ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 2

*УДК 517.9*

# ПРОБЛЕМА ПЛАТО И ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

**© 2003 Ю. Г. Борисович, Л. В. Стенюхин**

*Воронежский государственный университет*

В настоящей статье применяется метод условного экстремума в банаховых пространствах к проблеме двумерных минимальных поверхностей. Это позволяет исследовать бифуркации двумерных минимальных поверхностей, а также доказать существование двумерных минимальных поверхностей с ограничениями типа равенств.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема минимальных поверхностей возникла в середине XIX века, когда бельгийский физик Жозеф Плато заметил, что если погрузить проволочный контур в мыльный раствор, то образуется пленка, его затягивающая. Существование такой пленки для спрямляемого контура и составляет содержание проблемы Плато размерности два, которая была решена в середине XX века Дугласом, Радо, Курантом. Многомерная задача Плато решена А. Т. Фоменко [9, 10].

Менее изучена задача о бифуркациях минимальных поверхностей. В этом направлении имеются работы А. А. Тужилина о сопряженных границах [3] (однако условие сопряженности контуру оказалось лишь необходимым условием для бифуркации), А. Ю. Борисовича [8], в которых рассматривалась вторая нормальная вариация функционала площади.

В настоящей статье развивается новый подход к исследованию бифуркаций минимальных поверхностей, основанный на классической теории условного экстремума в линейных банаховых пространствах, развитого в работах Л. А. Люстерника, В. М. Тихомирова и А. Д. Иоффе [4], что позволяет произвольно варьировать функционал Лагранжа. Данный метод позволяет также определить множество направлений вариаций, при которых существует бифуркации, а также установить разрешимость задачи минимальных поверхностей с ограничениями типа равенств.

## 1. ПРОБЛЕМА ПЛАТО

Вариационная задача о 2-мерных минимальных поверхностях в $\mathbf{R}^3$ описывается функционалом Дирихле:

$$E(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$

условиями конформности координат, $u_x^2 = u_y^2$, $u_x u_y = 0$. Здесь $\Omega$ — замкнутый диск в $R^2$, $u \in W_4^2(\Omega)$, граничное условие $Bu \equiv u\,|_{\partial\Omega}$ — гомеоморфизм из $S^1$ в $R^3$. Функциональные методы в теории минимальных поверхностей в 80—90 годы активно исследовались А. Т. Фоменко, Дао Чонг Тхи, A. J. Tromba, А. Ю. Борисовичем и многими другими.

Мы рассмотрим здесь эту задачу, базируясь на методах условного экстремума в банаховых пространствах с операторными связями [3]. Пусть $F_1(u) = u_x^2 - u_y^2$, $F_2(u) = u_x u_y$. Наша задача сводится к исследованию на экстремум функционала Дирихле на множестве

$$M = \{u \in W_4^2(\Omega)\,|\,F_1(u) = 0, F_2(u) = 0\}. \quad (1.2)$$

Предварительно дадим оценки для функций условий конформности $F_1$, $F_2$. Справедлива следующая

**Лемма.** *Определенные ими отображения* $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$ *действуют из* $W_4^2(\Omega)$ *в* $W_2^1(\Omega)$.

## 2. ОПЕРАТОР ПЛАТО–ЛАГРАНЖА

Теперь построим отображение, элементами ядра которого являются минимальные поверхности в конформных координатах.

Построим $F(u) = F_1(u) \oplus F_2(u)$, $F : W_4^2(\Omega) \to$ $\to W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$, тогда $M = \{u \in W_4^2(\Omega)\,|\,F(u) = 0\}$.

Согласно формализму Лагранжа (см. [3]), образуем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u, \lambda^*) = E(u) + \lambda^* F(u), \quad (2.1)$$

$\lambda^* \in W_2^{1*}(\Omega) \oplus W_2^{1*}(\Omega)$. Если $u \in M$ — точка условного экстремума, то она удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{L}_u(u,\lambda^*)=0, \quad \mathcal{L}_{\lambda^*}(u,\lambda^*)=0, \tag{2.2}$$

при некотором ненулевом $\lambda^*$ и задает минимальную поверхность. Будем предполагать, что $u$ — регулярная точка для $F$ (например катеноид, геликоид), т.е. $\operatorname{Im}F'(u)=W_2^1(\Omega)\oplus W_2^1(\Omega)$, где

$$F'(u)=F_1'(u)\oplus F_2'(u)= \\ =\left(2u_x\frac{\partial}{\partial x}-2u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\oplus\left(u_x\frac{\partial}{\partial y}+u_y\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{2.3}$$

Производные Фреше от функции Лагранжа по $u$ и $\lambda^*$ соответственно равны $\mathcal{L}_u(u,\lambda^*)= =\Delta u+F'^*(u)\lambda^*$, $\mathcal{L}_{\lambda^*}(u,\lambda^*)=F(u)$. Здесь $F'^*(u)$ — сопряженный оператор к $F'(u)$ и $F'^*(u): :W_2^{1*}(\Omega)\oplus W_2^{1*}(\Omega)\to W_4^{2*}(\Omega)$. Согласно уравнениям (2.2) множество минимальных поверхностей в конформных координатах — это множество точек $(u,\lambda^*)$, в которых нелинейное отображение

$$\Phi(u,\lambda^*)=\left(\Delta u+F'^*(u)\lambda^*,F(u)\right) \tag{2.4}$$

обращается в нуль и действует следующим образом:

$$\Phi: W_4^2(\Omega)\times(W_2^{1*}(\Omega)\oplus W_2^{1*}(\Omega))\to \\ \to\mathcal{L}_4(\Omega)\times(W_2^1(\Omega)\oplus W_2^1(\Omega)). \tag{2.5}$$

**Определение 1.** *Отображение (2.4) назовем оператором Плато–Лагранжа.*

Отметим некоторые свойства оператора $F^*(u)\lambda^*$:

**Теорема 1.** *Оператор $F^*(u)\lambda^*$ переводит слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся.*

**Доказательство.** Пусть $\{u_n\}\subset W_4^2(D)$ — слабо сходящаяся к $u_0$ последовательность. Согласно равенству (2.3) $F'(u)\eta=F'(\eta)u$, поэтому $(F'^*(u)\lambda^*,\eta)=(\lambda^*,F'(u)\eta)=(F'^*(\eta)\lambda^*,u)$. Для любого $\eta\in W_4^2(D)$ рассмотрим

$$\left|(F'^*(u_n)\lambda^*-F'^*(u_0)\lambda^*,\eta)\right|= \\ =\left|(F'^*(u_n)\lambda^*,\eta)-(F'^*(u_0)\lambda^*,\eta)\right|= \\ =\left|(F'^*(\eta)\lambda^*,u_n)-(F'^*(\eta)\lambda^*,u_0)\right|;$$

заметим, что $\left|(F'^*(\eta)\lambda^*,u_n-u_0)\right|\to 0$, поскольку $\{u_n\}$ слабо сходится к $u_0$, откуда следует слабая сходимость последовательности $(F'^*(u_n)\lambda^*)$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Оператор $F'^*(\cdot)\lambda^*$ ограничен при фиксированном $\lambda^*$.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. что для некоторого ограниченного множества $M\in W_4^2(\Omega)$ множество $F'^*(M)\lambda^*$ не ограничено. Это означает, что $\exists\{F'^*(u_n)\lambda^*\}: :\lim\limits_{n\to\infty}\left\|F'^*(u_n)\lambda^*\right\|=\infty$, $\left\|F'^*(u_n)\lambda^*\right\|<\left\|F'^*(u_{n+1})\lambda^*\right\|$, $\{F'^*(u_n)\lambda^*\}\subset F'^*(M)\lambda^*$. Последовательность $\{u_n\}\subset M$ ограничена, значит, существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}\subset\{u_n\}$, такая что $u_{n_k}\xrightarrow{\text{сл.}}u_0$. По теореме 1, $\{F'^*(u_{n_k})\lambda^*\}$ слабо сходится и ограничена, что противоречит предположению. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Отображение $F'^*$ билинейно на произведении $W_4^2(\Omega)\times(W_2^{1*}(\Omega)\oplus W_2^{1*}(\Omega))$.*

**Доказательство.** Для любых $\lambda_1^*,\lambda_2^*\in \in W_2^{1*}(\Omega)\oplus W_2^{1*}(\Omega)$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}$, $h\in W_4^{2*}(\Omega)$ имеем

$$(F'^*(u)(\alpha_1\lambda_1^*+\alpha_2\lambda_2^*),h)=(\alpha_1\lambda_1^*+\alpha_2\lambda_2^*,F'(u)h)= \\ =\alpha_1(\lambda_1^*,F'(u)h)+\alpha_2(\lambda_2^*,F'(u)h)= \\ =\alpha_1(F'^*(u)\lambda_1^*,h)+\alpha_2(F'^*(u)\lambda_2^*,h)= \\ =(\alpha_1F'^*(u)\lambda_1^*+\alpha_2(F'^*(u)\lambda_2^*,h).$$

Для любых $u_1,u_2\in W_4^2(\Omega)$ имеем

$$F'(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)h= \\ =(2(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)_xh_x-2(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)_yh_y)\oplus \\ \oplus((\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)_xh_y+(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)_yh_x)= \\ =\alpha_1F'(u_1)h+\alpha_2F'(u_2)h.$$

Поэтому

$$(F'^*(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)\lambda^*,h)=(\lambda^*,F'(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)h)= \\ (\lambda^*,\alpha_1F'(u_1)h)+(\lambda^*,\alpha_2F'(u_2)h)= \\ =(\alpha_1F'^*(u_1)\lambda^*+\alpha_2F'^*(u_2)\lambda^*,h).$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Оператор $\Phi$ является $C^\infty$-гладким по совокупности переменных.*

**Доказательство.** Найдем частные производные отображения $\Phi$ по $u$ и по $\lambda^*$. Имеем

$$\Phi_u(u,\lambda^*)h=(\Delta h+F'^*(h)\lambda^*,F'(u)h); \\ \Phi_{\lambda^*}(u,\lambda^*)\xi^*=(F'^*(u)\xi^*,0)$$

для $h\in W_4^2(\Omega),\xi^*\in W_2^{1*}(\Omega)\oplus W_2^{1*}(\Omega)$. Тогда по теореме Шварца о непрерывной дифференцируемости по паре переменных, $\Phi$ — $C^1$-гладко по совокупности переменных $(u,\lambda^*)$. Далее, следуя по индукции, получим бесконечную гладкость. Теорема доказана.

## 3. О БИФУРКАЦИЯХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

На минимальной поверхности $u(x', y')$, заданной в конформных координатах $(x', y')$, меняющихся в области $\Xi \subset \mathbf{R}^2$ рассмотрим контур, заданный краевым условием $u\,|_{\partial\bar{\Omega}_\mu} = \varphi(s)$ где $\Omega_\mu$ — двумерный диск радиуса $\mu$, $\Omega_\mu = \{(x', y') : x'^2 + y'^2 \le \mu^2\} \subset \Xi \subset \mathbf{R}^2, s \in \partial\bar{\Omega}_\mu$. Изучается бифуркация минимальных поверхностей от данной $u$, проходящей через данный контур $\Gamma_\mu = \{u(x', y') : (x', y') \in \partial\bar{\Omega}_\mu\}$. Область на поверхности, ограниченная контуром $\Gamma_\mu$ является условной критической точкой функционала Дирихле

$$D_\mu(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\mu} |\nabla u|^2\, dx' dy', \tag{3.1}$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'})$, при условиях $F_{1\mu}(u) = u_{x'}^2 - u_{y'}^2 = 0$, $F_{2\mu}(u) = u_{x'} u_{y'} = 0$. $F_{1\mu}, F_{2\mu}$ — функциональные отображения, и как показано в предыдущем пункте, $F_{1\mu}, F_{2\mu} : W_4^2(\Omega_\mu) \to W_2^1(\Omega_\mu)$.

С помощью замены независимых переменных

$$x' = \mu x, \;\; y' = \mu y \tag{3.2}$$

с диска $\Omega_\mu$ перейдем на диск единичного радиуса $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. Запишем функционал Дирихле и условия конформности координат в новых координатах $(x, y)$:

$$u_{x'} = \frac{1}{\mu} u_x, \;\; u_{y'} = \frac{1}{\mu} u_y; \;\; dx' = \mu dx, \;\; dy' = \mu dy.$$

$$D_\mu(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega\mu} |\nabla u|^2\, dx' dy' = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{1}{\mu^2} |\nabla u|^2\, \mu dx \mu dy =$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx dy = D(u).$$

Функционал Дирихле инвариантен относительно замены (3.2).

$$F_{1\mu}(u) = u_{x'}^2 - u_{y'}^2 = \frac{1}{\mu^2}(u_x^2 - u_y^2) = \frac{1}{\mu^2} F_1(u);$$
$$F_{2\mu}(u) = u_{x'} u_{y'} = \frac{1}{\mu^2} u_x u_y = \frac{1}{\mu^2} F_2(u).$$

Таким образом

$$F_\mu(u) = F_{1\mu}(u) \oplus F_{2\mu}(u) = \frac{1}{\mu^2}(F_1(u) \oplus F_2(u)).$$

Функция Лагранжа в координатах $(x', y')$:

$$\mathcal{L}_\mu(u, \lambda^*) = D_\mu(u) + \lambda^* F_\mu(u);$$

в координатах $(x, y)$:

$$\mathcal{L}(u, \lambda^*) = D(u) + \frac{1}{\mu^2} \lambda^* F(u). \tag{3.3}$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по $u$ и по $\lambda^*$, получим оператор Плато–Лагранжа в координатах $(x, y)$, который выглядит следующим образом

$$\Phi(u, \lambda^*, \mu) = (\Delta u + \frac{1}{\mu^2} F'^*(u)\lambda^*, \;\; \frac{1}{\mu^2} F(u)). \tag{3.4}$$

Исследуем на существование точек бифуркации задачу

$$\begin{cases} \Phi(u, \lambda^*, \mu) = 0, \\ \;\; u\,|_{\partial\bar{\Omega}} = \varphi(s). \end{cases} \tag{3.5}$$

Линеаризованная по $(u, \lambda^*)$ в точке $(u_0, \lambda_0^*)$ задача имеет вид

$$\begin{cases} \Big(\Delta h + \frac{1}{\mu^2} F'^*(h)\lambda_0^* + \\ + \frac{1}{\mu^2} F'^*(u_0)\xi^*, \frac{1}{\mu^2} F'(u_0) h\Big) = (0, 0) \\ h\,|_{\partial\bar{\Omega}} = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $h \in W_4^2(\Omega)$, $\xi^* \in W_2^{1*}(\Omega) \oplus W_2^{1*}(\Omega)$. После преобразований система (3.6) приобретает вид

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{\mu^2}\lambda_0^{1*}\right) h_{xx} + \left(1 + \frac{2}{\mu^2}\lambda_0^{1*}\right) h_{yy} - \frac{2}{\mu^2}\lambda_0^{2*} h_{xy} - \\ - \frac{1}{\mu^2}(2\lambda_{0x}^{1*} + \lambda_{0y}^{2*}) h_x + \frac{1}{\mu^2}(2\lambda_{0y}^{1*} - \lambda_{0x}^{2*}) h_y = \\ = \frac{1}{\mu^2}(2u_{0x}\xi^{1*} + u_{0y}\xi^{2*})_x - \frac{1}{\mu^2}(2u_{0y}\xi^{1*} - u_{0x}\xi^{2*})_y, \\ u_{0x} h_x - u_{0y} h_y = 0, \\ u_{0x} h_y + u_{0y} h_x = 0, \\ h\,|_{\partial\bar{\Omega}} = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Чтобы применить теорему Крэндалла–Рабиновича из [5] надо вычилить ядро линеаризованного оператора, порожденного задачей (3.6). Для этого необходимо и достаточно установить разрешимость системы уравнений (3.7). В начале исследуем на разрешимость относительно $h$ задачу, определяемую первым и последним уравнениями системы (3.7), то есть задачу

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{2}{\mu^2}\lambda_0^{1*}\right)h_{xx}+\left(1+\dfrac{2}{\mu^2}\lambda_0^{1*}\right)h_{yy}-\dfrac{2}{\mu^2}\lambda_0^{2*}h_{xy}- \\ -\dfrac{1}{\mu^2}(2\lambda_{0x}^{1*}+\lambda_{0y}^{2*})h_x+\dfrac{1}{\mu^2}(2\lambda_{0y}^{1*}-\lambda_{0x}^{2*})h_y= \\ =\dfrac{1}{\mu^2}(2u_{0x}\xi^{1*}+u_{0y}\xi^{2*})_x-\dfrac{1}{\mu^2}(2u_{0y}\xi^{1*}-u_{0x}\xi^{2*})_y, \\ h\,|_{\partial\bar\Omega}=0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Первое уравнение системы (3.8) является уравнением вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_{11}(x,y)h_x+a_{12}(x,y)h_y+a_1(x,y)h)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(a_{21}(x,y)h_x+a_{22}(x,y)h_y+a_2(x,y)h)+$$
$$+b_1(x,y)h_x+b_2(x,y)h_y+a(x,y)h=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+f,$$

где $a_{11}(x,y)=1-\frac{2}{\mu^2}\lambda_0^{1*}$, $a_{22}(x,y)=1+\frac{2}{\mu^2}\lambda_0^{1*}$, $a_{12}(x,y)=a_{21}(x,y)=-\frac{1}{\mu^2}\lambda_0^{2*}$, $a_1(x,y)=a_2(x,y)=$ $=b_1(x,y)=b_2(x,y)=0$, $f_1=\frac{1}{\mu_2}(2u_{0x}\xi^{1*}+u_{0y}\xi^{2*})$, $f_2=-\frac{1}{\mu^2}(2u_{0y}\xi^{1*}-u_{0x}\xi^{2*})$, $f=0$.

Для разрешимости задачи (3.8) воспользуемся теоремами существования и единственности из [6]. Для выполнения этих теорем требуется ограниченность старших коэффициентов $a_{11},a_{22},a_{12},a_{21}$; справедливость неравенства строгой эллиптичности уравнения, т.е.

$$\nu\xi^2\le a_{ij}(x,y)\xi_i\xi_j\le\mu\xi^2, \nu,\mu=const>0; \quad (3.9)$$

неравенства на коэффициенты $a_1,a_2,b_1,b_2,a$:

$$\left\|\sum_{i=1}^{3}a_i^2,\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right\|_{\frac{q}{2},\Omega},\ \ \|a\|_{\frac{q}{2},\Omega}\le\mu,\ \ q>2; \quad (3.10);$$

неравенства, позволяющее оценить $\nabla h$, т.е.

$$[2c_1(q)+\frac{8}{\nu}a_0]c_0^2\,\mathrm{mes}\,\Omega<1, \quad (3.11)$$

где $a_0=\mathrm{mes}^{-1}\Omega\int\limits_\Omega a(x)dx$,

$$c_1(q)=\frac{q-2}{q}\left[\frac{2\|b_1-a_1+b_2-a_2\|_{\frac{q}{2},\Omega}(2\nu+1)2c^2(q)}{\nu^2 q}\right]^{\frac{q}{q-2}}.$$

Заметим, что неравенство (3.10) выполнено, поскольку коэффициенты $a_1,a_2,b_1,b_2,a$ в задаче (3.8) нулевые; неравенство (3.11) также выполнено, поскольку $a_0=c_1(q)=0$ при любом $q>2$, в силу нулевых $a_1,a_2,b_1,b_2,a$. Таким образом, имеет место следующие теоремы.

**Теорема 5.** *Пусть старшие коэффициенты в задаче (3.8) ограничены и выполнено неравенство (3.9). Тогда для любого $\xi^*$ существует и единственно решение задачи (3.8)*

$$h=h(\lambda_0^*,\mu,\xi^*) \quad (3.12)$$

*из пространства $W_{4,0}^2(\Omega)$.*

**Замечание 1.** *Ограниченность старших коэффициентов в системе (3.8) следует из того, что для двумерной области $\Omega$, если $\lambda^*\in W_2^{1*}(\Omega)$, то $\lambda^*\in C^0(\Omega)$.*

Подставляя это решение в уравнения

$$\begin{cases} u_{0x}h_x-u_{0y}h_y=0 \\ u_{0x}h_y+u_{0y}h_x=0, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} u_{0x}(h(\xi^*))_x-u_{0y}(h(\xi^*))_y=0 \\ u_{0x}(h(\xi^*))_y+u_{0y}(h(\xi^*))_x=0, \end{cases} \quad (3.13)$$

Неизвестные $\xi^*$ определяются системой (3.13). Из теоремы 5 следует, что $h$ однозначно определяется $\xi^*$, т.е. решениями системы (3.13).

Теперь вернемся к линеаризованной задаче (3.6) и сформулируем теорему о бифуркации.

**Теорема 6.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*(i) $\xi_0^*$ фиксирован и является решением системы (3.13);*

*(ii) $\mu_0,\lambda_0^*$ такие, что выполнено условие (3.9);*

*(iii) $(\lambda_0^*,F(h_0))\ne0$, где $h_0$ — решение задачи (3.8), соответствующее множителю $\xi_0^*$.*

*Тогда $(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)$ — точка бифуркации минимальной поверхности, определенной задачей (3.5).*

**Доказательство.** Линеаризованный оператор (3.6) на элементе $\xi_0^*$ действует следующим образом

$$\Phi_{(u,\lambda^*)}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)(h,\xi_0^*):W_{4,0}^2(\Omega)\times\{\xi_0^*\}\to$$
$$\to L_4(\Omega)\times W_2^1(\Omega).$$

По теореме 5, существует и единственный $h_0$, то есть ядро линеаризованного оператора (3.6) порождается элементом $(h_0,\xi_0^*)$. Таким образом $\dim\mathrm{Ker}\Phi_{(u,\lambda^*)}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)=1$. Покажем, что $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\Phi_{(u,\lambda^*)}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)=1$. Пусть элемент

$$(\psi_1,\psi_2)\in\mathrm{Im}\,\Phi_{(u,\lambda^*)}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0).$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$((\psi_1,\psi_2),(h_0,\xi_0^*))=(\psi_1,h_0)+(\psi_2,\xi_0^*)=$$

$$=(\Delta h+\tfrac{1}{\mu_0^2}F'^*(h)\lambda_0^*+\frac{1}{\mu_0^2}F'^*(u_0)\xi_0^*,h_0)+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu_0^2}F'(u_0)h,\xi_0^*\right)=(\Delta h,h_0)+\left(h,\frac{1}{\mu_0^2}F'^*(h_0)\lambda_0^*\right)+$$

$$+\left(\xi_0^*,\frac{1}{\mu_0^2}F'(u_0)h_0\right)\left(+h,\frac{1}{\mu_0^2}F'^*(u_0)\xi_0^*\right).$$

Заметим, что $(\xi_0^*,\frac{1}{\mu_0^2}F'(u_0)h_0)=0$, поскольку $h_0$ — компонента ядра, а

$$F'(h_0)h=(2h_{0x}h_x-2h_{0y}h_y)\oplus(h_{0x}h_y+h_{0y}h_x)=$$
$$=F'(h)h_0,$$

поэтому

$$\left(\frac{1}{\mu_0^2}F'^*(h)\lambda_0^*,h_0\right)=\left(\lambda_0^*,\frac{1}{\mu_0^2}F'(h)h_0\right)=$$
$$=\left(\lambda_0^*,\frac{1}{\mu_0^2}F'(h_0)h\right)=\left(h,\frac{1}{\mu_0^2}F'^*(h_0)\lambda_0^*\right).$$

Тогда

$$((\psi_1,\psi_2),(h_0,\xi_0^*))=$$
$$=\left(h,\Delta h_0+\frac{1}{\mu_0^2}F'^*(h_0)\lambda_0^*+\frac{1}{\mu_0^2}F'^*(u_0)\xi_0^*\right)=0,$$

так как $(h_0,\xi_0^*)\in\operatorname{Ker}\Phi_{(u,\lambda^*)}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)$. Из этих вычислений, в частности, следует самосопряженность линеаризованного оператора $\Phi_{(u,\lambda^*)}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)$. Итак,

$$(h_0,\xi_0^*)\perp\operatorname{Im}\Phi(u,\lambda^*)(u_0,\lambda_0^*,\mu_0),$$

откуда и следует, что коразмерность равна единице. Теперь покажем выполнение последнего условия теоремы Крэндалла–Рабиновича, то есть

$$\Phi_{(u,\lambda^*)\mu}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)(h_0,\xi_0^*,1)\notin\operatorname{Im}\Phi_{(u,\lambda^*)}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0).$$

Имеем

$$\Phi_{(u,\lambda^*)\mu}(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)(h_0,\xi_0^*,1)=$$
$$=\left(-\frac{2}{\mu_0^3}F'^*(h_0)\lambda_0^*-\frac{2}{\mu_0^3}F'^*(u_0)\xi_0^*-\frac{2}{\mu_0^3}F'(u_0)h_0\right)=$$
$$=-\frac{2}{\mu_0^3}(F'^*(h_0)\lambda_0^*+F'^*(u_0)\xi_0^*,0),$$
$$((F'^*(h_0)\lambda_0^*)+F'^*(u_0)\xi_0^*,0),(h_0,\xi_0^*))=$$
$$=(F'^*(h_0)\lambda_0^*+F'^*(u_0)\xi_0^*,h_0)=$$
$$=(\lambda_0^*,F'(h_0)h_0)+(\xi_0^*,F'(u_0)h_0)=$$
$$=(\lambda_0^*,F'(h_0)h_0)=(\lambda_0^*,2F(h_0))\neq 0,$$

в силу условия 3 теоремы. Таким образом, $(u_0,\lambda_0^*,\mu_0)$ — точка бифуркации минимальной поверхности. Теорема доказана.

## 4. О БИФУРКАЦИЯХ НЕКОТОРЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Исследуем на бифуркации минимальные поверхности: катеноид, геликоид. В конформных координатах эти поверхности записываются следующим образом.

Катеноид:

$$u(x,y)=(x,\operatorname{ch}x\cos y,\operatorname{ch}x\sin y),\Xi=\mathbf{R}^2;$$

Геликоид:

$$u(x,y)=(\operatorname{sh}x\cos y,\operatorname{sh}x\sin y,y),\Xi=\mathbf{R}^2;$$

$\Xi$ — область определения функции $u(x,y)$.

Пусть $\Omega_\mu$ — двумерный диск радиуса $\mu$,

$$\Omega_\mu=\{(x',y'):x'^2+y'^2\le\mu^2\}\subset\Xi\subset\mathbf{R}^2.$$

Рассмотрим контур, заданный краевым условием

$$u\,|_{\partial\bar\Omega_\mu}=\varphi(s),s\in\bar\Omega_\mu.$$

Изучается бифуркация минимальных поверхностей от данной $u$, проходящей через данный контур

$$\Gamma_\mu=\{u(x',y'):(x',y')\in\partial\bar\Omega_\mu\}.$$

Каждая из этих поверхностей является регулярной точкой отображения $F=(u_x^2-u_y^2)\oplus u_xu_y$.

Образуем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u,\lambda^*)=D(u)+\lambda^*F(u).$$

Нормальная вариация функции Лагранжа имеет вид

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}(u_0+\eta n)=$$
$$=(\Delta u_0,\eta n)+2(\lambda^{1*},u_{0x}(\eta n)_x)-2(\lambda^{1*},u_{0y}(\eta n)_y)+$$
$$+(\lambda^{2*},u_{0x}(\eta n)_y)+(\lambda^{2*},u_{0y}(\eta n)_x)=$$
$$=(\Delta u_0,\eta n)+2(\lambda^{1*},u_{0x}\eta_xn)+2(\lambda^{1*},u_{0x}\eta n_x)-$$
$$-2(\lambda^{1*},u_{0y}\eta_yn)-2(\lambda^{1*},u_{0y}\eta n_y)+(\lambda^{2*},u_{0x}\eta_yn)+ \qquad (4.1)$$
$$+(\lambda^{2*},u_{0x}\eta n_y)+(\lambda^{2*},u_{0y}\eta_xn)+(\lambda^{2*},u_{0y}\eta n_x),$$

где $n$ — нормаль к поверхности, $\eta$ — скалярная функция двух переменных, меняющихся в области $\Omega_\mu$, с нулевыми граничными условиями.

Заметим, что второе, четвертое, шестое, восьмое слагаемые последнего равенства равны нулю, поскольку вектор нормали ортогонален касательным векторам к поверхности.

Для катеноида $u(x,y)=(x, \operatorname{ch} x \cos y, \operatorname{ch} x \sin y)$ третье слагаемое имеет вид

$$2(\lambda^{1*}, u_{0x}\eta n_x) = 2\int_{\Omega_\mu} \lambda^{1*}\eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy,$$

пятое слагаемое имеет вид

$$-2(\lambda^{1*}, u_{0y}\eta n_y) = 2\int_{\Omega_\mu} \lambda^{1*}\eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy,$$

седьмое и девятое слагаемые равны нулю, так как $u_{0x}n_y = 0, u_{0y}n_x = 0$. В результате имеем

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}(u_0+\eta n) =$$
$$= \int_{\Omega_\mu} u_0\Delta(\eta n)dxdy + 4\int_{\Omega_\mu}\lambda^{1*}\eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy =$$
$$= \int_{\Omega_\mu} u_0(\Delta\eta)n\, dxdy + 2\int_{\Omega_\mu}\eta_x u_0 n_x dxdy +$$
$$+2\int_{\Omega_\mu}\eta_y u_0 n_y\, dxdy + \int_{\Omega_\mu} u_0\eta(\Delta n)\, dxdy +$$
$$4\int_{\Omega_\mu}\lambda^{1*}\eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy = \int_{\Omega_\mu}(\Delta\eta)u_0 n\, dxdy -$$
$$+2\int_{\Omega_\mu}\eta(u_{0x}n_x + u_0 n_{xx})\, dxdy + 4\int_{\Omega_\mu}\lambda^{1*}\eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy =$$
$$\int_{\Omega_\mu}\big((\Delta\eta)(x \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{ch}^2 x) - 4\eta x \operatorname{sh} 2x +$$
$$+4\eta\lambda^{1*} \operatorname{ch}^2 x\big)dxdy.$$

Нормальная вариация равна нулю, если

$$(\Delta\eta)(x \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{ch}^2 x) -$$
$$-4\eta x \operatorname{sh} 2x + 4\eta\lambda^{1*} \operatorname{ch}^2 x = 0$$

Получаем задачу

$$\Delta\eta + \frac{4(-x \operatorname{sh} 2x + \lambda^{1*} \operatorname{ch}^2 x)}{x \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{ch}^2 x}\eta = 0. \tag{4.2}$$

Функция $\eta$ имеет нулевые граничные условия.

При

$$\lambda^{1*} = \frac{4x \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x + x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch}^3 x}$$

и с помощью замены независимых переменных (3.2), получим задачу

$$\Delta\eta + \frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2 \mu x}\eta = 0, \eta\,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.3}$$

Найдем другие множители Лагранжа у катеноида. Катеноид $u_0$ является нулевой точкой оператора

$$\Phi(u,\lambda^*,\mu) = (\Delta u + F'^*(u)\lambda^*, F(u)).$$

Катеноид удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, а значит для $u_0$ справедливо равенство

$$F'^*(u_0)\lambda^* = 0. \tag{4.4}$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(F'^*(u_0)\lambda^*, h)_4^{(2)} = (\lambda^*, F'(u_0)h)_2^{(1)} =$$
$$= (\lambda^{1*}, F_1'(u_0)h)_2^{(1)} + (\lambda^{2*}, F_2'(u_0)h)_2^{(1)} =$$
$$= \int_\Omega(\lambda^{1*})'(F_1'(u_0)h)dxdy + \int_\Omega(\lambda^{2*})'(F_2'(u_0)h)dxdy =$$
$$= \int_\Omega(\lambda_x^{1*} + \lambda_y^{1*})(F_1'(u_0)h)dxdy +$$
$$+\int_\Omega(\lambda_x^{2*} + \lambda_y^{2*})(F_2'(u_0)h)dxdy.$$

Условие (4.4) будет выполнено, если

$$\begin{cases}\lambda_x^{1*} + \lambda_y^{1*} = 0,\\ \lambda_x^{2*} + \lambda_y^{2*} = 0.\end{cases} \tag{4.5}$$

Откуда $\lambda^{1*}(x,y) = f_1(x-y), \lambda^{2*}(x,y) = f_2(x-y)$, где $f_1, f_2$ — некоторые $C^\infty$- дифференцируемые функции. Таким образом, множители Лагранжа могут иметь, например, такой вид

$$\lambda_0^* = f_1(x-y) \oplus f_2(x-y). \tag{4.6}$$

**Замечание 2.** *Множители вида (4.6) является всего лишь примером, который не говорит о том, что других множителей нет.*

При

$$\lambda^{1*} = \frac{9x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{4 \operatorname{ch} x}$$

с помощью замены независимых переменных (3.2), получим задачу

$$\Delta\eta + \mu^2\eta = 0, \eta\,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.7}$$

Для геликоида $u(x,y) = (\operatorname{sh} x \cos y, \operatorname{sh} x \sin y, y)$, $\Xi = \mathbf{R}^2$ третье и пятое слагаемые (4.1) равны нулю, поскольку $u_{0x}n_x = 0$, $u_{0y}n_y = 0$, седьмое слагаемое имеет вид

$$(\lambda^{2*}, \eta u_{0x}n_y) = \int_{\Omega_\mu}\lambda^{2*}\eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy,$$

девятое слагаемое имеет вид

$$(\lambda^{2*}, \eta u_{0y} n_x) = \int_{\Omega_\mu} \lambda^{2*} \eta (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh}^2 x) dxdy.$$

В результате имеем

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u}(u_0 + \eta n) = \int_{\Omega_\mu} u_0 \Delta(\eta n) dxdy +$$
$$+2\int_{\Omega_\mu} \lambda^{2*} \eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy =$$
$$= \int_{\Omega_\mu} (\Delta\eta) u_0 n\, dxdy + 2\int_{\Omega_\mu} \eta_x u_0 n_x\, dxdy +$$
$$+2\int_{\Omega_\mu} \eta_y u_0 n_y\, dxdy + \int_{\Omega_\mu} u_0 \eta (\Delta n)\, dxdy +$$
$$+2\int_{\Omega_\mu} \lambda^{2*} \eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy = \int_{\Omega_\mu} (\Delta\eta) u_0 n\, dxdy -$$
$$2\int_{\Omega_\mu} \eta (u_{0x} n_x + u_0 n_{xx})\, dxdy + 2\int_{\Omega_\mu} \lambda^{2*} \eta \operatorname{ch}^2 x\, dxdy =$$
$$= \int_{\Omega_\mu} ((\Delta\eta) y \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - 4\eta y \operatorname{sh} 2x + 2\eta\lambda^{2*} \operatorname{ch}^2 x)\, dxdy.$$

Нормальная вариация равна нулю, если

$$(\Delta\eta) y \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - 4\eta y \operatorname{sh} 2x + 2\eta\lambda^{2*} \operatorname{ch}^2 x = 0.$$

Получаем задачу

$$\Delta\eta + \frac{-4y \operatorname{sh} 2x + 2\lambda^{2*} \operatorname{ch}^2 x}{y \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} \eta = 0, \qquad (4.8)$$

Функция $\eta$ имеет нулевые граничные условия.

При

$$\lambda^{2*} = \frac{y \operatorname{sh} x + 2y \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^3 x}$$

и с помощью замены независимых переменных (3.2), получим задачу

$$\Delta\eta + \frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2 \mu x} \eta = 0, \eta|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (4.9)$$

При

$$\lambda^{2*} = \frac{9y \operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch} x}$$

с помощью замены независимых переменных (3.2), получим задачу

$$\Delta\eta + \mu^2 \eta = 0, \eta|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (4.10)$$

Возвращаясь к теореме 6, отметим следующее. Рассмотрим вторую производную функционала Лагранжа

$$\mathcal{L}_{u(u,\lambda^*)}(u, \lambda^*, \mu)(h, \xi^*) =$$
$$= \Delta h + \frac{1}{\mu^2} F'^*(h)\lambda^* + \frac{1}{\mu^2} F'^*(u)\xi^*.$$

Нас интересует ядро этого оператора. Положим $\xi^* = 0, h = \eta n$ и приравняем к нулю, получим

$$\mathcal{L}_{u(u,\lambda^*)}(u, \lambda^*, \mu)(\eta n, 0) = \Delta(\eta n) + \frac{1}{\mu^2} F'^*(\eta n)\lambda^* = 0.$$

Тогда для первой вариации функционала Лагранжа имеем, в силу самосопряженности,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u}(u_0 + \eta n) = (\Delta u + \frac{1}{\mu^2} F'^*(u)\lambda^*, \eta n) =$$
$$= (u, \Delta(\eta n) + \frac{1}{\mu^2} F'^*(\eta n)\lambda^*) = 0.$$

Таким образом, равенство нулю первой вариации функционала Лагранжа является необходимым условием того, что элемент $(\eta n, 0)$ принадлежит ядру второй производной функционала Лагранжа. Чтобы оно было достаточным, надо найти такое $\lambda^* = \lambda^{1*} + \lambda^{2*}$, чтобы равенство

$$\Delta(\eta n) + \frac{1}{\mu^2} F'^*(\eta n)\lambda^* = 0 \qquad (4.11)$$

было верным.

Для катеноида $\lambda^{1*} = \frac{9x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{4 \operatorname{ch} x}$, пусть $\mu$ — собственное значение задачи (3.3.7), $J(\mu)$ — соответствующая собственная функция. Равенство (4.11) равносильно

$$F_2'^*(J(\mu)n)\lambda^{2*} = -\mu^2 \Delta(J(\mu)n) - F_1'^*(J(\mu)n)\lambda^{1*}.$$

Покажем существование решения $\lambda^{2*}$ этого уравнения. Согласно лемме об аннуляторе, образ оператора $F_2'^*(J(\mu)n)$ равен ортогональному дополнению к ядру оператора $F_2'(J(\mu)n)$. Функция

$$-\mu^2 \Delta(J(\mu)n) - F_1'^*(J(\mu)n)\lambda^{1*}$$

принадлежит образу оператора $F_2'^*(J(\mu)n)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит ортогональному дополнению до ядра оператора $F_2'(J(\mu)n)$, то есть

$$F_2'(J(\mu)n)(-\mu^2 \Delta(J(\mu)n) - F_1'^*(J(\mu)n)\lambda^{1*}) \neq 0.$$

Последнее равенство проверяется непосредственным вычислением. Тогда элемент $(J(\mu)n, 0)$ является ядром второй производной функционала Лагранжа при найденном $\lambda_\mu^*$.

Условие (iii) теоремы 6 выглядит следующим образом

$$2(\lambda_\mu^*, F(J(\mu)n)) = (\lambda_\mu^*, F'(J(\mu)n)J(\mu)n) =$$
$$= (F'^*(J(\mu)n)\lambda_\mu^*, J(\mu)n) =$$
$$-\mu^2(\Delta(J(\mu)n), J(\mu)n) \neq 0,$$

которое проверяется прямым вычислением.

Таким образом, $(u_0, \lambda_\mu^*, \mu)$ — точка бифуркации катеноида.

Для геликоида $\lambda^{2*} = \frac{9y\,\mathrm{sh}\,x}{2\,\mathrm{ch}\,x}$, пусть $\mu$ — собственное значение задачи (4.10), $J(\mu)$ — соответствующая собственная функция. Равенство (4.11) равносильно

$$F_1'^*(J(\mu)n)\lambda^{1*} = -\mu^2\Delta(J(\mu)n) - F_2'^*(J(\mu)n)\lambda^{2*}.$$

Покажем существование решения $\lambda^{1*}$ этого уравнения. Согласно лемме об аннуляторе, образ оператора $F_1'^*(J(\mu)n)$ равен ортогональному дополнению к ядру оператора $F_1'(J(\mu)n)$. Функция

$$-\mu^2\Delta(J(\mu)n) - F_2'^*(J(\mu)n)\lambda^{2*}$$

принадлежит образу оператора $F_1'^*(J(\mu)n)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит ортогональному дополнению до ядра оператора $F_1'(J(\mu)n)$, то есть

$$F_1'(J(\mu)n)(-\mu^2\Delta(J(\mu)n) - F_2'^*(J(\mu)n)\lambda^{2*}) \neq 0.$$

Последнее равенство проверяется непосредственным вычислением. Тогда элемент $(J(\mu)n, 0)$ является ядром второй производной функционала Лагранжа при найденном $\lambda_\mu^*$.

Условие (iii) теоремы 6 выглядит следующим образом

$$2(\lambda_\mu^*, F(J(\mu)n)) = (\lambda_\mu^*, F'(J(\mu)n)J(\mu)n) =$$
$$= (F'^*(J(\mu)n)\lambda_\mu^*, J(\mu)n) =$$
$$= -\mu^2(\Delta(J(\mu)n), J(\mu)n) \neq 0,$$

которое проверяется прямым вычислением.

Таким образом, $(u_0, \lambda_\mu^*, \mu)$ — точка бифуркации геликоида.

**2.** Исследуем на бифуркации плоскость

$$u_0(x, y) = (x, y, 0),$$

определенную на всей плоскости $\mathbf{R}^2$. Поверхность задана в конформных координатах.

Для нее $u_x = (1,0,0)$, $u_y = (0,1,0)$. Значение оператора $F'(u)$ на элементе $h = (h^1, h^2, h^3) \in W_4^2(\Omega)$ равно $F'(u)h = (2h_x^1 - 2h_y^2) \oplus (h_y^1 + h_x^2)$, который принадлежит пространству $W_4^1(\Omega) \oplus W_4^1(\Omega)$, но не всему пространству $W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$. Следовательно данная поверхность не является регулярной точкой отображения $F$.

Пусть $\Omega_\mu$ — двумерный диск радиуса $\mu$,

$$\Omega_\mu = \{(x', y') : x'^2 + y'^2 \le \mu^2\} \subset \Xi \subset \mathbf{R}^2.$$

Рассмотрим контур, заданный краевым условием

$$u\,|_{\partial\bar{\Omega}_\mu} = \varphi(s), s \in \bar{\Omega}_\mu.$$

Изучается бифуркация минимальных поверхностей от данной $u$, проходящей через данный контур

$$\Gamma_\mu = \{u(x', y') : (x', y') \in \partial\bar{\Omega}_\mu\}.$$

С помощью замены независимых переменных (3.2) с диска $\Omega_\mu$ перейдем на диск единичного радиуса $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. В силу того, что плоскость — вырожденная поверхность для отображения $F$, согласно правилу множителей Лагранжа, $u_0 = (x, y, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{\mu^2}F'^*(u)\lambda^*, \frac{1}{\mu^2}F(u)\right) = (0, 0),$$

которое равносильно уравнению

$$(F'^*(u)\lambda^*, F(u)) = (0, 0).$$

В последнем уравнении отсутствует параметр бифуркации.

Найдем множитель Лагранжа $\lambda_0^*$ для нулевой минимальной поверхности

$$u(x, y) = (0, 0, 0)$$

**Утверждение 1.** *Для нулевой минимальной поверхности $\lambda_0^*$ может быть любым из пространства $W_2^{1*}(\Omega) \oplus W_2^{1*}(\Omega)$.*

**Доказательство.**

$$F'(u) = \left(2u_x\frac{\partial}{\partial x} - 2u_y\frac{\partial}{\partial y}\right) \oplus \left(u_x\frac{\partial}{\partial y} + u_y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Поэтому $F'(0) = 0$, а значит $F'^*(0) = 0$. Уравнение

$$\frac{1}{\mu^2}F'^*(0)\lambda^* = 0$$

верно для любого $\lambda^*$. Утверждение доказано.

## 5. РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ПЛАТО С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

Задача о существовании двумерных минимальных поверхностей с ограничениями типа равенств в конформных координатах описывается функционалом Дирихле $E(u) =$

$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dxdy$, $\Omega$ — двумерный замкнутый диск, $u \in W_4^2(\Omega)$ с граничным условием $Bu \equiv \equiv u\,|_{\partial\Omega} = \varphi(s)$, $s \in \partial\Omega$ и условием $u(x_0, y_0) = c_0 = = const$ в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Аналогично пункту 2, образуем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u, \lambda^*) = E(u) + \lambda^* F(u) + \lambda(u(x_0, y_0) - c_0),$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$. Дифференцируя по $u$ функцию Лагранжа, получим

$$\mathcal{L}_u(u, \lambda^*, \lambda)h = E'(u)h + F'^*(u)\lambda^* h + \lambda h(x_0, y_0).$$

Значение функции $h$ в точке $(x_0, y_0)$ можно представить так

$$h(x_0, y_0) = \int\limits_{\Omega} \delta(x - x_0, y - y_0) h(x, y) dxdy,$$

где $\delta(x - x_0, y - y_0)$ — $\delta$-функция Дирака. Заменяем $\delta$-функцию на гладкие функции $\delta_\varepsilon$, близкие по норме к $\delta$. В итоге условные критические точки есть нулевые точки оператора

$$\Phi_\varepsilon(u, \lambda^*, \lambda) = (\Delta u + F'^*(u)\lambda^* + \lambda\delta_\varepsilon, F(u)) = (0, 0) \tag{5.1}$$

с граничным условием $Bu = \varphi(s)$. Выражение (5.1) записывается системой уравнений

$$\begin{cases} (1 - 2\lambda^{1*})u_{xx} + (1 + 2\lambda^{1*})u_{yy} - 2\lambda^{2*}u_{xy} - \\ -(2\lambda_x^{1*} + \lambda_y^{2*})u_x + (2\lambda_y^{1*} - \lambda_x^{2*})u_y = -\lambda\delta_\varepsilon, \\ u_x^2 - u_y^2 = 0, \\ u_x u_y = 0, \\ Bh = \varphi(s). \end{cases} \tag{5.2}$$

Первое уравнение системы (5.2) является уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_{11}(x, y)u_x + a_{12}(x, y)u_y + a_1(x, y)u) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(a_{21}(x, y)u_x + a_{22}(x, y)u_y + a_2(x, y)u) +$$
$$+ b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + a(x, y)u = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + f,$$

где $a_{11}(x, y) = 1 - 2\lambda_0^{1*}$, $a_{22}(x, y) = 1 + 2\lambda_0^{1*}$, $a_{12}(x,y) = = a_{21}(x, y) = -\lambda_0^{2*}$, $a_1(x, y) = a_2(x, y) = b_1(x, y) = = b_2(x, y) = a(x, y) = 0$, $f_1 = f_2 = 0$, $f = \lambda\delta_\varepsilon$.

Для разрешимости задачи

$$\begin{cases} (1 - 2\lambda^{1*})u_{xx} + (1 + 2\lambda^{1*})u_{yy} - 2\lambda^{2*}u_{xy} - \\ -(2\lambda_x^{1*} + \lambda_y^{2*})u_x + (2\lambda_y^{1*} - \lambda_x^{2*})u_y = -\lambda\delta_\varepsilon, \\ Bh = \varphi(s). \end{cases} \tag{5.3}$$

воспользуемся теоремами существования и единственности из [6]. Неравенства (3.10) и (3.11) выполняются. Отметим также, что $\|f\|_{\frac{2n_1}{n_1+2}, \Omega} = \|\lambda\delta_\varepsilon\|_{\frac{2n_1}{n_1+2}, \Omega} < \infty$; $n_1 = 2 + \delta, \delta > 0$ для любого $\varepsilon > 0$, поскольку гладкие функции $\delta_\varepsilon$ суммируемы с любой степенью $p \geq 2$. Таким образом имеет место следующая теорема.

**Теорема 7.** *Если выполнено неравенство (3.9), то для любых $\varepsilon$ и $\lambda$ существует и единственно решение задачи (5.3) $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\lambda^*, \lambda)$ из пространства $W_4^2(\Omega)$ и при $\varepsilon \to 0$ выполнено неравенство*

$$\left(\|u_\varepsilon\|_{4,\Omega}^{(1)}\right)^2 \leq c_1 \int\limits_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dxdy \leq c_2\left(\|\lambda\delta_{\varepsilon_0}\|_{\frac{2n_1}{n_1+2}, \Omega}\right)^2, \tag{5.4}$$

*где $\delta_{\varepsilon_0}$ такая функция, что* $\operatorname{supp}\delta_{\varepsilon_0} = \bar{\Omega}$.

Неравенство (5.4) показывает ограниченность последовательности $u_\varepsilon$, а значит и ее слабую сходимость.

Заметим, что $u_\varepsilon$ являются также и обобщенными решениями задачи (5.3). По определению обобщенного решения имеем

$$\int\limits_{\Omega} [(1 - 2\lambda^{1*})u_{\varepsilon x}\eta_x + (1 + 2\lambda^{1*})u_{\varepsilon y}\eta_y - \lambda^{2*}u_{\varepsilon x}\eta_y - -\lambda^{2*}u_{\varepsilon y}\eta_x] dxdy = \int\limits_{\Omega} \lambda\delta_\varepsilon \eta dxdy, \tag{5.5}$$

для любой $\eta \in C^\infty(\Omega)$. Рассмотрим следующий предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} [(1 - 2\lambda^{1*})u_{\varepsilon x}\eta_x + (1 + 2\lambda^{1*})u_{\varepsilon y}\eta_y - \lambda^{2*}u_{\varepsilon y}\eta_x] dxdy =$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} \lambda\delta_\varepsilon \eta\, dxdy = \int\limits_{\Omega} \lambda\delta(x - x_0, y - y_0)\eta(x, y) dxdy.$$

Обозначим

$$\int\limits_{\Omega} L(\lambda^*)u_\varepsilon \eta_x\, dxdy =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} [(1 - 2\lambda^{1*})u_{\varepsilon x}\eta_x + (1 + 2\lambda^{1*})u_{\varepsilon y}\eta_y -$$
$$-2\lambda^{2*}u_{\varepsilon x}\eta_y - 2\lambda^{2*}u_{\varepsilon y}\eta_x]\, dxdy.$$

Последовательность $L(\lambda^*)u_\varepsilon$ слабо сходится к $\lambda\delta(x - x_0, y - y_0)$. Тем самым мы установили разрешимость задачи минимальных поверхностей с дополнительными ограничениями типа равенств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисович Ю.Г.,Стенюхин Л.В.* Проблема Плато и условный экстремум // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ. — Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 24—28.

2. *Борисович Ю.Г.,Стенюхин Л.В.* Методы глобального анализа в теории бифуркаций минимальных поверхностей // Труды математического факультета ВГУ, Вып. 5. — Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 24—32.

3. *Тужилин А.А.* Индексы типа Морса двумерных минимальных поверхностей в $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{H}^3$ // Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 1991, С. 581—607.

4. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.

5. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с.

6. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука. 1973. 576 с.

7. *Tromba A.J.* On the number of simply connected minimal surfaces a curve // Memoroirs of the AMS. 1977. Vol. 12, № 194.

8. *Борисович А.Ю.* Оператор Плато и бифуркации двумерных минимальных поверхностей // Глобальный анализ и математическая физика. Воронеж, ВГУ. 1987. — С. 142—155.

9. *Фоменко А.Т.* Вариационные методы в топологии. М., 1982.

10. *Дао Чонг Тхи* Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато // ИАН СССР, 1980, 44, № 5, С. 1031—1065.