ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 1

УДК 517.958

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ: ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР И СОВРЕМЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

© 2003 Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

В статье приводится исторический обзор результатов, связанных с фундаментальными решениями наиболее известных уравнений старших порядков. Также приводятся новые результаты, полученные математиками Воронежского госуниверситета за последние 10 лет.

Введение

По-видимому, целостная теория уравнений математической физики 2 порядка была окончательно завершена к середине XX столетия. Начиная с этого момента, физические и реологические модели подвергались непрерывным многочисленным уточнениям, что привело к появлению уравнений высших порядков, таких как уравнение продольных колебаний балки, уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение С. Л. Соболева, уравнение Буссинеска, уравнение внутренних волн, уравнение Россби, уравнение малых колебаний вращающейся вязкой жидкости, уравнение гравитационно-гироскопических волн, уравнение Беренблатта–Желтова–Кочиной, стационарное и нестационарное вязкое трансзвуковое уравнение, уравнение Кадомцева–Петвиашвили и многих других. Однако, в отличии от уравнений 2 порядка, качественная теория уравнений высших порядков пока еще очень далека от завершения. Как отмечено в фундаментальном труде [1], посвященном проблемам уравнений высших порядков, одной из главных причин такого положения дел является отсутствие точных формул фундаментальных решений для подавляющего числа вышеперечисленных уравнений. Положение дел усугублялось еще и тем, что в результате информационного взрыва, произошедшего во второй половине XX столетия, многие из тех точных формул просто неизвестны большинству математиков, специализирующихся в области качественной теории уравнений в частных производных высших порядков.

Целью настоящей работы является восстановление «по крупицам» этих результатов, а также приведение новых результатов, полученных математиками Воронежского госуниверситета за последние 20 лет.

§ 1. Обзор предыдущих результатов

Напомним, что фундаментальным решением уравнения:

$$P(D)u(x) = f(x),\ \ x \in R^n,$$

где $P(D)$ — оператор с постоянными коэффициентами, является распределение $E(x)$, удовлетворяющее уравнению:

$$P(D)E(x) = \delta(x),\ \ x \in R^n,$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Обзор, пожалуй, стоит начать с эллиптических уравнений высших порядков. Общий метод построения фундаментальных решений для них приведен в работе [2].

Приведем также хорошо известные формулы для фундаментальных решений для уравнения продольных колебаний балки:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right]u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

и уравнения Кортевега-де Фриза:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right]u(t,x) = f(t,x). \tag{2}$$

Они имеют вид соответственно:

$$E(t,x) =$$

$$= \frac{\theta(t)x}{2}\left[S\left(\frac{x^2}{2t}\right) - C\left(\frac{x^2}{2t}\right) + \sqrt{\pi t}\sin\left(\frac{x^2}{2t} + \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{3}$$

и
$$E(t,x) = \frac{\theta(t)}{(3t)^{1/3}} Ai\left(-\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right), \qquad (4)$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $C(\cdot)$ и $S(\cdot)$ — интегралы Френеля 1 и 2 рода, $Ai(\cdot)$ — функция Эйри 1 рода (см. [3]). (К сожалению, автору не удалось выяснить, кому принадлежит приоритет в установлении этих формул).

И все же основополагающей в теории уравнений высших порядков следует признать работу С. Л. Соболева [4], построившего фундаментальное решение для уравнения названного его именем:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]u(t,x,y,z) = 0,$$
$$\Delta = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}. \qquad (5)$$

Оно имеет вид:

$$E(t,x,y,z) = \frac{\theta(t)}{\rho}\,\Xi\left(\rho, \frac{t}{r}\right),$$
$$\Xi(z) = \int_0^z J_0(\xi)d\xi, \qquad (6)$$

где $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя 1 рода.

Другие результаты по фундаментальным решениям за период с 50-х до начала 70-х годов автору этой статьи неизвестны.

Следующей важной вехой следует признать построение в начале 70-х годов В. Н. Диесперовым и Л. А. Ломакиным (см. [5], [6]) фундаментальных решений вязкого стационарного трансзвукового уравнения в двумерном и трехмерном случаях:

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u(x,y) = f(x,y), \qquad (7)$$

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u(x,y) = f(x,y,z). \qquad (8)$$

Они имеют вид соответственно:

$$E(x,y) = 2^{-1/3}\cdot 3^{1/2}\pi^{-1/2}\Psi(-1/6, 2/3;\omega),$$
$$\omega = -(4/27)x^3y^{-2}; \qquad (9)$$

и

$$E(x,y,z) = 2^{-4/3}\cdot 3^{-1}\pi^{-1}\Psi(1/3, 2/3;\omega),$$
$$\omega = -(4/27)x^3r^{-2}, r^2 = y^2+z^2; \qquad (10)$$

где $\Psi(a,c;\cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми (см. [3]).

Для обобщенного стационарного вязкого трансзвукового уравнения:

$$\left[\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} + \Delta_{(y)}\right]u(x,y) = f(x,y),\ x\in R,\ y\in R^n,$$
$$\Delta_{(y)} = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2};\ m,n = 1,2,\ldots; \qquad (11)$$

фундаментальное решение было построено Ю. В. Засориным [7], [8]:

$$E(x,y) = 2^{p+1/m-3/2}p^{1-1/m}\pi^{p-(n+m+1)/2}V(\omega);$$
$$V(\omega) = G^{m-1,1}_{p,m+p-2}\left(\omega\,\middle|\,\begin{matrix}(a); & (b)\\ (c); & (d)\end{matrix}\right);$$
$$\omega = 4m^{-m}x^{2m+1}r^{-2},\ r^2 = y_1^2+\cdots+y_n^2;$$
$$(a) = \left(-\frac{n}{2} - \frac{1}{m}\right);\ (b) = \left(\frac{1}{m} + \frac{i}{p}\right),\ i = \overline{1;p-1};$$
$$(c) = \left(\frac{j}{m}\right), j = \overline{0,m-2};\ (d) = \left(\frac{k}{p} - \frac{1}{m}\right),$$
$$k = \overline{1,p-1}; \qquad (12)$$

где $G^{m,n}_{p,q}(\cdot)$ — функция Мейера (см., напр., [3]), $p = 2\left[\frac{n+3}{4}\right]-1$ и $[a]$ — означает целую часть числа a.

Для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза:

$$\left[(-1)^m\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}\right]u(t,x) = f(t,x) \qquad (13)$$

фундаментальное решение также было построено в Воронежском госуниверситете И. А. Губановым [9]. Оно имеет следующий вид:

$$E(t,x) = C_m\theta(t)t^{-1/(2m+1)}\left\{sign(x)I_1(\omega) + I_2(\omega)\right\};$$
$$\omega = 4^{-m/(2m+1)}\cdot(2m+1)^{-1}\,|\,x\,|^{4m+2}\ t^{-2};$$
$$I_i(\omega) = G^{2n,0}_{0,4n}\left(\omega\,|\,(b_i),(b_{3-i})\right); \qquad (14)$$
$$(b_1) = \left(\frac{2j-1}{4m+2}\right),\ j = \overline{1;2m};$$
$$(b_2) = \left(\frac{k}{2m+1}\right),\ k = \overline{0;2m}.$$

где $G^{m,n}_{p,q}(\cdot\,|\ldots)$ — функция Мейера (см. [3]).

§ 2. Современные результаты

Отметим, что уравнения, для которых в предыдущем параграфе были приведены фундаментальные решения, имеют сравнительно простую структуру. Необходимо упомянуть о том, каким образом в задачах математической физики возникают более сложные уравнения старших порядков. Одним из путей их возникновения является обобщение одномерных моделей на случай большего числа измерений с учетом слабого влияния других координат, которое может быть осуществлено, например, хорошо известным методом гидродинамической аналогии (см., напр., [10]). Проиллюстрируем этот метод на следующих примерах.

Пусть одномерное течение описывается одномерным полем скоростей $v(t,x)$, удовлетворяющим уравнению:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]v(t,x)=f(t,x). \tag{15}$$

Переходя к подвижной системе координат заменой x на $x+at$ (и, как правило, полагая $a=\pm 1$), преобразуем уравнение к виду:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\pm\frac{\partial}{\partial x}+P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]v(t,x)=f(t,x). \tag{16}$$

Пусть теперь $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ — пространственное потенциальное поле скоростей:

$$\vec{v}=grad\,u, \tag{17}$$

компонента v_x которого удовлетворяет уравнению (16). Добавляя уравнение неразрывности:

$$div\,\vec{v}=0, \tag{18}$$

из системы уравнений (16)—(18) получаем, что потенциал u удовлетворяет уравнению:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\mp\Delta_{y,x}\right]u=f, \qquad \Delta_{y,z}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{19}$$

Возьмем теперь в качестве исходного уравнения (15) уравнение Бюргерса:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]v=v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{20}$$

Проводя для уравнения (20) преобразования по схеме (16)—(19), получаем хорошо известное (см. [11]) нестационарное вязкое трансзвуковое уравнение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\Delta_{y,z}\right]u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{21}$$

Если теперь в качестве уравнения (15) взять уравнение Кортевега–де Фриза:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right]v=v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \tag{22}$$

или родственное ему регуляризованное длинноволновое уравнение (см., напр., [12]):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}\right]v=v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{23}$$

то мы получаем, соответственно, пространственное уравнение Кадомцева–Петвиашвили:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\Delta_{y,z}\right]u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{24}$$

и пространственное регуляризованное длинноволновое уравнение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^4}{\partial t\partial x^3}-\Delta_{y,z}\right]u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{25}$$

Далее, по аналогии с парой (24), (25), уравнение (21) может быть заменено на родственное ему регуляризованное вязкое трансзвуковое уравнение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}\right]u==\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{26}$$

Наконец, заметим, что в схеме (15)–(19) переход к подвижной системе координат необязателен. Например, если в уравнениях (20), (22) или (23) перейти к линеаризации правых частей, заменяя их на av или $a\dfrac{\partial v}{\partial x}$, то уравнение Бюргерса (20), например, преобразуется либо в уравнение:

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}-\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\Delta_{y,z}\right]u=0, \tag{27}$$

либо в уравнение вида (21). Аналогичным образом преобразуются и уравнения (22), (23).

Заметим теперь, что для уравнений (21), (24)—(27) соответствующие фундаментальные решения уже не могут быть построены стандартными методами математической физики (например, применением «в лоб» преобразования Фурье). Тем не менее, за последние 10 лет группой математиков Воронежского госуниверситета был разработан соответствующий математический аппарат, позволяющий эффективно решать уравнения подобного типа. Суть его состоит в следующем: 1) Введение понятия фундаментального решения Коши для уравнений с невыделенной производной $\dfrac{\partial}{\partial t}$; сделанное Ю. В. Засориным и И. А. Губановым в работах [9], [13], [14]. 2) Нахождение нескольких простых приемов, позволяющих строить фундаментальное решение Коши для уравнений сходных типов. Их суть сформулирована в следующих утверждениях.

Предложение 1. *Пусть распределение* $E_0(t,x)$ *есть фундаментальное решение Коши для оператора:*

$$L^{(0)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{28}$$

Тогда распределения

$$E_1(t,x,y,z) = (4\pi t)^{-1} E_0(t, x - r^2/4t), \tag{29}$$

$$E_2(t,xy,z) = (4\pi t)^{-1} E_0(r^2/4t, x - r^2/4t), \tag{30}$$

$$E_3(t,x,y,z) = -(4\pi t)^{-1} E_0(t + r^2/4t, x), \tag{31}$$

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, *есть фундаментальные решения Коши для операторов:*

$$L^{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} L^{(0)} - \Delta_{y,z}, \tag{32}$$

$$L^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) - \Delta_{y,z}, \tag{33}$$

$$L^{(3)} \equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L^{(0)} - \Delta_{y,z}, \tag{34}$$

соответственно.

Предложение 2. *Пусть* $E_1(t,x)$, $x \in R^n$ *и* $E_2(t,y)$, $y \in R^n$ *есть фундаментальные решения Коши для операторов:*

$$L^{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + P_1(D_x),\ L^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + P_2(D_y) \tag{35}$$

соответственно. Тогда распределение:

$$E_0(t,x,y) = E_1(t,x) \otimes E_2(t,y) \tag{36}$$

есть фундаментальное решение Коши для оператора:

$$L^{(0)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + P_1(D_x) + P_2(D_y). \tag{37}$$

Отметим, что формулы (28)—(34) позволяют строить фундаментальные решения всех приведенных в этом параграфе уравнений. В частности, фундаментальные решения Коши для линеаризованного нестационарного вязкого трансзвукового уравнения (см. формулу (21)) в пространственном и плоском случае были построены Ю. В. Засориным (см. [13]); они имеют следующий вид:

$$E(t,x,y,z) = \frac{\theta(t)}{8(\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x - r^2/4t)^2}{4t}\right), \tag{38}$$

$$E(t,x,y) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{2}\pi t^{3/4}} \exp\left(-\frac{(x - y^2/4t)^2}{8t}\right) \times \\ \times D_{-1/2}\left(-\frac{x - y^2/4t}{\sqrt{2t}}\right); \tag{39}$$

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $D_\nu(\cdot)$ — функция параболического цилиндра (см. [3]).

Фундаментальные решения Коши для линеаризованного уравнения Кадомцева-Петвиашвили (25) (также для пространственного и плоского случаев) были построены Ю. В. Засориным и М. В. Придущенко (см. [14]). Они имеют вид:

$$E(t,x,y,z) = (4 \cdot 3^{1/3} \pi t^{4/3})^{-1} \theta(t) Ai(\omega) \\ \omega = -(x - r^2/4t) \cdot (3t)^{-1/3}, r = \sqrt{y^2 + z^2}; \tag{40}$$

$$E(t,x,y) = \\ = (6^{1/2} \pi^{3/2} t^{2/3})^{-1} \theta(t) G^{3,1}_{2,4}\left(\omega \left| \begin{matrix} 5/6; & 7/12 & \\ 0, & 2/3; & 7/12 \end{matrix} \right.\right) \\ \omega = (x - y^2/4t)^3 \cdot (27t)^{-1}, \tag{41}$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $Ai(\cdot)$ — функция Эйри 1 рода, $G^{m,n}_{p,q}$ — функция Мейера (см. [3]).

Теперь, на основании формул (1), (4), (28), (30), (31), (34) несложно выписать фундаментальные решения Коши для линеаризованных уравнений (25), (26) и (27). Они имеют вид соответственно:

$$E(t,x,y,z) = 48^{-1/3} \pi^{-1} (tr)^{-2/3} \theta(t) Ai(\omega), \\ \omega = -(4/3)^{1/3} x r^{-2/3} t^{1/3} + (48)^{-1/3} r^{4/3} t^{-2/3}; \tag{42}$$

$$E(t,x,y,z) = (8\pi^{3/2} r t^{1/2})^{-1} \theta(t) \exp(\omega), \\ \omega = -(4tx - r^2)^2 \cdot (64 r^2 t)^{-1}; \tag{43}$$

$$E(t,x,y,z)=(4\pi^{3/2}\sqrt{4t^3+tr^2})^{-1}\theta(t)\exp(\omega),\quad \omega=-x^2t\cdot(4t^2+r^2)^{-1}; \tag{44}$$

где $r=\sqrt{y^2+z^2}$.

Вернемся вновь к пространственным вязким трансзвуковым уравнениям (8), (21) и пространственному уравнению Кадомцева–Петвиашвили (24). Заменим z на iz (такая замена часто делается при наличии сильной ионизации и внешних магнитных полей) и получим модифицированные уравнения, в линеаризованной форме имеющие вид соответственно:

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u=f, \tag{45}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u=f, \tag{46}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u=f. \tag{47}$$

Приведем (без вывода) их фундаментальные решения:

$$E(x,y,z)= =2^{-7/3}3^{-1/3}\pi^{-2}G^{3,2}_{3,4}\left(\frac{4}{27}\cdot\frac{x^3}{\rho}\middle|\begin{matrix}0, & 1/3, & 2/3, & 2/3\\ 1/6, & 1/6 & & \end{matrix}\right), \tag{48}$$

$$E(t,x,y,z)=(2\pi^2t^2)^{-1}\theta(t)\omega\cdot{}_1F_1(1,3/2;-\omega^2/4t), \tag{49}$$

$$E(t,x,y,z)=(4\cdot 3^{1/3}\pi t^{4/3})^{-1}\theta(t)\cdot Ci(-\omega^2/(3t)^{1/3}), \tag{50}$$

где $\omega=x+\rho/4t$, $\rho=z^2-y^2$, $G^{m,n}_{p,q}(\cdot)$ — функция Мейера, ${}_1F_1(a,b;\cdot)$ — гипергеометрическая функция Гаусса 1 рода, $Ci(\cdot)$ — функция Эйри 3 рода (см. [3]):

$$Ci(z)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{+\infty}sin\left(\frac{1}{3}\xi^3+\xi z\right)d\xi.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение фундаментального решения — первая, но необходимая ступенька в изучении уравнения. Следующей ступенью является изучение корректной разрешимости начальных, краевых и смешанных задач, построение функций Грина, изучение свойств решения и т.д. Эта вторая ступень была пройдена, по крайней мере, для уравнений (5), (7)—(9), (11), (13), (21), (24) в работах [1], [4]—[9], [13], [14].

Автор выражает глубокую признательность Т. А. Капраловой за бесценную помощь в подборе библиографии для данного обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга. 1998. — 438 с.

2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958. — 439 с.

3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986. — 800 с.

4. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // ИАН СССР. 1954. Т. 18. С. 3—50.

5. *Диесперов В. Н.* Функция Грина линеаризованного ВТ-уравнения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1972. Т. 12, № 5. С. 1265—1279.

6. *Диесперов В. Н., Ломакин Л. А.* Об одной краевой задаче // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1974. Т. 14, № 5. С. 1244—1260.

7. *Засорин Ю. В.* Точные решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 287, № 6. С. 1347—1351.

8. *Засорин Ю. В.* Обобщенные решения одного класса гипоэллиптических уравнений с особенностью: Дисс. ...канд. физ.-матем. наук. Воронеж: ВГУ, 1985.

9. *Губанов И. А.* О некоторых свойствах обобщённого линеаризованного уравнения Кортевега–де Фриза // Дифф. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1084—1086.

10. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. — М.: Физматгиз, 1953. — 728 с.

11. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений // Прикл. матем. и механ. 1965. Т. 29, № 6. С. 1004—1014.

12. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.

13. *Засорин Ю. В.* Точные решения некоторых задач, описываемых нестационарными вязкими трансзвуковыми уравнениями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1994. Т. 34, № 10. С. 1446—1488.

14. *Засорин Ю. В., Придущенко М. В.* Точные решения пространственного уравнения Кадомцева–Петвиашвили // Вестник ВГУ, серия физика, математика, 2002, № 2. — С. 133—136.