МАТЕМАТИКА

УДК 519.86

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАМЕЩЕНИЕМ КОНЕЧНОГО ПРОДУКТА

© 2003 Н. Б. Баева

Воронежский государственный университет

Модель сопряжения производственных и распределительных процессов рассмотрена как линейная модель Леонтьева с матрицей замещения конечных продуктов. Аналитическое решение дифференциального уравнения, содержащего матрицу замещения, найдено на основе построения матрицы импульсных переходных функций и сигнальной функции, подаваемой на вход системы, в качестве которой использована дельта-функция Дирака.

ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью настоящего времени является быстроменяющаяся конъюнктура спроса на различные виды продукции и поэтому одной из важнейших проблем развития экономики является оценка последствий принятия решений, как связанных с выбором изделий, которые предполагается выпускать, так и связанных с тем, как организовать реализацию выпущенной продукцию. В русле этого лежат исследования экономической динамики (ЭД) производственно-распределительных процессов (ПРП). Различные аспекты экономической динамики производственно-распределительных процессов рассмотрены в ряде работ [см. напр., 1, 2, 3, 4, 5]. Вместе с тем отдельные стороны проблемы исследованы недостаточно. Это касается, прежде всего, способа учета конечного продукта.

В настоящей статье предлагается вектор конечного продукта, вводимый в модель экономической динамики производственно-распределительных процессов обычно как фиксированный, заменить вектором, который строится на основе матрицы замещения конечного продукта. Последнее позволило получить задачу управления линейными системами и решать ее, используя хорошо, с точки зрения, аналитических и численных подходов, разработанной теории. При получении основных результатов использовались подходы, реализованные в работах [6, 7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Традиционно в основу моделирования экономической динамики смешанных процессов закладывается модель Леонтьева

$$A(t)X(t) + K(t)\dot{X}(t) + Y_{\Omega}(t) = \\ = X(t), X(t) \in \Omega, X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X(t)$ — вектор валового общественного продукта; $Y_{\Omega}(t)$ — вектор, включающий «конечное использование» капитальных вложений и средства, затрачиваемые на ремонт и возмещение выбытия основных фондов; $\dot{X}(t)$ — вектор приростов продукции по отраслям; $A(t)$ — матрица коэффициентов прямых затрат по предметам труда; $K(t)$ — матрица коэффициентов приростной фондоемкости среднегодовых основных производственных фондов.

Если $Y_{\Omega}(t), A, K$ заданы с определенностью для каждого промежутка времени t, то для получения решения на основе соотношения (1) достаточно использовать выражение:

$$X(t) = e^{\tilde{A}(t-t_0)}X(t_0) - \int_{t_0}^{t} e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{Y}(\tau)d\tau, \\ \text{где } \tilde{A} = K^{-1}(E-A). \tag{2}$$

Может возникнуть ситуация, когда решение на основе (1) недопустимо, т.е. полученное решение $X(t)$ не принадлежит Ω, где Ω допустимая область возможного изменения вектора X_t, которая предполагается замкнутым подмножеством евклидова пространства, и нередко описывается на основе задания двусторонних ограничений на переменные X. Тогда возникает необходимость изменения некоторых параметров уравнения (1). Существует два наиболее часто используемых подхода к заданию величины $Y(t)$. В первом случае, величину $Y(t)$ полагают равной константе: $Y(t)=Y_0$. Во втором случае, для изменения величины $Y(t)$ задается промежуток допустимых значений, т.е. $Y(t)\in[\underline{Y},\bar{Y}]$. Например, такой подход рассмотрен в работе Леонтьева [4].

Мы предлагаем ввести матрицу замещения конечного продукта $H=(h_{ij},i,j=\overline{1,n})$. Ее элементы h_{ij} характеризуют количество продукта i-ой отрасли, способное заместить единицу продукции j-й отрасли в сфере потребления. Вектор конечного продукта в этом случае представим в виде

$$Y(t)=H(t)\cdot U(t),\ \ t=1,T.$$

Здесь $U(t)$ — сигнальная функция, координата которой $U_j(t)$ воспроизводит возможное изменение конечного продукта j-й отрасли. Предположим, что кроме того, заданы начальные значения $X(t_0)=X_0, Y(t_0)=Y_0$, тогда система (1) перепишется в виде

$$\begin{gathered} A(t)X(t)+K(t)\dot{X}(t)+H(t)u(t)=X(t), \\ X(t)\in\Omega_t. \end{gathered} \tag{3}$$

Итак, вместо задачи (1) с фиксированным в каждый момент времени вектором конечного продукта мы будем рассматривать задачу управления линейными системами (3). Один из способов получения решения на ее основе мы рассмотрим ниже.

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАМЕЩЕНИЕМ КОНЕЧНОГО ПРОДУКТА

Покажем, что решение матричного дифференциального уравнения (3) может быть найдено в виде

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\xi)u(\xi)d\xi, \tag{4}$$

где $G(t,\xi)$ — матрица импульсных переходных функций (будет рассмотрена ниже); $u(\xi)$ — сигнальная функция, поданная на вход системы.

В качестве сигнальной функции будем использовать *дельта-функцию Дирака*

$$\delta(z)=0\ \ (z\neq 0),\ \ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)d\xi=1.$$

Возбудим систему (3) сигналом, поданным на j-ый вход в виде дельта-функции, т.е. $u_j=\delta(t-\xi),\xi\in[t_0,t]$, при этом $u_s=0,(s\neq j)$ и проанализируем реакцию на это предварительно невозбужденной линейной системы.

На i-ом выходе тогда появится выходной сигнал — импульсная переходная функция, которую обозначим через $g_{ij}(t,\xi)$. Причем, заметим, что сигнал поданный на j-ый вход системы, вызовет разную реакцию системы по разным выходам. Т.е. получим столбец

$$g_j(t,\xi)=(g_{1j}(t,\xi),g_{2j}(t,\xi),\dots,g_{nj}(t,\xi))^T, \tag{5}$$

характеризующий сигнал на выходах системы инициированный возбуждением j-го входа системы.

Подадим на каждый из n входов системы оригинальный сигнал, тогда для одного и того же выхода системы i сформируется l разных импульсных переходных функций. Т.е. получим строку

$$g_i(t,\xi)=(g_{i1}(t,\xi),g_{i2}(t,\xi)\dots,g_{il}(t,\xi)),$$

характеризующую импульсную переходную функцию на i-ом выходе, инициированную сигналами, поданными на различные входы системы.

Таким образом, многомерная линейная система с l входами и с n выходами характеризуется nl импульсными переходными функциями $g_{ij}(t,\xi)(i=1,2,\dots,n;j=1,2,\dots,l)$

$$G(t,\xi)=\begin{pmatrix} g_{11}(t,\xi) & g_{12}(t,\xi) & \dots & g_{1l}(t,\xi) \\ g_{21}(t,\xi) & g_{22}(t,\xi) & \dots & g_{2l}(t,\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{11}(t,\xi) & g_{12}(t,\xi) & \dots & g_{1l}(t,\xi) \end{pmatrix}.$$

Так как выходные сигналы не могут появиться раньше, чем будет подан входной сигнал, то для реальных систем верно ограничение $g_{ij}(t,\xi)=0$ при $t<\xi$. Это свойство реальных систем называется *условием физической осуществимости.*

Для определения матрицы $G(t,\xi)$ уравнение (1) заменим эквивалентным соотношение

$$X = T_\Phi(t)C + \int_t^{t_0} T_\Phi(t)[T_\Phi(t')]^{-1}(-1)Y(t')dt'.$$

Здесь $T_\Phi(t)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1). Для невозбужденной системы в начальный момент времени $t = t_0$ верно, что $X(t) = 0 \Rightarrow C = 0$. Отсюда

$$X = \int_t^{t_0} T_\Phi(t)[T_\Phi(t')]^{-1}[K(t')]^{-1}(-l)Y(t')dt'.$$

Тогда сигнал на выходах из системы численно равен X, т.е.

$$g_j(t,\xi) = \int_t^{t_0} T_\Phi(t)[T_\Phi(t')]^{-1}[K(t')]^{-1}h_j(t')\cdot\delta(t'-\xi)dt'.$$

В силу определения дельта-функции Дирака получаем

$$g_j(t,\xi) = T_\Phi(t)[T_\Phi(\xi)]^{-1}[K(\xi)]^{-1}h_j(\xi) \quad \forall j.$$

Соответственно, матричная импульсная переходная функция может быть записана в виде:

$$G(t,\xi) = T_\Phi(t)[T_\Phi(\xi)]^{-1}[K(\xi)]^{-1}H(\xi). \qquad (6)$$

Напомним, что $G(t,\xi)$ — решение матричного дифференциального уравнения

$$K\dot{G} = (E-A)G + Hu, \qquad (7)$$

при условии $G(\xi-0,\xi) = 0, u = \delta(t-\xi), \xi \in [t,t_0]$, $u_s = 0\ (s \neq j)$.

Подставив полученное выражение (6) в левую часть дифференциального уравнения (1), получим

$$K\dot{G} = K\dot{T}_\Phi(t)[T_\Phi(\xi)]^{-1}[K(\xi)]^{-1}H(\xi) =$$

$$(E-A)[T_\Phi(\xi)]^{-1}[K(\xi)]^{-1}H(\xi) = (E-A)G.$$

Следовательно, $G(t,\xi)$ можно рассматривать как решение однородного матричного уравнения $K\dot{G} = (E-A)G$, удовлетворяющего условию $G(\xi-0,\xi) = [K(\xi)]^{-1}H(\xi)$.

Так как в предварительно не возбужденной системе связь между матрицей выходных сигналов X и матрицей входных сигналов и определяется следующим образом

$$X = \int_{t_0}^{t} T_\Phi(t)[T_\Phi(t')]^{-1}[K(t')]^{-1}H(t')udt',$$

то, умножив далее уравнение (6) справа на $u(\xi)$ и проинтегрировав обе его части по ξ от $-\infty$ до ∞, получим:

$$K(t)\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\xi)u(\xi)d\xi =$$

$$= (E-A)\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\xi)u(\xi)d\xi + H(t)\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\delta(t-\xi)d\xi.$$

В силу определения дельта-функции Дирака:

$$K(t)\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\xi)u(\xi)d\xi =$$

$$= (E-A)\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\xi)u(\xi)d\xi + H(t)u(t).$$

Сравнивая полученную запись с записью (1) получаем, что решением уравнения (1) является $\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\xi)u(\xi)d\xi.$

Таким образом доказано важнейшее утверждение о том, что решение уравнения (3) может быть получено на основе (4).

Далее, принимая во внимание, что $u(\xi) = 0,$ при $\xi < t_0$ (это ограничение соответствует тому, что система до момента времени t_0 находилась в невозбужденном состоянии), и учитывая *условия физической осуществимости*, имеем $G(t,\xi) \equiv 0, \xi < t_0; G(t,\xi) \equiv 0, \xi > t,$ и поэтому (4) может быть записан в виде

$$X = \int_{t_0}^{t} G(t,\xi)u(\xi)d\xi.$$

Уточним полученное для отыскания решения выражение (4), рассмотрев входной сигнал в виде интеграла от дельта-функции Дирака:

$$\int_{t_0}^{t} G(t,t')\int_{t_0}^{t'}\delta(\tau-\xi)d\tau\cdot dt' = \int_{t_0}^{t} G(t,t')1(t'-\xi)dt' =$$

$$= \int_{\xi}^{t} G(t,t')1(t'-\xi)dt' = \int_{\xi}^{t} G(t,t')dt'.$$

Реакцию системы на единичную ступенчатую функцию $1(t,\xi)$ называют обычно *переходной функцией*. Матрицу $F(t,\xi) = \int_{\xi}^{t} G(t,t')dt'$ можно при этом рассматривать как *матрицу переходных функций*. Напомним, что, используя преобразование Лапласа и учитывая, что симметричной единичной функцией является

$$J(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \\ 1, & z > 0, \end{cases}$$

получим

$$\int_{t_0}^{t} \delta(\tau-\xi)d\tau = J(t-\xi).$$

Продифференцировав $F(t,\xi)$ по ξ получим выражение матрицы импульсных переходных функций через матрицу переходных функций:

$$G(t,\xi) = \frac{-\partial F(t,\xi)}{\partial \xi}.$$

Известно, что матрицу переходных функций можно рассматривать как решение дифференциального уравнения

$$K(t)\dot{F} = (E - A(t))F + H(t)J(t-\xi)$$

при начальном условии $F(\xi - 0, \xi) = 0$ [6].

Допустим теперь, что к рассматриваемому моменту времени $\bar{\xi}$, в который происходит входное воздействие, система уже находится в возбужденном состоянии. Т.е. $X(\bar{\xi}-0) = x_{\bar{\xi}}$, $(x_{\bar{\xi}} \neq 0)$. Найдем такой сигнал $f(t,\bar{\xi})$, чтобы подав его на вход предварительно невозбужденной системы в начальный момент, получить к моменту времени $\bar{\xi}+0$ импульсную переходную функцию на выходе, соответствующую состоянию выходов системы, которая уже находится в возбужденном состоянии. Т.е. найдем $f(t,\xi)$ такую, что она будет удовлетворять уравнению:

$$K(t)\hat{X} = (E - A(t))\hat{X} + H(t)u(t)1(t-\xi) + f(t,\xi), \quad (*)$$

при условии $\hat{X}(\bar{\xi}-0) = 0$. Причем решение этого уравнения при $t \geq \bar{\xi}+0$ должно совпадать с решением исходного уравнения, соответствующего системе в возбужденном состоянии. Т.е. $\hat{X}(t) = X(t)1(t-\xi)$. Продифференцируем по t:

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}1(t-\xi) + X(t)\delta(t-\xi).$$

Подставим в (*) полученное выражение

$$(E - A(t))\hat{X} + H(t)u(t)1(t-\xi) + f(t,\xi) =$$

$$= (E - A(t))\hat{X} + H(t)u(t)1(t-\xi) + K(t)X(t)\delta(t-\xi).$$

Отсюда получаем $f(t,\xi) = K(t)X(t)\delta((t-\xi)$ или в силу непрерывности выходной функции X от ξ имеем $f(t,\xi) = K(\xi)X(\xi)\delta((t-\xi)$.

В случае стационарной системы матрицы $K, (E-A), H$ (а, следовательно, и Y) являются стационарными матрицами.

Фундаментальная матрица однородного векторно-матричного уравнения примет тогда следующий вид: $T_\Phi(t) = e^{Qt}$, где $Q = K^{-1}(E-A)$. Обозначим $G(t-\xi, 0) = G(t-\xi)$ (т.е. будем рассматривать момент приложения воздействия равным не ξ, а 0, соответственно реакция системы на выходе будет рассмотрена в момент времени $(t-\xi)$). Тогда, матрица импульсных переходных функций стационарной системы запишется в виде:

$$G(t-\xi) = e^{Q(t-\xi)}K^{-1}H.$$

Пусть Q_g — жорданова форма матрицы Q, а W — соответствующая преобразующая матрица, тогда

$$G(t-\xi) = We^{Q_g(t-\xi)}W^{-1}K^{-1}H.$$

Положим $W^{-1} = M$ и пусть $Q_g = diag(Q_{g1}(\lambda_1), \ldots, Q_{gp}(\lambda_p))$, где $Q_{gi}(\lambda_i) = \lambda_i E_{1Q} + H_{1Q}$. Представляя $W = (W_1, \ldots, W_p)$ и $M = col(M_1, \ldots, M_p)$ — блочные матрицы размерностью: $W_i \Rightarrow n \times k_i$; $M_i \Rightarrow k_i \times n$ можем записать

$$G(t-\xi) = \sum_{i=1}^{p} W_i Z_i(t-\xi) M_i K^{-1}H,$$

где

$$Z_i(t-\xi) = e^{Q_{gi}(\lambda_i)(t-\xi)} =$$

$$= e^{\lambda_i(i-\xi)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & (t-\xi) & \frac{(t-\xi)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t-\xi)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} \\ 0 & 1 & (t-\xi) & \cdots & \frac{(t-\xi)^{k_i-2}}{(k_i-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

То есть, рассмотрение задачи (1) с решением (2) в качестве задачи оптимального управления линейными системами на основе матрицы замещений конечного продукта, позволило записать систему (1) в виде (3) и построить решение системы (3) в следующем виде:

$$X(t,\bar{\xi}) = \int_{t_0+\bar{\xi}}^{i+\bar{\xi}} G(t-\xi)u(\xi)d\xi, \quad (9)$$

где $G(t-\xi) = \sum_{i=1}^{p} W_i Z_i(t-\xi) M_i K^{-1}H$, а $Z_i(t-\xi)$ представимо в виде (8).

ИСПРАВЛЕНИЕ НЕКОРРЕКТНОСТИ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

При использовании любых моделей, в основу которых положен принцип возмещения и наращивания основных фондов, сталкиваются с проблемой плохой обусловленности матрицы K. Дело в том, из-за объективных экономических предпосылок в матрице K могут образовываться нулевые строки и нулевые столбцы, означающие независимость некоторой отрасли (в смысле приростной фондоемкости) от других. А потому задачи (1) и (3), строго говоря, некорректны, а их решения в виде (2) и (6) соответственно условны.

Существуют следующие три подхода, позволяющие исправлять некорректность указанных задач. Первый состоит в использовании специального способа агрегирования матрицы K, при котором она преобразуется в матрицу $\bar{K}$, избавленную от нулевых столбцов и строк. Второй — во введении на места нулевых элементов α_{ij} таких, чтобы определитель матрицы $K(\alpha)$ отличался от определителя K на более, чем на $\varepsilon(\alpha)$, третий — в преобразовании моделей (1) и (3) в новые, путем использования структуры матрицы K. На третьем способе остановимся подробнее.

Представим матрицы A, K в виде подматриц:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Теперь предположим, что K_{11} — обратима, а $K_{21} = K_{22} = 0$. Представляя вектора $X(t), \dot{X}(t), Y(t)$ соответствующим образом, состоящими из подвекторов, подставим их, а также представление (10) в исходную систему (1).

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

В результате несложных преобразований мы приходим к системе:

$$\begin{cases} (E - A_{11})X_1 - A_{12}X_2 - K_{11}\dot{X}_1 - K_{12}\dot{X}_2 = Y_1, \\ (E - A_{22})X_2 - A_{21}X_1 = Y_2. \end{cases} \tag{11}$$

Выразим из второго уравнения X_2 и найдем ее производную:

$$X_2 = (E - A_{22})^{-1}(Y_2 + A_{21}X_1)$$

$$\dot{X}_2 = (E - A_{22})^{-1} A_{21}\dot{X}.$$

Подставим X_2 и $\dot{X}_2$ в первое уравнение системы (11) и получим:

$$X_1 - (A_{11} + A_{12}(E - A_{22})^{-1} A_{21})X_1 -$$
$$-(K_{11} + K_{12}(E - A_{22})^{-1} A_{21})\dot{X}_1 =$$
$$= Y_1 + A_{12}(E - A_{22})^{-1} Y_2.$$

Сделав замену переменных, получим новое дифференциальное уравнение:

$$\bar{A}X_1 + \bar{K}\dot{X}_1 + \bar{Y}(t) = X_1, \tag{12}$$

где

$$\bar{A} = A_{11} + A_{12}(E - A_{22})^{-1} A_{21}$$

$$\bar{K} = K_{11} + K_{12}(E - A_{22})^{-1} A_{21}$$

$$\bar{Y} = Y_{11} + A_{12}(E - A_{22})^{-1} Y_2.$$

Предполагая, что $X_1(t_0) = X_0, t = \overline{1.T}$, решив (12), получим выражение аналогичное (2), но с матрицами уравнения (12)

$$X(t) = x_0 e^{\bar{K}^{-1}(E-\bar{A})(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{\bar{K}^{-1}(E-\bar{A})(t-\tau)} \bar{K}^{-1} Y(\tau) d\tau. \tag{13}$$

Таким образом, воспользовавшись особенностями структуры матрицы K, мы упростили исходную систему и получили решение в виде пригодном для практического использования, исправив тем самым некорректность (1) и (3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенного анализа возможности представления модели экономической динамики производственно-распределительных процессов Леонтьева в виде задачи управления линейными системами, был создан программный комплекс, позволяющий за приемлемое время получить решение в виде (9). Тестирование программного комплекса проводилось на данных агрегированного межотраслевого баланса Воронежской области за 1998 год. Для задач, имеющих решение в виде (2) было получено совпадение результатов с решением в виде (9) с приемлемой точностью. Для задач, не имеющих решения в смысле (2), применение матрицы замещений позволило получить решение в виде (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТРЫ

1. *Макаров В.Л.* Математическая теория экономической динамики и равновесия / В. Л. Макаров, А. М. Рубинов, — М.: Наука, 1973.

2. *Леонтьев В.* Межотраслевая экономика / В. Леонтьев. — М.: Экономика, 1997. — 250 с.

3. *Красс Н.А.* Математические модели экономической динамики / Н. А. Красс. — М., 1976. — 278 с.

4. *Коссов В.В.* Межотраслевой баланс / В. В. Коссов. — М., 1966. — 222 с.

5. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс // Вып. 2. — 1974. — 192 с.

6. *Колемаев В.А.* Математическая экономика / В. А. Колемаев. — М., ЮНИТИ, 1998. — 239 с.

7. *Абагрян К.А.* Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем / К. А. Абагрян. — М.: Физико-математическая литература, 1994. — 544 с.