

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ РИТЦЕВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ БИФУРКАЦИЙ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

© 2003 А. Ю. Борзаков, А. А. Лемешко, Ю. И. Сапронов

Воронежский государственный университет

На основе нелокальной вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта и его обобщений в виде нелинейных ритцевских аппроксимаций функционалов действий описан подход к разработке алгоритмов нелокального анализа нелинейных вариационных задач математической физики.

Основные достоинства предложенного подхода — возможность достижения сколь угодно большой точности аппроксимации экстремалей при априори зафиксированном наборе базисных функций (или, что эквивалентно, при априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы) и принципиальная возможность осуществления компьютерного сопровождения, сочетающего возможности символьных преобразований и высокоэффективных реализаций стандартных численных процедур в современных математических экспертных системах (типа Mathematica, Maple и др.).

Дано также теоретическое обоснование подходу в вопросе равномерной C^r -сходимости приближенных решений по параметрам (вместе с производными по параметрам до порядка $r \geq 1$). Рассмотрены также случаи точно интегрируемых уравнений.

Приведены иллюстрирующие примеры.

ВВЕДЕНИЕ

В статье описан подход к нелокальному анализу бифуркаций экстремалей, основанный на нелокальной вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта. Основное достоинство предложенного подхода — возможность достижения сколь угодно большой точности аппроксимации экстремалей при априори зафиксированном наборе базисных функций или, что эквивалентно, при априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. Показано, что данный подход может служить основой для вычисления обобщенных ритцевских аппроксимаций экстремалей и для создания алгоритмов компьютерного сопровождения бифуркационного анализа.

Мысль о том, что многие физические эффекты в системах с бесконечным числом степеней свободы допускают адекватное качественное описание на основе конечного набора существенных (поведенческих) переменных высказывалась в той или иной форме многими специалистами по нелинейным проблемам [1]–[4]. Идея исследования нелинейного операторного уравнения через аппроксимацию уравнения разветвления была сфор-

мулирована и достаточно подробно обсуждена в монографии [1].

Если отбросить «лишние» подробности, то переход к существенным переменным можно представить следующим образом: в исследуемую бесконечномерную систему вводится конечный набор дополнительных «фиктивных» связей, приводящий систему к единственному устойчивому состоянию, зависящему от параметров связей, а затем основные устойчивые состояния разыскиваются дополнительной минимизацией функционала энергии по параметрам связей (на множестве условно устойчивых состояний). Такой метод используется в статике упругих стержней [5], упругих оболочек [6], [7] и других разделах механики сплошных сред. Сходные математические идеи применяются в теории нелинейных волн и других разделах нелинейной физики [8].

Схемы точных редукций бесконечномерных систем к конечномерным были предложены (в математически строгой форме) А. М. Ляпуновым [9], Э. Шмидтом [10] и М. Морсом [11], [12]. Схема М.Морса была затем усовершенствована Р. Боттом (см. подробное описание в [12]). Схемам Ляпунова–Шмидта и Морса–Ботта предшествовал локальный метод Пуанка-

ре понижения размерности в конечномерной экстремальной задаче [13].

Впоследствии появились нелокальные версии схемы Ляпунова–Шмидта и ее новые применения в современных вариационных задачах [14], [15], [16].

К крупнейшим фундаментальным достижениям метода конечномерной редукции относится осуществление полного переноса на класс гладких фредгольмовых функционалов всех основных положений конечномерной теории особенностей гладких функций [17], [18]. Схемы конечномерных редукций представляют и большой прикладной интерес, как эффективный аппарат исследования многих потенциальных физических систем с неединственностью состояний. К таковым относятся, например, упругие конструкции в закритических равновесных состояниях [4]—[7] и кристаллические сегнетоэлектрики в посткритических фазах [19]—[21].

Следует отметить также работы В. Койтера по анализу закритических равновесий упругих систем (см., например, [22]), в которых фактически использовалась (без математического обоснования) схема Ляпунова–Шмидта. В. Койтер отталкивался от упомянутого выше метода А. Пуанкаре и ритцевских конечномерных аппроксимаций [23].

Ритцевской аппроксимацией [24], [25] функционала V на банаховом пространстве E называется функция

$$W(\xi) := V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T,$$

где e_1, \dots, e_n — некоторый линейно независимый набор векторов в E (базис аппроксимации). Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)^T$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Точность ритцевских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных векторов. Если, обобщая, рассмотреть нелинейные аппроксимации вида

$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N , например, в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих задачах можно достигнуть сколь угодно большой точ-

ности аппроксимации экстремалей при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

К аналогичным результатам можно прийти, отправляясь от конечно-элементных аппроксимаций [23].

Таким образом, схемы конечномерных редукций позволяют не только осуществлять развитие теории особенностей гладких фредгольмовых функционалов, но и дают эффективное средство для изучения конкретных физических систем с бесконечным числом степеней свободы.

Важнейшим достоинством метода конечномерных редукций является принципиальная возможность осуществления его компьютерного сопровождения, сочетающего возможности символьных преобразований и высокоэффективных реализаций стандартных численных процедур в современных математических экспертных системах (типа Mathematica, Maple и др.). Разработки алгоритмов визуализации позволяют получать наглядную информацию о бифурцирующих экстремалах, их индексах Морса и о метаморфозах поверхностей уровней функционалов энергии. В каком-то смысле можно говорить о зарождении нового этапа в анализе нелинейных уравнений посредством прямого наблюдения решений и их свойств на основе компьютерного сопровождения.

Среди теоретических проблем, связанных с применением и развитием метода конечномерных редукций, выделяются, как основные, следующие две: проблема нелокальной продолжимости ключевых параметров и проблема сравнения ключевых функций. В первую из них включается задача нелокального существования ключевых параметров и задача точного или приближенного представления маргинальных отображений и ключевых функций (возможность точного представления появляется, например, в некоторых интегрируемых уравнениях [26], [27]). Под сравнением ключевых функций подразумевается сравнение аналитических и топологических свойств ключевых функций, полученных в одной вариационной задаче по различным редуцирующим схемам. Решение этих проблем необходимо для теоретического обосно-

вания применений метода конечномерных редукций (важно знать условия правой топологической эквивалентности ключевых функций, определенных в различных схемах). Ряд фундаментальных результатов в этом направлении был получен в работах [27], [28].

При разработке процедур визуализации бифуркационных явлений в неинтегрируемых уравнениях возникает необходимость обращения к приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений [27], [30], [31]. В этой связи возникает естественный вопрос о равномерной C^r -сходимости приближенных решений по параметрам (вместе с производными по параметрам до порядка $r \geq 1$).

Равномерная C^r -сходимость позволяет устанавливать для аппроксимирующего уравнения трансверсальность к особенностям, если она имела место для исходного уравнения. Трансверсальность является одним из условий стабилизации дискриминантных множеств и *bif*-раскладов, что дает возможность компьютерного анализа сечений дискриминантных множеств и раскладов критических точек (соответствующих связным компонентам дополнений к дискриминантным множествам в пространствах значений параметров) на основе аппроксимаций ключевых функций.

Отметим, что и в случаях точно интегрируемых уравнений для доводки алгоритмов до уровня, позволяющего получать законченные результаты, целесообразно, как показывает опыт, обращаться к приближенному интегрированию.

1. НЕЛОКАЛЬНЫЕ РЕДУКЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ РИТЦЕВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ

1.1. Общая редуцирующая схема

Редуцирующие схемы в вариационных задачах удобно применять, отталкиваясь от общего операторного уравнения

$$f(x) = 0,$$

в котором f — потенциальное фредгольмово отображение нулевого индекса, действующее в паре банаховых пространств. Потенциальность означает, что данное уравнение эквивалентно экстремальной задаче

$$V(x) \rightarrow \inf, \quad x \in X, \quad (1)$$

в которой V — гладкий функционал (потенциал отображения f) на банаховом пространстве или гладком банаховом многообразии X .

Например, решение $q(t)$ уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{q}} - L_q = 0, \quad \dot{q}, q \in \mathbf{R}^n,$$

удовлетворяющее граничным условиям $q(0) = a$, $q(T) = b$, можно отыскивать как экстремаль

функционала действия $V(q) = \int_0^T L(\dot{q}, q) dt$ на

аффинном банаховом пространстве C^2 -функций $q : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

Задача (1) весьма часто допускает сведение к аналогичной задаче в конечномерном пространстве $W(\xi) \rightarrow \inf, \xi \in \mathbf{R}^n$.

Точное описание такого перехода в общем виде можно дать следующим образом. Пусть $V(x)$ — гладкий функционал, заданный на гладком банаховом многообразии M , и пусть на открытом подмножестве $\mathcal{O} \subset M$, именуемом в дальнейшем областью, задан конечный набор гладких функционалов $\mathcal{P} = \{p^1, \dots, p^n\}$, первые дифференциалы которых в каждой точке $a \in \mathcal{O}$ образуют линейно независимую систему векторов (в сопряженном касательном пространстве). Предположим также, что существует гладкое отображение $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$ (\mathcal{U} — образ отображения $\mathbf{p} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{p}(x) := (p^1(x), \dots, p^n(x))$), для которого

$$p^j(\varphi(\xi)) = \xi_j, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{U}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и выполняются следующие условия

1) $\varphi(\xi)$ — единственная экстремаль для ограничения $V|_{\mathbf{p}^{-1}(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathcal{U}$;

2) $\varphi(\xi)$ — невырожденная точка абсолютного минимума для ограничения $V|_{\mathbf{p}^{-1}(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathcal{U}$.

Тогда набор \mathcal{P} называется *системой ключевых параметров* для функционала V на области \mathcal{O} .

Функция

$$W(\xi) := V(\varphi(\xi)) = \inf_{x: \mathbf{p}(x)=\xi} V(x)$$

называется *ключевой*.

Имеет место следующее фундаментальное утверждение [16]: *точка $\bar{x} \in \mathcal{O}$ является критической для V тогда и только тогда, когда существует критическая точка $\bar{\xi} \in \mathcal{U}$ функции W , такая, что $\bar{x} = \varphi(\bar{\xi})$. При этом невырожденность \bar{x} для V равносильна невырожденности $\bar{\xi}$ для W .*

Классические примеры конечномерных редукций — локальная редукция Ляпунова–

Шмидта (в вариационной модификации) и редукция Морса–Ботта из вариационной теории геодезических.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п. [17], [4]) для таких функционалов, вводятся через ключевые функции.

1.2. Условие нелокальной продолжимости ключевой функции

Пусть $f: E \rightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств. Это означает, что $\forall x \in E$ производная $f'(x)$ имеет конечномерные ядро $\text{Ker } f'(x)$ и коядро $\text{Coker } f'(x) = F/\text{Im } f'(x)$, причем $\dim \text{Ker } f'(x) = \dim \text{Coker } f'(x)$. Пусть f собственно (образ любого компакта компактен) и потенциально:

$$\langle f(x), h \rangle \equiv \frac{\partial V}{\partial x}(x)h, \quad (2)$$

где V — гладкий функционал на E (потенциал отображения f), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H , содержащем E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства. Предполагается также, что E непрерывно вложено в F . Мы будем говорить, что функционал V обладает градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$ и использовать обозначения $f = \text{grad } V = \nabla V$.

Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus 0), \quad (3)$$

то уравнение

$$f(x) = 0 \quad (4)$$

однозначно разрешимо. Это верно в силу теоремы Банаха–Мазура–Каччиополи (см. [32], [33]). Очевидно, что решение этого уравнения является и точкой глобального минимума V на E . Из (2) следует, что множество решений уравнения (4) совпадает с множеством критических точек функционала V . В самом деле, условие $V'(x) = 0$ в силу формулы (2) равносильно условию $f(x) \in E^\perp$, но $E^\perp = \{0\}$, ввиду плотности E в H .

Уравнение (4) является абстрактным аналогом уравнения Эйлера–Лагранжа из классического вариационного исчисления.

Если (3) заменить более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (\tilde{E} \setminus 0), \quad (5)$$

где $\tilde{E} = E \cap N^\perp$, $N = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, N^\perp — ортогональное дополнение к N в H , e_1, \dots, e_n — некоторая ортонормированная в H система векторов в E , то можно определить ключевую функцию Ляпунова–Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{x: \langle x, e_j \rangle = \xi_j \forall j} V(x), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T, \quad (6)$$

«отвечающую» за поведение функционала V . Условие собственности f можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом ξ отображения

$$\tilde{f}(\cdot, \xi): \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{F} = F \cap N^\perp,$$

$$\tilde{f}(v, \xi) := f(l(\xi) + v) - \sum_{j=1}^n \langle e_j, f(l(\xi) + v) \rangle e_j, \quad (8)$$

$$l(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j.$$

При выполнении условий (5), (7) уравнение

$$\tilde{f}(h, \xi) = 0 \quad (9)$$

однозначно разрешимо при всех ξ , и его решение $h(\xi)$ гладко зависит от ξ — по теореме о неявной функции. Из (5) следует, что

$$W(\xi) \equiv V(l(\xi) + h(\xi)). \quad (10)$$

Для ключевого уравнения

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \quad (11)$$

в котором

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^T, \quad \theta_j(\xi) = \langle f(l(\xi) + h(\xi)), e_j \rangle$$

имеем

$$\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi).$$

Впервые условие собственности в проблеме редукции было использовано в работе [34], в которой сформулировано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть отображение (7) является собственным и пусть при этом выполняется условие положительности (5). Тогда маргинальное отображение $\varphi: \xi \mapsto l(\xi) + h(\xi)$,

где $h(\xi)$ определено уравнением (9), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции (6) и заданного функционала V . При этом локальные кольца особенностей¹ соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны, а в соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса².

Заметим, что доказательство изоморфности локальных колец проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких функций [17], [18]. Эти приемы легко переносятся на бесконечномерные банаховы многообразия в случае фредгольмовых функционалов.

Следующий шаг в развитии данной схемы — замена линейных функционалов p_j , $p_j(x) = \langle x, e_j \rangle$ (см. (6)), на более сложные линейные и нелинейные, как, например, в схеме Морса–Ботта.

Условие собственности отображений (7) можно заменить на любое другое, гарантирующее существование условных экстремалей в слоях $p^{-1}(\xi)$, $p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))^T$. Например, если пространство E рефлексивно, то достаточно потребовать коэрцитивность V (наряду с выпуклостью) вдоль каждого слоя. В этих же целях можно применять и известное условие (С) Пале–Смейла [35], [36].

Если на H зафиксировано ортогональное действие некоторой группы G с условием инвариантности подпространств $E, F, N = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ и функционала V относительно этого действия, то ключевая функция (6) будет инвариантной относительно действия G на N [28].

1.3. Редукция, как источник алгоритмов

Формула ключевой функции $W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right)$, служит прекрасной основой для создания алгоритмов вычисления обоб-

¹ Локальное кольцо особенности гладкого функционала V в критической точке a определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве F ($f = \text{grad}_H V$).

² Индекс Морса в бесконечномерном случае определяется как максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал.

щенных ритцевских аппроксимаций и, следовательно, для создания алгоритмов компьютерной визуализации.

Опишем одну из возможных процедур создания алгоритма.

Предположим, что для V выполнено условие (L), состоящее из следующих четырех требований:

1) $E = F$ (конфигурационное пространство и пространство значений градиента совпадают);

2) для градиента имеет место представление $f(x, \lambda) = I + c(x, \lambda)$, где c — вполне непрерывное отображение из $E \times \Lambda$ в E (градиент представим в форме Лере–Шаудера);

3) существует такая последовательность конечномерных подпространств

$$E_0 = N \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m \subset \dots,$$

что последовательность ортопроекторов $P_m : H \rightarrow E_m$ сильно сходится к единице на пространстве E ;

4) ограничение $V|_{E_m}$ является коэрцитивной функцией.

Ясно, что отображение (8) тогда тоже представимо в форме Лере – Шаудера: $f(v, \lambda, u) = I + \tilde{c}(v, \lambda, u)$. Следовательно, уравнение (9) можно решать (приближенно) на основе галеркинских аппроксимаций:

$$\begin{aligned} v + \tilde{c}_m(v, \lambda, u) &= 0, \quad v \in E_m, \\ \tilde{c}_m(v, \lambda, u) &:= P_m \cdot \tilde{c}(v, \lambda, u) \end{aligned} \tag{12}$$

(см. [23], [37]). Уравнение (12) можно приближенно решать на основе разнообразных вычислительных процедур, разработанных для конечномерного случая [23], [38]. Переход к галеркинской аппроксимации этим и оправдан. Большинство современных программных средств также создано для конечномерных уравнений.

В некоторых случаях имеется возможность прямого приближенного вычисления маргинального отображения, например, методом кратчайшего градиентного спуска. Алгоритм вычислений (его существенная часть) заключен в следующих соотношениях:

$$\begin{aligned} a_0 &= u := \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \\ a_1 &= a_0 - t_0 Q \nabla_0, \quad \nabla_0 := \text{grad} V(a_0) \end{aligned}$$

(t_0 выбирается с целью минимизации на прямой $a = a_0 - tQ\nabla_0$ значения функционала V или нормы градиента $\nabla := \text{grad} V(a)$),

$$Q(x) := x - \langle x, e_1 \rangle e_1 - \langle x, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad (13)$$

$$a_{k+1} = a_k - t_k Q \nabla_k, \quad \nabla_k := \text{grad} V(a_k)$$

(t_k выбирается с целью минимизации на прямой $a = a_k - t Q \nabla_k$ значения V или нормы градиента $\nabla := \text{grad} V(a)$).

В соотношении $a_{k+1} = a_k - t_k Q \nabla_k$ можно выбирать другие направления сдвига (градиенты в другой метрике).

В случае гладкой зависимости функционала от параметра ξ , принадлежащего компактной области, нетрудно показать, что за счет «удачного» выбора направления сдвига и длины шага (зависящих от k и ξ) можно добиться равномерной C^r -сходимости по параметру к семейству минимумов. Соответствующие оценки для норм невязок градиента и снижений значений функционала [37] легко переносятся на параметрический случай. Если в соотношении (13) положить $t_k = \varepsilon$ — достаточно малая константа, то из (13) получим оценку для производной по параметру ξ :

$$\frac{\partial a_{k+1}}{\partial \xi} = \frac{\partial a_k}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial Q \nabla_k}{\partial v}$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial \xi} = \left(I - \varepsilon \frac{\partial Q \nabla_k}{\partial v} \right) \frac{\partial a_k}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial a_{k+1}}{\partial \xi} \right\| < (1 - \varepsilon q) \left\| \frac{\partial a_k}{\partial \xi} \right\|,$$

где q — константа, отделяющая снизу спектр операторного пучка $\frac{\partial Q \nabla_k}{\partial v}$.

Гладкую равномерную сходимость можно также установить применением нелокальной версии леммы Морса [39] и обобщения на параметрический случай известного результата М. А. Красносельского и С. Г. Крейна [40].

Таким образом, градиентный метод гарантирует гладкую равномерную сходимость приближений к ключевой функции, но эта сходимость может осуществляться слишком медленно. Как отмечают специалисты, метод Ньютона сходится более быстро, но требует большего объема вычислений [37].

Гладкую равномерную сходимость ньютоновских итераций для уравнений с параметром недавно установил А. А. Лемешко.

1.4. Модельный пример

Рассмотрим «маятниковое» уравнение

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0, \quad (15)$$

при краевых условиях

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (16)$$

Пусть E — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[0, 1]$, удовлетворяющих краевому условию (10). Уравнение (9) является уравнением Эйлера–Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(x, \lambda) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \lambda (\cos x - 1) \right) ds. \quad (17)$$

Если выполняется условие

$$\lambda < ((n + 1)\pi)^2, \quad (18)$$

то ключевая функция

$W(\xi, \lambda) := \inf_{x:p(x)=\xi} V(x, \lambda)$, $\xi \in \mathbf{R}^n$,
определенная в линейной редуцирующей системе

$$\mathcal{P} = \{p^1, \dots, p^n\}, \quad p^j(x) = \int_0^1 e_j(s) x(s) ds,$$

$$e_j(s) = \sqrt{2} \sin(\pi j s),$$

(редукция Ляпунова–Шмидта) «отвечает» за решения краевой задачи (15)—(16) в классе C^2 .

В этой же задаче при условии (18) можно воспользоваться редукцией Морса–Ботта, после применения которой анализ обобщенных решений уравнения (15) (в классе абсолютно непрерывных функций с квадратично интегрируемыми производными) сводится к анализу гладкой функции

$$U(\xi, \lambda) := \inf_{x:\tilde{p}(x)=\xi} V(x, \lambda), \quad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{p}^1, \dots, \tilde{p}^n\}$, $\tilde{p}^j(x) = x \left(\frac{j}{n+1} \right)$. Параметры Морса–Ботта здесь можно связать с константами интегрирования, используя известную формулу общего решения [5]:

$$\alpha(k, c)(t) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda} t + c; k))$$

(sn — эллиптический синус).

В частности, при $\lambda < 4\pi^2$ изучение поведения решений рассматриваемой задачи сводится к анализу гладкой функции

$$\tilde{U}(k, \lambda) = 4\lambda k^2 \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda} s; k) ds - \frac{1}{2} \right).$$

В [34] был поставлен естественный вопрос: будут ли ключевые функции W и U глобально гладко эквивалентными (то есть, найдется ли такой диффеоморфизм $\psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, что $W(\psi(x)) \equiv U(x)$)? В работе [27] установлена гладкая эквивалентность ключевых функций при условии гладкой деформируемости соответствующих редуцирующих схем друг в друга с сохранением коэрцитивности ключевых функций. В качестве следствия получена теорема о глобальной гладкой эквивалентности ключевых функций, вычисленных по редуцирующим схемам Ляпунова–Шмидта и Морса–Ботта в двухточечной краевой задаче для натуральной механической системы достаточно общего вида. Основу этих результатов составил признак нелокальной гладкой эквивалентности функций, полученный в [28] на основе гомотопического метода Тома.

Итак, в случае интегрируемой задачи можно пытаться выразить константы интегрирования через параметры Морса–Ботта. Для рассматриваемых уравнений (маятникового и Дуффинга) задача интегрируема лишь для крайних условий, отвечающих решениям, ограниченным сепаратрисой на фазовой плоскости. Тем не менее, опираться на формулу решения можно, поскольку все экстремумы реализуются только на таких решениях. Принципиальной помехой ее использования является отсутствие формальной возможности обращения выражения $k \cdot sn(\sqrt{\lambda}z, k)$ по параметру k . И все же, в неимении явного выражения для ключевой функции нам остается доступным численный эксперимент и результаты его визуализации.

Следующий фрагмент Maple-кода реализует редуцицию по схеме Морса–Ботта к двумерной ключевой функции для функционала энергии продольно сжатого стержня при значениях параметра осевой нагрузки $4\pi^2 < \lambda < 9\pi^2$:

```
> restart:with(Student[Calculus1]):
> path:="d:\\Mors-Bott\\":lambda:=evalf(7*Pi^2):
> lxi1:=-3.5:rxl1:=3.5:lxi2:=-3.5:rxl2:=3.5:n:=20:
> w:=array(0..n):
> eq:={diff(x(t),t$2)+lambda*sin(x(t))=0}:
> for i from 0 to n/2 do
> xi1:=evalf(lxi1+(rxl1-lxi1)/n*i):
> ic1:={x(0)=0,x(1/3)=xi1}:
> ds1:=dsolve(eq union ic1,x(t),type=numeric,
  output=listprocedure):
> f1:=rhs(ds1[2]):df1:=rhs(ds1[3]):
> I1:=ApproximateInt(1/2*df1(t)^2+lambda*(cos(f1(t))-1),
```

```
t=0..1/3, method = simpson):
> for j from 0 to n do
> xi2:=evalf(lxi2+(rxl2-lxi2)/n*j):
> ic2:={x(1/3)=xi1,x(2/3)=xi2}:ic3:={x(2/3)=xi2,
  x(1)=0}:
> ds2:=dsolve(eq union ic2,x(t),type=numeric,
  output=listprocedure):
> f2:=rhs(ds2[2]):df2:=rhs(ds2[3]):
> ds3:=dsolve(eq union ic3,x(t),type=numeric,
  output=listprocedure):
> f3:=rhs(ds3[2]):df3:=rhs(ds3[3]):
> I2:=ApproximateInt(1/2*df2(t)^2+lambda*(cos(f2(t))-1),
  t=1/3..2/3, method = simpson):
> I3:=ApproximateInt(1/2*df3(t)^2+lambda*(cos(f3(t))-1),
  t=2/3..1, method = simpson):
> w[j]:=I1+I2+I3:od:print(i,time()):
> f:=fopen(cat(path,"w",convert(i,string),".dat"),WRITE):
> writedata(f,convert(w,list)):fclose(f):od:
```

На основании полученных значений ключевой функции в узлах сетки строится график (рис.1).

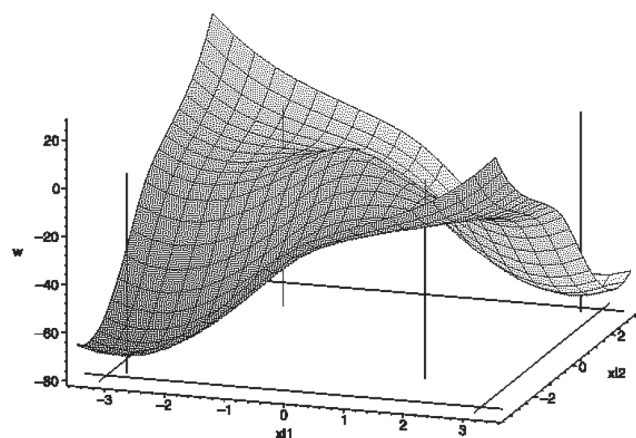


Рис. 1

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ ГАЛЁРКИНА

Метод Галёркина [29] с его разновидностями [25] применялся при решении многочисленных задач механики конструкций, динамики сооружений, гидромеханики, теории гидродинамической устойчивости, магнитной гидродинамики, теории тепло- и массообмена, акустики, теории распространения микроволн и т. п. С помощью представлений Галёркина были проведены исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных [2], [25].

Происхождение метода обычно связывается со статьей Галёркина [29], посвященной упругому равновесию стержней и тонких пластин. Нелинейный аналог этого метода возник на несколько лет раньше в работах А. М. Ляпунова и Э. Шмидта [9], [10].

С самого начала существенным требованием, предъявляемым к методу Галёркина, было то, чтобы он обеспечивал достаточную точность решений при минимуме «ручных» вычислений. Ясно, что в момент создания данного метода и в последующие десятилетия все расчеты делались либо вручную, либо с помощью простейших вычислительных машин.

Относительная доступность компьютеров (начиная с 60-х годов) изменила акцент в применении методов Галёркина. Объем вычислений почти перестал теперь играть существенную роль, а поэтому требование того, чтобы метод обеспечивал повышенную точность решений, стало сочетаться не столько с условием минимума ручной работы, сколько с условием минимума машинного времени.

Подчеркнем, что точность линейных галёркинских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных векторов. Вычислительные алгоритмы, созданные на основе точных схем конечномерных редукций, позволяют достигать любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, при априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

2.1. Уравнение без параметра

Рассмотрим уравнение

$$g(x) = 0, \quad (19)$$

где $g: E \rightarrow E$ — нелинейный гладкий оператор, E — банахово пространство.

Каждый проекционный метод заключаются в переходе к приближенному уравнению

$$\tilde{g}(y) = 0, \quad (20)$$

в некотором вспомогательном пространстве \tilde{E} (как правило, конечномерном). Решения y^* уравнения (20) объявляются приближенными решениями уравнения (19).

Если вводится в рассмотрение не одно уравнение (20) и пространство \tilde{E} , а некоторая их последовательность

$$B_n(y_{(n)}) = 0, \quad y_{(n)} \in \tilde{E}_n, \quad (21)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

то последовательность уравнений (21) или, хотя бы, уравнения с большими номерами n имеют решения $y_{(n)}^*$ (это предполагается), причем предполагается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_{(n)}^*, \mathfrak{K}) = 0,$$

где \mathfrak{K} — множество решений уравнения (19). В этом случае говорят, что данный проекционный метод сходится.

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$x = c(x), \quad (22)$$

(или $(I - c)(x) = 0$) с вполне непрерывным оператором c , действующим в E из замыкания $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$.

Запишем уравнение (21) в виде

$$x = c_n(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Причем каждый оператор C_n считается заданным на $\bar{\Omega}$ и действующим в E .

Если $c_n(x) = P_n \circ c(x)$, где P_n — линейный проектор на конечномерное подпространство, то уравнение (5) называется уравнением Галёркина, а переход к такому уравнению называется методом Галёркина или общим проекционным методом [1].

В [1] указан принцип сходимости метода Галёркина с использованием топологической степени оператора $I - c$ на множестве Ω .

Мы в дальнейшем будем считать, что рассматриваемое уравнение (4) имеет невырожденное и единственное решение в области Ω , что гарантирует применимость принципа сходимости метода Галёркина [1].

Следуя [1], будем говорить, что последовательность проекторов P_n согласована с вполне непрерывным оператором $c(x)$, если для операторов $c_n(x) = (P_n \circ c)(x)$ выполнено условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|c_n(x) - c(x)\| = 0.$$

Очевидно, что последовательность P_n согласована с любым вполне непрерывным оператором, если последовательность $\{P_n(x)\}$ сильно сходится к $x: \|P_n(x) - x\|_E \rightarrow 0 (\forall x \in E)$ [1].

Теорема 2. см. [30] Пусть вполне непрерывный оператор $c(x)$ не имеет неподвижных точек на границе $\partial\Omega$ ограниченной области Ω банахова пространства E и имеет одну невырожденную неподвижную точку x^* внутри Ω . Пусть линейные непрерывные проекторы P_n согласованы с $c(x)$. Тогда ме-

тод Галёркина (23) приближенного решения уравнения (22) сходится.

Доказательство близкого утверждения, основанное на понятии вращения вполне непрерывного векторного поля, приводится в [1].

Теперь заметим, что условие $\|P_n(x) - x\|_E \rightarrow 0$ дает согласованность проекторов P_n с оператором $c(x)$. Следовательно, можно утверждать, что для любого компакта \mathfrak{K} выполнено следующее:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathfrak{K}} \|c_n(x) - c(x)\| = 0,$$

то есть, $c_n(x) \rightarrow c(x)$ равномерно по x на \mathfrak{K} .

Нетрудно заметить, что для производных высших порядков ситуация будет аналогичной.

Теорема 3. Пусть E — банахово пространство, $c: \bar{\Omega} \subset E \rightarrow E$ — вполне непрерывный, k -раз непрерывно дифференцируемый оператор, имеющий единственную невырожденную неподвижную точку x^* .

Пусть последовательность конечномерных линейных непрерывных проекторов $\{P_n: E \rightarrow E_n\}$ сильно сходится к тождественному оператору I , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x) - x\|_E = 0.$$

Тогда соответствующие неподвижные точки x_n^* операторов $c_n(x)$ (приближенные решения) сходятся к точному, а на любом компакте K , содержащем множество $\mathfrak{K} = \{x^*\} \cup \{x_n^*\}$, имеет место равномерная по $x \in K$ сходимости (вместе с производными до порядка k):

$$c_n(x) = P_n \circ c(x) \rightarrow c(x)$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} c_n(x) = P_n \circ \frac{\partial^p}{\partial x^p} c(x) \rightarrow \frac{\partial^p}{\partial x^p} c(x), \quad p = \overline{1, k}.$$

2.2. Уравнение с параметром

Пусть теперь задано уравнение с параметром.

$$c(x(\lambda), \lambda) = 0, \tag{24}$$

где λ — векторный параметр ($\lambda \in \Lambda \subset \mathbf{R}^n$, Λ — компакт). Аналогичным предыдущему пункту образом введем при каждом λ последовательность приближенных уравнений

$$c_n(x(\lambda), \lambda) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{25}$$

В условии теоремы 2 нам необходима полная непрерывность отображения $C(\cdot, \cdot): \bar{\Omega} \times \Lambda \rightarrow E$.

Из полной непрерывности этого отображения (по совокупности переменных) следует, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ оператор

$$c_\lambda(\cdot): \bar{\Omega} \rightarrow E, \quad c_\lambda(x) = c(x, \lambda), \quad x \in \bar{\Omega}$$

является вполне непрерывным. Обратное, вообще говоря, неверно, то есть, если имеется семейство вполне непрерывных отображений $c_\lambda(\cdot): \bar{\Omega} \rightarrow E$, то из этого не следует, что отображение $c(\cdot, \cdot): \bar{\Omega} \times \Lambda \rightarrow E$ является вполне непрерывным. Соответствующий пример приведен в [1], стр. 129.

Для выявления полной непрерывности по совокупности переменных можно воспользоваться утверждением, приведенному в [41].

Предложение. Отображение $C(x, \lambda): \bar{\Omega} \times \Lambda \rightarrow E$ является вполне непрерывным, если выполнены следующие условия:

1) C непрерывен по совокупности переменных;

2) при каждом фиксированном значении $\lambda \in \Lambda$ отображение $c_\lambda(x): \bar{\Omega} \rightarrow E$, $c_\lambda(x) = c(x, \lambda)$, $x \in \bar{\Omega}$ является вполне непрерывным, т.е. переводящим каждое ограниченное множество в относительно компактное;

3) отображение c непрерывно по $\lambda \in \Lambda$ равномерно относительно x ; т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и $\lambda_0 \in \Lambda$ существует δ -окрестность $U_\delta(\lambda_0)$ такая, что из принадлежности $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ следует $\|c(x, \lambda) - c(x, \lambda_0)\| < \varepsilon$ для всех $x \in \bar{\Omega}$.

Нетрудно заметить, что появление параметра λ в силу его конечной размерности никак не скажется на согласованности проекторов $\{P_n\}$ с оператором $c(x, \lambda)$ ($P_n(x, \lambda) := (P_n(x), \lambda)$, $P_n(x, \lambda) - (x, \lambda) = (P_n(x) - x, 0)$).

Таким образом, находясь в условиях полной непрерывности по совокупности переменных, и считая оператор $c(x, \lambda)$ k -раз непрерывно дифференцируемым по совокупности переменных и имеющим при каждом λ единственную невырожденную неподвижную точку $x^*(\lambda)$, мы получаем равномерную по x и λ сходимости $c_n(x(\lambda), \lambda) \rightarrow c(x(\lambda), \lambda)$ с производными и, следовательно, равномерную по λ сходимости $x_n^*(\lambda) \rightarrow x^*(\lambda)$.

Пусть теперь пространство $E = C_{[a,b]}^r$ и $c(x(\lambda), \lambda)$ имеет при каждом λ единственную невырожденную неподвижную точку $x^*(\lambda)$.

Продифференцировав $x^*(\lambda)$ по λ , получим соотношения, дающие нам равномерную по λ сходимости $\frac{\partial x_n^*}{\partial \lambda}(\lambda) \rightarrow \frac{\partial x^*}{\partial \lambda}(\lambda)$.

При последующих дифференцированиях равномерная сходимости старших производных c_n будет обеспечивать равномерную сходимости $\frac{\partial^r x_n^*}{\partial \lambda^r}(\lambda) \rightarrow \frac{\partial^r x^*}{\partial \lambda^r}(\lambda)$.

Теорема 4. Пусть E — банахово пространство, $\Omega \subset E$ — ограниченная область, $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ — компакт, $C(x, \lambda) : \bar{\Omega} \times \Lambda \rightarrow E$ — вполне непрерывный, k -раз непрерывно дифференцируемый по совокупности переменных оператор, имеющий при каждом λ единственную невырожденную неподвижную точку $x^*(\lambda)$.

Пусть последовательность конечномерных линейных непрерывных проекторов $\{P_n : E \rightarrow E_n\}$ сильно сходится к тождественному оператору I , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x) - x\|_E = 0.$$

Тогда на Λ приближенные решения $\{x_n^*(\lambda)\}$ равномерно по λ сходятся к точному, и, более того, имеет место равномерная по λ сходимость производных $\frac{\partial^r x_n^*}{\partial \lambda^r}(\lambda) \rightarrow \frac{\partial^r x^*}{\partial \lambda^r}(\lambda)$, $0 \leq r \leq k$.

2.3 Краевая задача для уравнения Дуффинга

Рассмотрим 2-точечную краевую задачу для уравнения Дуффинга:

$$f(x) = \ddot{x} + \lambda x - x^3 = q(t) \tag{26}$$

при краевых условиях

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{27}$$

Уравнение (26) потенциально с потенциалом:

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\lambda x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + qx \right) dt$$

на банаховом пространстве

$$E = C_0^2([0, 1], R) := \{x(t) \in C_0^2([0, 1], R); x(0) = x(1) = 0, \}.$$

В данной статье используется тройка пространств E, F, H , где

$$E = \{x(t) \in C^2([0, 1], \mathbf{R}^1) : x(1) = x(0) = 0\}$$

— пространство дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ вещественной прямой функций, удовлетворяющих краевому условию (27), $F = \{y(t) \in C^0([0, 1], \mathbf{R}^1)\}$ — пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций. $H = \{z \in L_2[0, 1], \mathbf{R}^1\}$ — пространство функций с суммируемым квадратом на $[0, 1]$.

Первой модой бифуркации в задаче (26)–(27) служит функция $e_1 = \sqrt{2} \sin(\pi t)$ (наряду с более высокими модами $e_k = \sqrt{2} \sin(\pi kt)$, $k=2,3,\dots$).

2.4 Классическая ритцевская аппроксимация

Линейной ритцевской аппроксимацией функционала V по первым двум модам является функция

$$W_R(\xi) := V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) = \frac{\xi_1^4 + \xi_2^4 + 2a\xi_1^2 \xi_2^2}{4} - \frac{\delta \xi^2 + (\pi^2 + \delta)\xi^2}{2} + \varepsilon_1 \xi_2 + \varepsilon_1 \xi_2$$

(после соответствующих замен переменных и параметров).

Наиболее характерные графики этой функции представлены на рис. 2¹.

¹ Графики изготовлены посредством визуализатора С. М. Семенова.

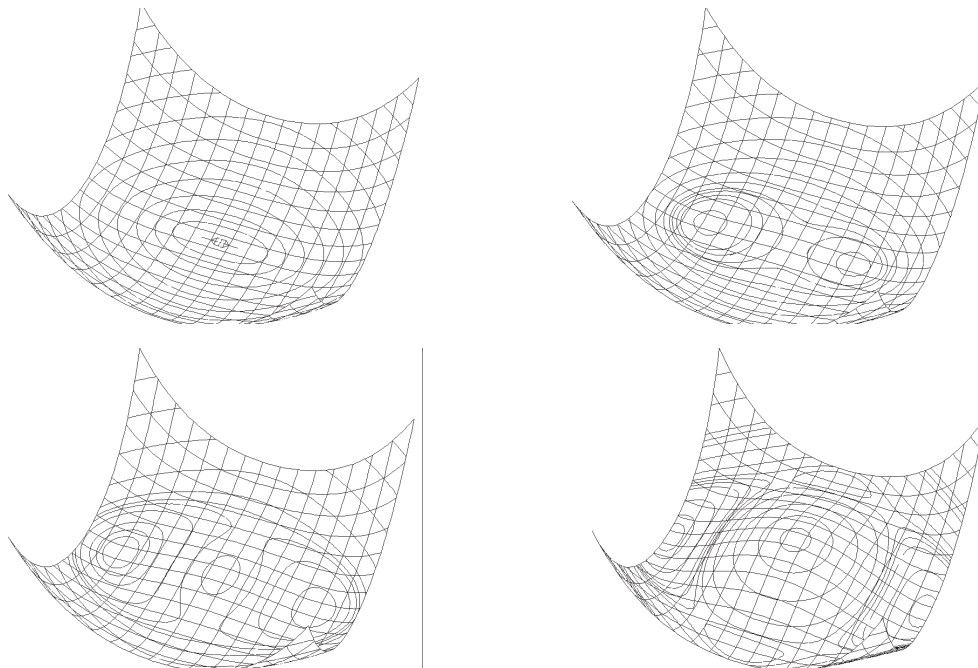


Рис. 2

3. ОБОБЩЕННЫЕ РИТЦЕВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Нелинейная ритцевская аппроксимация функционала V по первым двум модам выглядит следующим образом

$$W(\xi) := V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \Phi(\xi)) = \frac{\xi_1^4 + \xi_2^4 + 2a\xi_1^2\xi_2^2}{4} + \frac{c_1\xi_1^2\xi_2 + c_2\xi_1\xi_2^2}{3} - \frac{\delta\xi^2 + (b + \delta)\xi^2}{2} + \varepsilon_1\xi_2 + \varepsilon_1\xi_2 + \dots$$

(после соответствующих замен переменных и параметров).

Нелинейная добавка

$$\Phi(\xi) = \Phi^{(2)}(\xi) + \Phi^{(3)}(\xi) + \dots$$

строится как приближение для слагаемого $h(\xi)$ в формуле (10).

В качестве первого приближения традиционно выбирается W_R — ритцевская аппроксимация.

Описанный выше подход реализован нами в среде Waterloo Maple:

```
> restart:with(student):path:="PATH":
> lambda:=20*Pi:
> w:=array(1..61): ww:=array(1..61):
> for x1 from -30 to 30 do
> for x2 from -30 to 30 do
> i:=31+x1: xi1:=x1/5: xi2:=x2/5:
> j:=31+x2: B1a:='B1a':
> f1:=t->sqrt(2)*sin(Pi*t):f2:=t->sqrt(2)*sin(2*Pi*t):
> %численное интегрирование методом Симпсона
  с 36 узлами разбиения отрезка [0,1]
> scdot:=(x,y)->evalf(simpson(x*y,t=0..1,36)):
> Q:=xx->evalf(xx-scdot(f1(t),xx)*f1(t)-scdot(f2(t),xx)*f2(t)):
> B1a:=t->xi1*f1(t)+xi2*f2(t):
> b1:='b1':
> b1:=t->evalf(lambda*Q(sin(B1a(t))-1/2)):
> eq1:='eq1':
> eq1:={diff(y(t),t$2)=b1(t),y(0)=0,y(1)=0}:
> ds:='ds':
> ds:=dsolve(eq1,y(t),type=numeric,
  output=listprocedure):
> B1:='B1':
> B1:=rhs(ds[2]):
> b2:='b2':
> f1:=t->sqrt(2)*sin(Pi*t):f2:=t->sqrt(2)*sin(2*Pi*t):
> Q:=xx->evalf(xx-scdot(f1(t),xx)*f1(t)-scdot(f2(t),xx)*f2(t)):
> b2:=t->evalf(lambda*Q(sin(B1a(t)+B1(t))-1/2)):
> eq2:='eq2':
```

```
> eq2:={diff(y(t),t$2)=b2(t),y(0)=0,y(1)=0}:
> ds:='ds':
> %метода Рунге-Кутты-Фельберга решения краевых задач ОДУ
> ds:=dsolve(eq2,y(t),type=numeric,
  output=listprocedure):
> B2:='B2':dB2:='dB2':
> B2:=rhs(ds[2]):dB2:=rhs(ds[3]):
> ww[j]:=0:
> ww[j]:=evalf(simpson(1/2*diff(B1a(t),t)^2+diff(B1a(t),t)*dB2(t)+1/2*dB2(t)^2+lambda*(cos(B1a(t)+B2(t))-1)-1/2*(B1a(t)+B2(t)),t=0..1,36)):
> print(i,j,ww[j],time()):od:
> path1:=cat(path,"\\2w",convert(i,string),".dat"):
  f1:=fopen(path1,WRITE):
  writedata(f1,convert(ww,list)):fclose(f1):od:
```

Данная программа вычисляет значения ключевой функции

$$\tilde{W}_\lambda^1(\xi_1, \xi_2) = V(\tilde{\varphi}_\lambda^1(\xi_1, \xi_2)) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \tilde{v}_\lambda^1)$$

на сетке от -5 до 5 с интервалом 0.2 . Результатом работы программы является 61 файл, каждый содержит 61 вещественное значение ключевой функции на соответствующем уровне $\xi_1 = const$. Файлы находятся согласно заданному пути «РАТН».

Следующая программа, используя результат предыдущей работы, строит график ключевой функции в пространстве переменных ξ_1, ξ_2, W .

```
> restart:path:="PATH":
  w:=array(1..61): w0:=array(1..61):
> for x1 from -30 to 30 do
> i:=31+x1:
> path1:=cat(path,"\\1w",convert(i,string),".dat"):
  f1:=fopen(path1,READ): w[i]:=readdata(f1):
  fclose(f1):
  path2:=cat(path,"\\Rw",convert(i,string),".dat"):
  f2:=fopen(path2,READ):w0[i]:=readdata(f2):
  fclose(f2): od:
> for x1 from -30 to 0 do
> i:=31+x1:
> pl[i]:=[seq([x1/5,(j-31)/5,w[i][j]],j=1..61):
  plR[i]:=[seq([x1/5,(j-31)/5,w0[i][j]],j=1..61)]: od:
> for x1 from 1 to 30 do
> i:=31+x1:
> pl[i]:=[seq([x1/5,(j-31)/5,w[31-x1][j]],j=1..61):
  plR[i]:=[seq([x1/5,(j-31)/5,w0[31-x1][j]],j=1..61)]: od:
> plots[surfdata]([seq(pl[i],i=1..61)],labels=[xi1,xi2,w]):
```

Авторы хотели бы обратить внимание читателя на тот факт, что уже первая нелинейная добавка дает существенное уточнение классической ритцевской аппроксимации (см. рис. 3). Ниже представлены линии уровня, как результат применения соответствующих методов:

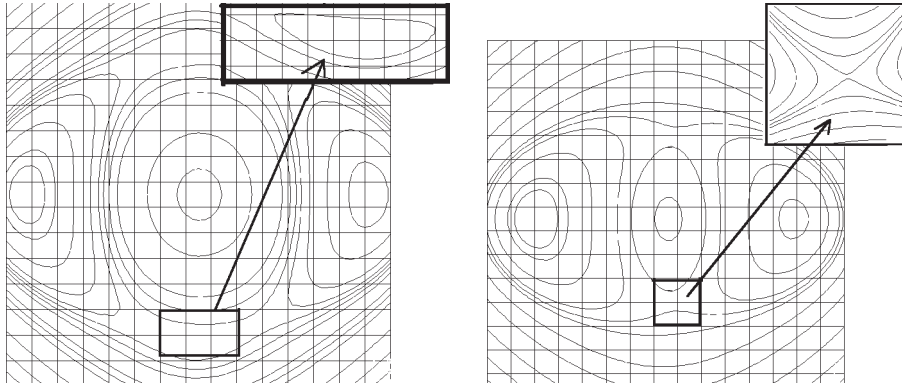


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975. 512 с.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука. 1969. 456 с.
3. Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамдиев Э. М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления. // ДАН СССР. 1978. Т. 240, № 3. С. 530—533.
4. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир. 1980, 608 с.
5. Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.: ОГИЗ. 1948. 170 с.
6. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. М.: Гостехиздат. 1956.
7. Ворovich И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука. 1989. 376 с.
8. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука. 1988. 368 с.
9. Ляпунов А. М. Sur les figures d'équilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, p. 1 // Зап. Акад. наук, С.-Петербург. 1906.
10. Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Theil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und Verzweigung ihrer Losungen// Math. Ann. 1908. V. 65. — P. 370—399.
11. Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир. 1965.
12. Постников М. М. Введение в теорию Морса. М.: Наука. 1971. 568 с.
13. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука, 1972. 1000 с.
14. Conley C. C., Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conyecture of V. I. Arnold's // Invent. Math. 1983. V.73. P. 33—49.
15. Болотин С. В. Периодические решения системы с гироскопическими силами// Прикл. матем. и механ. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 686—687.
16. Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах.// Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 1. С. 101—132.
17. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
18. Бреккер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
19. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков// В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж, ВГУ, 2000. — С. 41—57.
20. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Шалимов В. Л. К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах// Кристаллография. — 1999. — Т. 44, № 4. — С. 1—5.
21. Сидоркин А. С. Доменная структура в сегнетоэлектриках и родственных материалах. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2000. 240 с.
22. Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем// Механика. Периодический сборник переводов иностр. статей. 1960. № 5. С. 99—110.
23. Оден Дж. Конечные элементы в механике сплошных сред. М.: Мир. 1976. 464 с.
24. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben// Göttingener Nachrichten, Mathematik und Physik, Klasse. P. 236—248.
25. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина// М., Мир. 1988.
26. Levchenko O. N., Sapronov Yu. I. Morse-Bott reduction for a symmetric Kirchhoff rod// Methods and Applications of Global Analysis. Voronezh University Press. 1993. P. 95—100.
27. Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах.

- ционных задачах// Матем. заметки. — 2000. Т. 58, № 5. — С. 745—754.
28. Царев С.Л. Глобальное сравнение эквивалентных конечномерных редукций для гладкого G -инвариантного функционала// Труды матем. факультета ВГУ. — Воронеж: ВГУ, 1998. — № 3 (новая серия). — С. 73—76.
29. Галёркин Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. Вестник инженеров, 1915, № 19. — С. 897—908.
30. Лемешко А. А. Об одной схеме построения приближенных конечномерных редукций для функционалов действия классической механики // ВЗМШ-2000 «Современный анализ и его приложения». Тез. докл. — Воронеж, 2000. — С. 109—110.
31. Лемешко А.А. О равномерной сходимости с производными галеркинских приближений к решениям уравнений с параметрами// Математические модели и операторные уравнения. Том 2. Воронеж: ВорГУ, 2003. — С. 94—103.
32. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера// Успехи матем. наук. 1977. Т. 32, вып. 4. С. 3—54.
33. Зачена В.Р., Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений// Воронеж, ВГУ. 2002.
34. Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах. // Матем. заметки. 1991. Т. 49, вып. 1. С. 94—103.
35. Илс Дж. Основания глобального анализа// Успехи матем. наук. — 1969. Т. 24, № 3. — С. 157—210.
36. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир. 1982. 416 с.
37. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
38. Бахвалов И.В., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Издание восьмое// Физматлит. Невский диалект. М.—СПб. — 2000.
39. Царев С.Л. О глобальной распрямляемости гладких функций с единственной критической точкой// Труды матем. факультета ВГУ. — Воронеж: ВГУ, 1996. — № 1 (новая серия). — С. 92—96.
40. Красносельский М.А., Крейн С.Г. Итерационный процесс с минимальными невязками// Матем. сб. 1952. Т. 31 (73), В. 2. С. 315—334.
41. Звягин В.Г. Свойства степени Лере-Шаудера вполне непрерывных векторных полей// Методическая разработка для студентов 3—5 курсов математического факультета д/о и слушателей ФПК. Воронеж 1996.