ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 1

УДК 517.9

К ОЦЕНКАМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ*

© 2003 Н. Б. Ускова

Воронежский государственный технический университет

Пусть $r > 0$ — заданное число и $A : D(A) \subset \subset H \to H$ — линейный замкнутый оператор, имеющий простое изолированное собственное значение λ_1 и соответствующий собственный вектор e_1. В работе получено условие на возмущение B, при котором оператор $A - B$ имеет простое изолированное собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ и собственный вектор $\tilde{e}_1$, такой, что $\|e_1 - \tilde{e}_1\| \le r$. Также указана итерационная последовательность для нахождения $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{e}_1$, в терминах r приведены оценки на $\left|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1\right|$, $\left\|e_1 - \tilde{e}_1^{(1)}\right\|$, $\left|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1^{(1)}\right|$, где $\tilde{e}_1^{(1)}$, $\tilde{\lambda}_1^{(1)}$ — первые приближения к собственному значению и собственному вектору оператора $A - B$, на синус угла между векторами $\tilde{e}_1$ и e_1, указан радиус круга, в котором $\tilde{\lambda}_1$ единственно. Кроме того, проведено сравнение полученных результатов с результатами М. Т. Найера и рассмотрены примеры.

Пусть $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H, λ_1 – простое изолированное собственное значение оператора A, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. В работах [1—4] изучалась следующая проблема. Пусть $r > 0$, $p > 0$ — заданные числа, надо указать такое число $\delta > 0$, чтобы для любого ограниченного оператора B, $\|B\| < \delta$, возмущенный оператор $A - B$ имел собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ и соответствующий собственный вектор $\tilde{e}_1$, такие что

$$\left|\lambda_1 - \tilde{\lambda}\right|_1 \le p, \;\; \|e_1 - \tilde{e}_1\| \le r.$$

В данной заметке эта задача решается с помощью метода подобных операторов [5—8], что позволяет усилить соответствующие результаты М. Т. Найера из [4], предложить отличный от его неявного итерационного процесса явный итерационный процесс для нахождения $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{e}_1$. Кроме того, производится сравнение с итерационным процессом, предложенным в [9] Мокейчевым и приводятся примеры.

В [1] Ф. Фаридом был предложен метод решения поставленной проблемы, основанный на принципе сжимающих отображений, этим же методом было проведено исследование М. Т. Найром [4], где обобщены результаты работ [1] и [10]. Прежде чем привести результаты М. Т. Найера, введем некоторые обозначения.

Представим спектр $\sigma(A)$ оператора A в виде $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$, $\sigma_2 = \sigma(A) \setminus \sigma_1$. Символом P_k, $k = 1, 2$, обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_k, т.е. $P_k = P(\sigma_k, A)$. Пусть f_1 — собственный вектор сопряженного к A оператора A^*, $A^* f_1 = \bar{\lambda}_1 f_1$ и $(e_1, f_1) = 1$. Через S обозначим оператор, принадлежащий банаховой алгебре $\operatorname{End} H$ ограниченных линейных операторов, действующих в H, и однозначно определяемый условиями $SP_1 = P_1 S = 0$, $(\lambda_1 I - A)S = S(\lambda_1 I - A) = P_2$.

Теорема 1. [4]. Для любого $r > 0$ и любого ограниченного оператора $B : H \to H$, удовлетворяющего условию

$$\beta = \max\{\|P_1 B\|, \|P_2 B\|\} \le \frac{r}{\|S\| (1 + r)^2}, \qquad (1)$$

оператор $A - B$ имеет простое собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ и соответствующий собственный вектор $\tilde{e}_1$, такие что

$$(\tilde{e}_1, f_1) = 1, \;\; \|e_1 - \tilde{e}_1\| \le r, \qquad (2)$$

$$\left|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1\right| \le \|B\| (\|e_1 - \tilde{e}_1\| + 1), \qquad (3)$$

и $\tilde{\lambda}_1$ — единственное собственное значение оператора $A - B$, лежащее в круге

$$\left|\lambda - \lambda_1 - (Be_1, f_1)\right| < \frac{1 - 2\beta \|S\|}{2\|S\|} \sqrt{1 - 4 \frac{r^2}{(1 + r^2)^2}}.$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 01-01-00408

Кроме того, в теореме приведены формулы итерационного процесса, с помощью которого можно найти $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{e}_1$.

Получать оценки на собственные векторы и собственные значения возмущенных операторов также можно, используя предложенный А. Г. Баскаковым метод подобных операторов [5—8]. Метод подобных операторов берет свое начало с замены Крылова–Боголюбова и заключается в преобразовании подобия возмущенного оператора к оператору, для которого подпространства, построенные по изолированным частям спектра невозмущенного оператора, инвариантны. Изложим вкратце метод подобных операторов.

Введем пространство $L_A(H)$ — банахово пространство операторов, подчиненных оператору A, т.е. $B \in L_A(H)$, если $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и $\|Bx\| \le \mathrm{const}(\|x\| + \|Ax\|)$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, $\|B\|_A = \inf \mathrm{const}$. Для рассматриваемой задачи можно без ограничения общности считать $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$ $\forall B \in L_A(H)$.

Определение 1. Пусть M — линейное многообразие операторов из $L_A(H)$ и $J : M \to M$, $\Gamma : M \to \mathrm{End}\, H$ — линейные операторы. Тройку (M, J, Γ) назовем допустимой тройкой для оператора A, а M — допустимым пространством возмущений, если:

1) M — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $L_A(H)$, т.е. $\|X\| \ge \mathrm{const}\, \|X\|_A$ $\forall X \in L_A(H)$;

2) J и Γ — непрерывные операторы;

3) $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$ и $A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX$, $\forall X \in M$;

4) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma X)Y \in M$ $\forall X, Y \in M$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| < \gamma$ и $\max\{\|X(\Gamma Y)\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \le \gamma \|X\| \|Y\|$.

Теперь зафиксируем некоторую допустимую для A тройку (M, J, Γ) и некоторое возмущение $B \in M$. Будем искать такой оператор $X \in M$, чтобы имело место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A - JX). \tag{4}$$

Теорема 2. [5, гл. 2, с. 99]. Пусть выполнено условие $\gamma \|B\| \|J\| < 1/4$. Тогда имеет место равенство (4), где X — решение рассматриваемого в M операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - \Gamma X J(B\Gamma X) + B. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что тройка $M = L_A(H)$, $JX = P_1 X P_1 + P_2 X P_2$ (оператор блочной диагонализации), $\Gamma X = P_1 X S - S X P_1$ является допустимой для оператора A тройкой.

А. Г. Баскаковым получен, с использованием метода подобных операторов, ряд результатов, касающихся оценок собственных векторов и собственных значений возмущенных операторов [6—8]. Приведем в качестве примера следующую теорему.

Теорема 3. [6]. Пусть оператор $B \in M$ удовлетворяет условию

$$\gamma b_{11} + \tilde{b}_{22} + 2(\tilde{b}_{12} b_{21} \gamma)^{1/2} < 1,$$

где $\tilde{b}_{12} = \|B_{12} S\|$, $b_{21} = \|P_2 B e_1\|$, $b_{11} = |(Be_1, f_1)|$, $\tilde{b}_{22} = \|P_2 B S\|_\infty$, $\gamma = \|S\|$, тогда имеют место оценки

$$\|\tilde{e}_1 - e_1\| \le \gamma g_1,$$

$$\|\tilde{e}_1 - e_1 + SBe_1\| \le \gamma f_1,$$

$$\|(A - \lambda_1 I)(\tilde{e}_1 - e_1)\| \le g_1,$$

$$\|(A - \lambda_1 I)(\tilde{e}_1 - e_1 + SBe_1)\| \le f_1,$$

$$g_1 = 2b_{21}(1 - (\gamma b_{11} + \tilde{b}_{22}) + \psi_1)^{-1},$$

$$f_1 = \frac{2b_{21}(\gamma b_{11} + \tilde{b}_{22} + \tilde{b}_{12} b_{21})}{1 - (\gamma b_{11} + \tilde{b}_{22}) - 2\gamma \tilde{b}_{12} b_{21} + \psi_1},$$

$$\psi_1 = ((1 - (\gamma b_{11} + \tilde{b}_{22}))^2 - 4\tilde{b}_{12} b_{21} \gamma)^{1/2}.$$

Данная заметка посвящена уточнению результатов Т. М. Найера (в частности, снятию требования ограниченности возмущения) и получению некоторых других оценок с использованием метода подобных операторов.

Обозначим $\|P_2 B e_1\| = b_1$. Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4. Для любого действительного числа $0 < r < 1$ и любого оператора $B \in L_A(H)$ и удовлетворяющего условию

$$\max\{\tilde{b}_{22}, b_{11}s, \tilde{b}_{12}, sb_1\} < \frac{r}{r+2}, \tag{6}$$

или,

$$\tilde{b}_{22} + b_{11}s + 2(\tilde{b}_{12} s b_1)^{1/2} < 1, \tag{7}$$

оператор $A - B$ имеет простое собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ и соответствующий собственный вектор $\tilde{e}_1$, такие что выполнены условия (2),

$$|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1 - (Be_1, f_1)| \le \tilde{b}_{12} r s^{-1}. \tag{8}$$

При выполнении более жесткого условия

$$\max\{\tilde{b}_{22}, b_{11}s, b_{12}s, sb_{21}\} < \frac{r}{r+2}, \tag{9}$$

или,

$$\tilde{b}_{22} + b_{11}s + 2s(b_{12} b_{21})^{1/2} < 1,$$

число $\tilde{\lambda}_1$ — единственное собственное значение оператора A в шаре

$$V_\lambda = \{z : |z - \lambda_1| \le$$
$$\le \frac{1 - b_{11}s - \tilde{b}_{22} + \sqrt{(\tilde{b}_{22} + b_{11}s - 1)^2 - 4s\tilde{b}_{21}b_{12}}}{2s}.$$

Кроме того, если $A = A^*$, то $\sin(\widehat{\tilde{e}_1, e_1}) \le \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}$.

Возмущенное собственное значение и возмущенный собственный вектор можно найти с помощью следующей итерационной последовательности:

$$y_{k+1} = B_{22}Sy_k - (BSy_k, f_1)Sy_k - (Be_1, f_1)Sy_k + P_2Be_1$$
$$Sy_k = ((A - \lambda_1 I)|_{H_2})^{-1} y_k,$$
$$\tilde{e}_{k+1} = e_1 + Sy_{k+1},$$
$$\lambda_k = \lambda_1 - (Be_1, f_1) - (BSy_k, f_1),$$
$$y_0 = 0, H_2 = \mathrm{Ran}\, P_2, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Следствие 1. В условиях теоремы 3 первым приближением к собственному вектору $\tilde{e}_1$ является вектор $\tilde{e}_1^{(1)} = e_1 + SB_{21}e_1$, к собственному значению $\tilde{\lambda}_1$ — число $\tilde{\lambda}_1^{(1)} = \lambda_1 - (Be_1, f_1) - (B_{12}SB_{21}e_1, f_1)$, причем

$$(\tilde{e}_1^{(1)}, f_1) = 1,$$
$$\left\|\tilde{e}_1 - \tilde{e}_1^{(1)}\right\| \le \frac{r^2(6r + 8)}{(r + 2)(4 - 3r^2)},$$
$$\left|\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1^{(1)}\right| \le \frac{b_1 r^2(6r + 8)}{(r + 2)(4 - 3r^2)}.$$

Отметим, что в отличие от теоремы 1, в теореме 4 не требуется ограниченности возмущения. Также очевидно, что ограничение $r < 1$ не является существенным, т.к. при больших r оценка нормы разности векторов $\tilde{e}_1$ и e_1 теряет смысл. Кроме того, условия (6), (7) тоньше условия (1) теоремы 1. Метод подобных операторов также позволяет выписывать вторые приближения к собственному вектору и собственному значению и находить оценку на синус угла между собственными векторами возмущенного и невозмущенного операторов.

Пример 1. [5] В гильбертовом пространстве $H = L_2[0, 2\pi]$ рассмотрим дифференциальный оператор $A - B$, где $(Au)(t) = -\frac{d^2u}{dt^2}$, $(Bu)(t) = q(t)u(t)$, $q \in L_\infty[0, 2\pi]$, и область определения $D(A)$ задается периодическими краевыми условиями $u(0) = u(2\pi)$, $u'(0) = u'(2\pi)$. Собственными значениями оператора A являются числа $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, \ldots$, причем $\lambda_0 = 0$ — простое собственное значение, а остальные — двукратные. Соответствующие собственные векторы имеют вид $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Пусть $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 = \{\lambda_0\}$, $P_1x = (x, e_0)e_0$, $P_2 = I - P_1$. Тогда допустимой для оператора A будет тройка $(\mathrm{End}\, H, J, \Gamma)$, где J и Γ определены выше. Без ограничения общности величину $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} q(s)ds$ можно считать равной нулю.

Рассмотрим числовые значения величин, входящих в условие теоремы. Так как $B_{11}x = P_1BP_1x = (x, e_0)(Bx, e_0)e_0 = 0$, то $b_{11} = 0$. Оценим величину $\tilde{b}_{22}$:

$$\|P_2qSXP_1x\| \le \|qS\| \le \|q\|_2 \sqrt{\sum_{n \ne 0} \frac{1}{n^4}},$$

Оценим величину $\tilde{b}_{12} = \|B_{12}S\|$, пусть $\|x\| \le 1$

$$\|B_{12}Sx\| = \|(qSx, e_0)e_0\|_2 \le |(x, S\overline{q}e_0)| \le$$
$$\le \|S\overline{q}\|_2 \le \left(\sum_{n \ne 0} \frac{q_n^2}{n^4}\right)^{1/2}.$$

Заметим, что $s = \|S\| = 1$, $\max\{b_{12}, b_{21}\} \le \|q\|_2$, $\|P_2Be_1\| \le \|q\|_2$.

Тогда условие (6) применимости теоремы 4 имеет вид

$$\max\left\{\|q\|_2 \sqrt{\sum_{n \ne 0} \frac{1}{n^4}}, \sqrt{\sum_{n \ne 0} \frac{q_n^2}{n^4}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|q\|_2\right\} < \frac{r}{r + 2},$$

или более тонкое условие (7) в данном случае задается неравенством

$$\|q\|_2 \sqrt{\sum_{n \ne 0} \frac{1}{n^4}} + 2\left(\left(\sum_{n \ne 0} \frac{q_n^2}{n^4}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|q\|_2\right)^{1/2} < 1.$$

Прямое использование теоремы 1 Найера дает следующее условие на оператор B: $\|P_2B\| \le \frac{r}{1 + r^2}$, где
$\|P_2B\| = \sup\limits_{\|x\|_2 \le 1} \|P_2Bx\|_2 = \|P_2qx\|_2 \le \|P_2q\|_\infty \|x\|_2 \le \|P_2q\|_\infty$.

Но хорошо известно, что $\sqrt{2\pi}\|q\|_\infty \ge \|q\|_2$.

Кроме того, приведенный ниже пример показывает, что теорема 4 может быть применена, а теорема 3 — нет.

Пример 2. Рассмотрим оператор $L : \mathcal{D}(L) \subset \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ вида

$$(Lu)(t) = u''(t) - a(t)u(t),$$

где $a(t)$ — непрерывная на [0,1] функция и $a(t)t(1-t)$ продолжается по непрерывности, и область определения $\mathcal{D}(L)$ задается краевыми условиями $u(0) = u(1) = 0$.

Пусть $L = A - B$, где $(Au)(t) = u''(t)$, $A : \mathcal{D}(L) \subset \subset l_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Bu)(t) = a(t)u(t)$, $B : \mathcal{D}(L) \subset \subset l_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

Заметим, что B не является ограниченным оператором и покажем, что B подчинен оператору A и, следовательно, имеет место теорема 4.

Легко видеть, что

$$(BA^{-1}u)(t) = \int_0^1 G(t,s)u(s)ds,$$

$$G(t,s) = \begin{cases} a(t)t(1-s), & 0 \le t \le s, \\ a(t)s(1-t), & s \le t \le 1, \end{cases}$$

и поэтому у оператора BA^{-1} ограниченное ядро, т.е. BA^{-1} есть ограниченный оператор. Из оценок

$$\|Bx\| = \|BA^{-1}Ax\| \le \|BA^{-1}\| \|Ax\| < \|BA^{-1}\|(\|x\| + \|Ax\|)$$

следует, что оператор B подчинен оператору A и можно положить $\|B\|_A == \|BA^{-1}\|$. В пространстве допустимых возмущений $M = L_A(H)$ норму зададим следующим образом: $\|B\| = \|B\|_A$. Собственными значениями оператора A являются числа $\lambda_n = -(\pi n)^2, n \ge 1$, а соответствующими собственными векторами — функции

$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi nt, n \ge 1$. Тогда $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$ и $(P_1 u)(t)$

$= (u(t), e_1(t))e_1(t) = \int_0^1 u(s)e_1(s)e_1(t)ds$, $P_2 = I - P_1$. Отметим, что собственные векторы оператора A образуют базис в $L_2[0,1]$. Очевидно,что $\|S\| = (\operatorname{dist}(\sigma_1, \sigma_2))^{-1} = \frac{1}{3\pi^2}$.

Итак, к оператору $L = A - B$ применима теорема 4, и имеют место все указанные в ней оценки.

Доказательство теоремы 4.

Применим к обеим частям уравнения (5) проекторы P_1 и P_2 справа и слева и получим следующую систему уравнений для операторов $X_{ij} = P_i X P_j$:

$$X_{11} = B_{12}SX_{21} + B_{11}, \tag{10}$$

$$X_{21} = \\ = B_{22}SX_{21} - (SX_{21})B_{11} - SX_{21}B_{12}SX_{21} + B_{21}, \tag{11}$$

$$X_{12} = \\ = B_{11}SX_{12} - (X_{12}S)B_{22} - (X_{12}S)B_{21}X_{12}S + B_{12}, \tag{12}$$

$$X_{22} = B_{21}X_{12}S + B_{22}. \tag{13}$$

Посчитаем значения левой и правой частей равенства (11) на векторе e_1 :

$$X_{21}e_1 = B_{22}SX_{21}e_1 - (SX_{21}e_1)B_{11} - \\ -SX_{21}B_{12}SX_{21}e_1 + B_{21}e_1. \tag{14}$$

Можно показать, что вектор

$$\tilde{e}_1 = e_1 + SX_{21}e_1 \tag{15}$$

является собственным ненормированным вектором возмущенного оператора $A - B$, отвечающим собственному значению

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - (B_{12}SX_{21}e_1, f_1) - (Be_1, f_1). \tag{16}$$

Следовательно, $\|\tilde{e}_1 - e_1\| = \|SX_{21}e_1\|$ и $\left|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1 + (Be_1, f_1)\right| \le \|B_{12}SX_{21}e_1\|$.

Оценим норму $\|X_{21}e_1\|$. Пусть $\|X_{21}e_1\| = t$, $s = \|S\|$, $b_1 = \|B_{21}e_1\|$. Тогда мажорантным для уравнения (14) является уравнение

$$t = \tilde{b}_{22}t + b_{11}st + \tilde{b}_{12}st^2 + b_1,$$

условие существования корней мажорантного уравнения

$$\tilde{b}_{22} + b_1 s + 2(\tilde{b}_{12}sb_1)^{1/2} < 1,$$

или,

$$\max\{\tilde{b}_{22}, b_{11}s, b_{12}, sb_1\} < \frac{r}{r+2}.$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$t = \|X_{21}t\| \le \frac{1 - b_{11}s - \tilde{b}_{22} - \sqrt{(\tilde{b}_{22} + b_{11}s - 1)^2 - 4\tilde{b}_{12}sb_1}}{2\tilde{b}_{12}s}.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{e}_1 - e_1\| = \|SX_{21}e_1\| \le s\|X_{21}e_1\| < \\ < \frac{2b_{21}s}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11}s} \le \frac{\frac{r}{r+1}}{1 - \frac{r}{r+1}} = r,$$

$$(\tilde{e}_1, f_1) = (e_1 + SX_{21}e_1, f_1) = (e_1, f_1) + (SX_{21}e_1, f_1) = 1,$$

$$\left|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1 - (Be_1, f_1)\right| \le \tilde{b}_{12}\frac{r}{s}.$$

При этом

$$\left|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1\right| \le \|(B\tilde{e}_1, f)\| \le$$
$$\le \left|(Be_1, f_1)\right| + \left|(B(e_1 - \tilde{e}_1), f_1)\right| = \|B_{11}\| + \|B_{12}\| r.$$

Найдем теперь круг с радиусом в точке λ_1, в котором собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ возмущенного оператора единственно. Выполнение условия (9) обеспечивает подобие операторов $A - B$ и $A - JX$ [6] и, следовательно, равенство спектров. Обозначим $A_2 = A|_{H_2}$, $H_2 = \operatorname{Ran} P_2$ и найдем такие λ, чтобы оператор $A_2 - X_{22} - \lambda I$ был обратим. Из равенств

$$A_2 - X_{22} - \lambda I =$$
$$= (A_2 - \lambda_1 I)(I - (A_2 - \lambda_1 I)^{-1})(X_{22} + (\lambda - \lambda_1)I) =$$
$$= (A_2 - \lambda_1 I)(I - SX_{22} - S(\lambda - \lambda_1)I)$$

следует, что оператор $A_2 - X_{22} - \lambda I$ обратим, если

$$\|SX_{22} + S(\lambda - \lambda_1)I\| < 1,$$

или

$$|\lambda - \lambda_1| < \frac{1 - \|SX_{22}\|}{\|S\|}.$$

Применим к уравнению (13) оператор S слева, а к уравнению (12) — справа, получим

$$SX_{22} = SB_{21}X_{12}S + SB_{22},$$
$$X_{12}S = -X_{12}SB_{21}X_{12}SS - X_{12}SB_{22}S + B_{12}S + B_{11}SX_{12}.$$

Применив к последнему равенству метод мажорантных уравнений, получим:

$$\|X_{12}S\| \le \frac{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11}s - \sqrt{(1 - \tilde{b}_{22} - b_{11}s)^2 - 4s\tilde{b}_{12}b_{21}}}{2sb_{21}} = \Psi$$

и

$$\|SX_{22}\| \le \tilde{b}_{22} + b_{21}\Psi s.$$

Следовательно,

$$|\lambda - \lambda_1| < \frac{1 - \tilde{b}_{22} - b_{21}\Psi s}{s} = r.$$

Итак, в круге радиуса

$$r = \frac{1 + b_{11}s - \tilde{b}_{22} + \sqrt{(1 - \tilde{b}_{22} - b_{11}s)^2 - 4s\tilde{b}_{12}b_{21}}}{2s}$$

собственные значения $\tilde{\lambda}_1$ возмущенного оператора $A - B$ единственно.

Пусть A — самосопряженный оператор, тогда

$$\cos\phi = \frac{(\tilde{e}_1, e_1)}{\|\tilde{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|SX_{21}e_1\|^2}};$$

$$\sin\phi = \frac{\|SX_{21}e_1\|}{\sqrt{1 + \|SX_{21}e_1\|^2}} \le \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Из формул (14), (15) и (16) следует, что возмущенный собственный вектор $\tilde{e}_1$ и соответствующее собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ могут быть найдены с помощью следующего итерационного процесса

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = \lim\limits_{k\to\infty} e_{k+1}, \ \tilde{\lambda}_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k \\ y_{k+1} = B_{22}Sy_k - (BSy_k, f_1)Sy_k - (Be_1, f_1)Sy_k + P_2Be_1 \\ e_{k+1} = e_1 + Sy_{k+1}, \\ \lambda_k = \lambda_1 - (Be_1, f_1) - (BSy_k, f_1), \\ Sy_{k+1} = ((A - \lambda_1 I)|_{H_2})^{-1} y_k. \end{cases} \tag{17}$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.

Из приведенного в теореме 3 итерационного процесса очевидно, что $\tilde{e}^{(1)}$ и $\tilde{\lambda}^{(1)}$ есть первые приближения к искомым собственному значению и собственному вектору. Сделаем замену переменной $Z = X_{21}e_1 - B_{21}e_1$ в уравнении (12) и получим уравнение

$$Z = B_{22}SZ - B_{11}SZ - (B_{12}SZ, f_1) -$$
$$-(B_{12}SZ, f_1)SB_{21}e_1 - (B_{12}SB_{21}e_1, f_1)SZ +$$
$$+B_{22}SB_{21}e_1 - B_{11}SB_{21}e_1 - (B_{12}SB_{21}e1, f_1)SB_{21}e_1.$$

Применяя к последнему уравнению метод мажорантных уравнений и проводя рассуждения, аналогичные используемым в теореме 3, имеем оценку

$$\|X_{21}e_1 - B_{21}e_1\| \le \frac{2(\tilde{b}_{22}b_1 + b_{11}sb_1 + \tilde{b}_{12}b_1^2 s)}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11}s - 2\tilde{b}_{12}b_1 s}. \tag{18}$$

Осталось для оценки входящих в (18) величин использовать условие (6).

В работе [9] В. С. Мокейчевым также предложена итерационная последовательность для нахождения возмущенного собственного значения $\tilde{\lambda}_1$ и возмущенного собственного вектора $\tilde{e}_1$ Приведем соответствующие результаты из [9] в наших обозначениях.

Пусть λ_1 — простое собственное значение оператора A, оператор $A - \lambda_1 I$ нормально разрешим, $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_k I)^* \le 1$; если $\operatorname{Ker}(A-\lambda_k I)^* \ne \varnothing$, то существуют векторы e_1, f_1, такие, что $(e_1, f_1) = 1$, $(A-\lambda_1 I)e_1 = 0$, $(A-\lambda_1 I)^* f_1 = 0$, и $\mathcal{D}(A-\lambda_k I) \subset \mathcal{D}(B)$. Пусть $z = w = f_1$, если $\operatorname{Ker}(A-\lambda_k I) \ne 0$; или $z = 0$, $w = e_1$ – в противном случае. Построим итерационную последовательность $\{x(p)\}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $x(p) \in \mathcal{D}(A-\lambda_1 I,)$ удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} x(0) = e_1,\ (x(p), w) = 0\ \forall p \ne 0 \\ x(p) = -SBx(p-1) - \sum\limits_{j=0}^{p} -1\mu(j)Sx(p-1-j),\ \forall p \ge 1, \\ \mu(j) = -(Bx(j), z)\ \forall j \ge 0. \end{cases} \tag{19}$$

Можно показать, что существуют такие постоянные b_m, $m \ge 3$, что $p^2 \sum\limits_{j=1}^{p-2} j^{-2}(p-1-j)^{-2} \le b_m$ $\forall\, p \ge m$.

Теорема 5. Пусть существуют такие постоянные c_m, $m \ge 3$, δ, θ, γ, $d \le 1$, что

$$\begin{cases} \|(A-\lambda_1 I)x(q)\| \le c_m d^q q^{-2}, q = 1, 2, \ldots, m, \\ |\mu(j)| \le \delta\, \|(A-\lambda-1I)x(j)\|,\ \forall j \ge 1, \\ \|Bx(p) + \mu(p)e_1\| \le \gamma\, \|(A-\lambda_1 I)x(p)\|\ \ \forall p \ge 1, \\ \|x(p)\| \le \theta\, \|(A-\lambda_1 I)x(p)\|\ \ \forall p \ge 1, \\ \left(\dfrac{m+1}{m}\right)^2 [\gamma + |(Be_1, z)|\,\theta] + b_m c_m \delta\theta \le d. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда выполняются оценки

$$\|x(p)\| \le \theta c_m d^p p^{-2},\ \ \forall p \ge 1$$

и $\tilde{e}_1 = \sum\limits_{p=0}^{\infty} x(p)$ — собственный вектор оператора $A - B$, соответствующий собственному значению $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 + \sum\limits_{j=0}^{\infty} \mu(j)$.

Сравним итерационные процессы (17) и (19) и, пользуясь оценками (20) посчитаем оценки величин $\|e_1 - \tilde{e}_1\|$, $\left|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1 - \mu(0)\right|$.

Из оценок (20) следует, что $\theta = \|S\| = s$ и в качестве константы δ можно взять величину $\|B\|_A$, так как справедливы неравенства:

$$\|x(p)\| = \|S(A-\lambda_1 I)x(p)\| \le S\, \|(A-\lambda_1 I)x(p)\| \le$$
$$\le S\, \|(A-\lambda_1 I)x(p)\|;$$

$$|\mu(j)| = |(Bx(j), z)| \le \|Bx(j)\| \le$$
$$\le \|B\|_A\, (\|Ax(j)\| + \|x(j)\|),$$
$$|\mu(j)| \le \delta\, \|(A-\lambda_1 I)x(j)\| \le \delta(\|Ax(j)\| + \lambda_1\, \|x(j)\|).$$

Тогда

$$\|\tilde{e}_1 - e_1\| = \left\| \sum_{p=1}^{\infty} x(p) \right\| \le sc_m \sum_{p=1}^{\infty} d_k^p p^{-2} = sc_m D = r,$$

где

$$D = \sum_{p=1}^{\infty} d^p p^{-2}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\lambda}_1 - \lambda - (Be_1, z)\right| &= \left| \sum_{p=1}^{\infty} (Bx(p), z) \right| \le \\ \le \delta c_m \sum_{p=1}^{\infty} d^p p^{-2} &= \delta c_m D = \delta r S^{-1} = \|B\|_A\, r S^{-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Отметим, что оценка (22) аналогична оценке (8), но в оценке (8) вместо $\|B\|_A$ используется величина $\tilde{b}_{22}$. Итерационный процесс (19) используется для более общей ситуации, чем итерационный процесс (17), поэтому в оценках (21) и (22) используются константы из теоремы 5 c_m и d, причем $d < 1$, что затрудняет решение поставленной в [1—4] проблемы и в общем случае невозможно выписать условие типа условий (1), (6), (7). Легко показать, что первые приближения в (19) и (17) одинаковы, вторые приближения отличаются на слагаемое более высокого порядка малости. Численный эксперимент показал, что если итерационный процесс сходится, то, например, десятые и более высокие приближения практически одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farid F.O.* Spectral properties of perturbed linear operators and their application to infinite matrices // Proc. Amer. Mathem. Soc. — 1991. — № 112. — P. 1013—1022.

2. *Nair M.T.* Approximation of spectral sets and spectral subspaces in Banach spaces. J. Indian Math. Soc. — 1989. — № 53. — P. 187—200.

3. *Nair M.T.* On iterativ refinements for spectral sets and spectral subspaces. Numer. Funct. Anal. Optim. — 1989. — № 10. — P. 1019—1037.

4. *Nair M.T.* On spectral properties of of perturbed operators. Proc. Amer. Mathem. Soc. — 1995 — Vol. 123. — P. 1845—1851.

5. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

6. *Баскаков А.Г.* Теорема о расщеплении и некоторые смежные вопросы аналитической теории

возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50. — № 3. — С. 435—458.

7. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Изв. АН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58. — № 4. — С. 3—32.

8. *Ускова Н.Б.* О спектре некоторых классов дифференциальных операторов // Диф. уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 2. — С. 350—352.

9. *Мокейчев В.С.* Собственные значения и собственные элементы линейных операторов // Казань, 1984. деп. ВИНИТИ № 2898−84.

10. *Rosenbloom P.* Perturbation of linear operators in Banach space.// Arch. Math. — 1955. — № 6. — P. 89—101.

10. *Канторович Л.Б., Акилов Г.Г.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1987. — 426 с.