода жидкости в единицу времени, точкой сверху обозначена первая производная по времени; $P^{(q)}$ и $P^{(r)}$ — давления в узлах с номерами « q » и « r », которые соединяет ветвь; $P_h^{(i)}$ — напор насоса с учетом разности высот узлов ветви

(в единицах давления), $c^{(i)}$ — гидравлическое сопротивление (с учетом регулирующих органов); ℓ — длина вдоль средней линии трубопровода, $S^{(i)}(\ell)$ — площадь поперечного сечения трубопровода. Начальное значение величины $G^{(i)}$ задано.

Для каждого внутреннего узла г.ц. имеет место закон сохранения массы:

$$\sum_{i=1}^{N_r} G^{(i)} = 0, \quad (2)$$

где N_r — число ветвей, сходящихся в узле с номером « r ». Из (2) следует

$$\sum_{i=1}^{N_r} \dot{G}^{(i)} = 0. \quad (3)$$

Связь между внутренними узлами г.ц. и сходящимися в них ветвями устанавливает матрица A — матрица совпадений узлов и ветвей [2, 5]. Номера строк матрицы A являются номерами внутренних узлов, номера столбцов являются номерами ветвей. Элементами матрицы A являются величины: $-1, 1, 0$. Если по ветви с номером « i » жидкость вытекает из узла с номером « q », то соответствующий элемент матрицы A имеет значение 1 ; если же жидкость втекает в этот узел, то соответствующий элемент матрицы A имеет значение -1 ; если ветвь не соединена с рассматриваемым внутренним узлом, то соответствующий элемент матрицы A равен нулю; число строк матрицы равно числу внутренних узлов N_u , число столбцов равно числу ветвей N .

Номера внешних узлов и соответствующих давлений совпадают с номерами связанных с ними ветвей. Давления во внутренних узлах имеют нижний индекс « a ». На рисунке приведена в качестве примера г.ц., содержащая

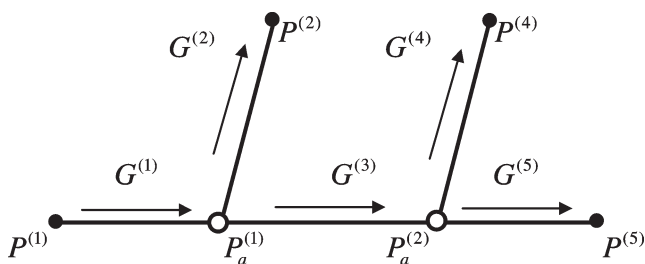


Рис.

пять ветвей, для каждой из которых указаны расходы G и направления течения; имеется два внутренних узла, обозначенные кружками, и четыре внешних узла, для которых указаны давления. Для этой г.ц.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения типа (2) следующие

$$\begin{aligned} -G^{(1)} + G^{(2)} + G^{(3)} &= 0, \\ -G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} &= 0. \end{aligned}$$

С использованием матрицы A закон сохранения массы для всех внутренних узлов г.ц. записывается следующим образом:

$$A \times G = 0, \quad (4)$$

откуда следует

$$A \times \dot{G} = 0. \quad (5)$$

Здесь G и \dot{G} векторы с составляющими $G^{(i)}$ и $\dot{G}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Преобразуем систему уравнений (1) ($i = 1, 2, \dots, N$) так, чтобы получить систему уравнений относительно величин $P_a^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N_r$). С этой целью введем матрицу F , векторы B и D .

Матрица F имеет структуру матрицы A^T (A^T — транспонированная матрица A), количество строк и столбцов у этих матриц одинаково, элементы со значением нуль у них совпадают. На местах элементов со значениями -1 и 1 матрицы A^T в матрице F имеются элементы со значениями $-1/f^{(i)}$ и $1/f^{(i)}$ соответственно (i — номер строки). При всех $f^{(i)} = 1$ $F = A$. Для рассматриваемого примера г.ц. матрица F имеет пять строк и два столбца со следующими элементами:

столбец № 1 $-1/f^{(1)}, 1/f^{(2)}, 1/f^{(3)}, 0, 0$;

столбец № 2 $0, 0, 1/f^{(3)}, 1/f^{(4)}, 1/f^{(5)}$.

Вектор D имеет составляющие $\pm p^{(i)} / f^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Знак плюс стоит в том случае, если по соответствующей ветви происходит приток жидкости к потребителю; знак минус стоит в том случае, если происходит отток жидкости от источника; если ветвь соединена только с внутренними узлами, тогда соответствующая составляющая вектора D равна нулю. Для рассматриваемого примера г.ц. составляющими вектора D являются следующие величины: $-P^{(1)}/f^{(1)}, P^{(2)}/f^{(2)}, 0, P^{(4)}/f^{(4)}, P^{(5)}/f^{(5)}$.

Вектор B имеет следующие составляющие: $b^{(i)} = (c^{(i)}G^{(i)} / G^{(i)} - P_h^{(i)}) / f^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

В результате из (1) ($i = 1, 2, \dots, N$) получаем

$$\dot{G} = F \times P_a - (B + D), \quad (6)$$

и из (5) следует

$$A \times F \times P_a = A \times (B + D). \quad (7)$$

Величины $P_a^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N_r$), составляющие вектора P_a , определяются из матричного уравнения (7). При проведении расчетов для конкретной г.ц. матрица A определена, задаются величины: $f^{(i)}$ и $c^{(i)}$, $P_h^{(i)}$, $P^{(i)}$ (постоянные или явные функции времени); для начального момента времени задаются значения величины $G^{(i)}$. Таким образом, для начального момента времени значения всех величин, входящих в правую часть (7), и элементы матрицы F определены. Значения величин $P_a^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N_r$), которые являются составляющими вектора P_a , определяются в результате решения системы линейных алгебраических уравнений (7). После этого из (6) определяются значения $\dot{G}^{(i)}$ для начального момента времени. Величины приращений $\Delta G^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), соответствующих шагу по времени Δt , могут быть определены численным интегрированием по методу Эйлера

$$\Delta G^{(i)} = \dot{G}^{(i)} \Delta t. \quad (8)$$

После этого производится переход к следующему моменту времени и весь процесс расчета повторяется.

Так как после решения (7) определяются значения величин $\dot{G}^{(i)}$ из (6), то возможно реализовать и метод Рунга-Кутты для численного решения системы (1) ($i = 1, 2, \dots, N$).

Рассмотрим метод дробно-линейной аппроксимации для численного интегрирования

уравнения (1), модельным для которого на небольшом интервале времени Δt является уравнение Риккати

$$f\dot{y} = -Py^2 + Qy + R, \quad (9)$$

где, вообще, f , P , Q и R — функции времени, $f \neq 0$.

Общее решение уравнения (9) можно представить в следующем виде [4]

$$y(t) = [C\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] / [C\psi_1(t) + \psi_2(t)], \quad (10)$$

где φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 — дифференцируемые функции.

Величина C — постоянная, определяемая из начального условия. Если начальный момент времени t_j , то

$$C = [\varphi_2(t_j) - y(t_j)\psi_2(t_j)] / [y(t_j)\psi_1(t_j) - \varphi_1(t_j)]. \quad (11)$$

После дифференцирования величины C по времени и сравнения полученного уравнения с (9) получаем:

$$f = -\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1; \quad P = \psi_1\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1\psi_2;$$

$$Q = -\dot{\varphi}_1\psi_2 + \varphi_1\dot{\psi}_2 + \dot{\varphi}_2\psi_1 - \varphi_2\dot{\psi}_1; \quad R = -\varphi_1\dot{\varphi}_2 + \varphi_2\dot{\varphi}_1.$$

Из (10) имеем

$$y(t_j + \Delta t) = \frac{[C\varphi_1(t_j + \Delta t) + \varphi_2(t_j + \Delta t)]}{[C\psi_1(t_j + \Delta t) + \psi_2(t_j + \Delta t)]}.$$

Для малого значения Δt используем представление:

$$\varphi_1(t_j + \Delta t) = \varphi_1(t_j) + \dot{\varphi}_1(t_j)\Delta t,$$

$$\varphi_2(t_j + \Delta t) = \varphi_2(t_j) + \dot{\varphi}_2(t_j)\Delta t,$$

$$\psi_1(t_j + \Delta t) = \psi_1(t_j) + \dot{\psi}_1(t_j)\Delta t,$$

$$\psi_2(t_j + \Delta t) = \psi_2(t_j) + \dot{\psi}_2(t_j)\Delta t.$$

После подстановки сюда (11) и использования полученных выше выражений для величин f , P , Q , R имеем:

$$y(t_j + \Delta t) = \frac{[f \cdot y(t_j) + R\Delta t] + (1 - \alpha)Qy(t_j)\Delta t}{[f + P \cdot y(t_j)\Delta t] - \alpha Q\Delta t},$$

где $\alpha = 0$ при $Q \geq 0$, $\alpha = 1$ при $Q < 0$.

Используя это представление приближенного решения уравнения Риккати, получаем для $\Delta y = y(t_j + \Delta t) - y(t_j)$.

$$\Delta y / \Delta t = \frac{[-Py^2(t_j) + Qy(t_j) + R]}{[f + Py(t_j)\Delta t - \alpha Q\Delta t]}.$$

Используя этот результат для численного дифференцирования уравнения (1), имеем:

$$\Delta G^{(i)} / \Delta t = \frac{[P^{(q)} - P^{(r)} + P_h^{(i)} - c^{(i)}G^{(i)} |G^{(i)}|]}{[f^{(i)} + c^{(i)} |G^{(i)}| \Delta t]}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что при замене величин $f^{(i)}$ на величины $f^{(i)} + c^{(i)} |G^{(i)}| \Delta t$ в (6), (7) можно пользоваться выражением (8). Как показали расчеты шаг интегрирования при этом значительно увеличивается.

Таким образом, получены алгоритмы для синтеза гидравлических цепей с целью математического моделирования переходных процессов в них; алгоритмы апробированы при dG/dt до 5 кг/с за секунду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валюхов С.Г., Гельман Б.Д., Григорьев С.В., Минин Л.А., Орлов В.П. Геометрические методы в теории гидравлических цепей. — Воронеж: ВГУ, 1999. — 126 с.
2. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. — М.: Наука, 1985. — 278 с.
3. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. — Л.: Машиностроение, 1976. — 504 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 468 с.
5. Хасилев В.Я. Элементы теории гидравлических цепей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1964. — С. 69—88.