УДК 571.988.63:532.5-1/-9

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ФОЙГТА*

© 2003 М. В. Турбин

Воронежский государственный университет

В работе исследуется модель движения жидкости Фойгта. Для для начально-краевой задачи для этой модели введено новое понятие слабого решения и получена теорема существования и единственности такого решения. Также получена теорема о свойствах слабых решений для различных классов данных.

Введение

В течение последних полутора столетий основной моделью вязкой несжимаемой жидкости является модель ньютоновской жидкости. Она описывает течение при умеренных скоростях большинства встречающихся на практике вязких несжимаемых жидкостей. Но уже в середине XIX века стали известны такие вязкие несжимаемые жидкости, которые не подчиняются ньютоновскому определяющему уравнению. Впервые модели, описывающие движение таких жидкостей, были предложены в XIX веке Дж. Максвеллом, В. Кельвином и В. Фойгтом и были развиты в середине XX века в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта. Эти модели учитывают предысторию течения. Они были названы впоследствии линейными вязкоупругими жидкостями. В данной работе рассматривается модель движения жидкости Фойгта [2], [10]. Она описывается следующим определяющим соотношением:

$$\sigma = 2\nu\left(\mathcal{E} + \varkappa\nu^{-1}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right), \quad \varkappa, \nu > 0, \tag{0.1}$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, а $\varkappa$ — время запаздывания. Определяющее соотношение устанавливает связь девиатора тензора напряжений $\sigma = (\sigma_{ij})$ и тензора скоростей деформаций $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})$

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

определяемого полем скоростей жидкости v. Модель движения жидкости Фойгта описывает течение вязкой неньютоновской жидкости, которой требуется время, чтобы прийти в движение под действием внезапно приложенной силы.

Подставляя σ в уравнение движения в форме Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div}\sigma + f$$

и учитывая условие несжимаемости жидкости, получим систему уравнений движения жидкости Фойгта:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \operatorname{grad} p = f, \tag{0.2}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{0.3}$$

Здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Для системы (0.2), (0.3) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, рассмотрим начально-краевую задачу с начальным условием

$$v\,|_{t=0} = a(x), \ \ x \in \Omega, \tag{0.4}$$

и граничным условием

$$v\,|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{0.5}$$

Введем понятие слабого решения следуя Р. Темаму [12].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) с липшицевой границей $\partial\Omega$.

Обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω; $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n$ — замыкание множества $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$; $X = \{v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — множество соленоидальных функций; H — замыкание X по норме простран-

* Работа поддержана грантами № 01-01-00425 РФФИ и № VZ -010-0 Министерства образования РФ и CRDF.

ства $L_2(\Omega)^n$; V — замыкание X по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением $((v,w))=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)^n$.

Норма, порождаемая этим скалярным произведением в пространстве V, обозначается $\|\cdot\|_V$ и эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Через V^* мы обозначим пространство сопряженное к пространству V, а через $\langle f,v\rangle$ — действие функционала $f\in V^*$ на элемент $v\in V$.

Введем одно пространство, которое часто будет использоваться нами в дальнейшем:

$$W_{[0,t_0]}=\{v: v\in C([0,t_0],V), v'\in L_1(0,t_0;V)\},$$
$$t_0\in[0,T]$$

с нормой: $\|v\|_{W_{[0,t_0]}}=\|v\|_{C([0,t_0],V)}+\|v'\|_{L_1(0,t_0;V)}$. Если отрезок $[0,t_0]$ будет понятен из контекста, то для того чтобы не нагромождать обозначения будем писать просто W.

Мы предполагаем, что $f\in L_1(0,T;V^*)$; $a\in V$.

Определение 0.1. *Слабым решением задачи (0.2), (0.3), (0.4), (0.5) называется функция $v\in W$, удовлетворяющая для любого $\varphi\in V$ и почти всех $t\in(0,T)$ равенству*

$$\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx+\nu\int_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx-\int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+ +\varkappa\int_\Omega\nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right):\nabla\varphi\,dx=\langle f,\varphi\rangle \quad (0.6)$$

и начальному условию

$$v(0)=a. \quad (0.7)$$

Здесь $\nabla u:\nabla\varphi, u=(u_1,...,u_n),\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_n)$ обозначает покомпонентное умножение матриц, определяемое равенством $\nabla u:\nabla\varphi=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$.

Введем операторы с помощью следующих равенств:

$$A:V\mapsto V^*,\ \ \langle Av,\varphi\rangle=\int_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx,\ \ v,\varphi\in V;$$

$$B:L_4(\Omega)\mapsto V^*,\ \ \langle B(v),\varphi\rangle=\int_\Omega v_iv_j\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,$$
$$v\in L_4(\Omega),\ \ \varphi\in V.$$

Тогда равенство (0.6) можно переписать в виде

$$\langle(\varkappa A+I)v',\varphi\rangle+\langle\nu Av,\varphi\rangle-\langle B(v),\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle \quad (0.8)$$

Здесь I — оператор вложения V в V^*. Поскольку в равенстве (0.8) функция $\varphi\in V$ произвольна, то (8) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$(\varkappa A+I)v'+\nu Av-B(v)=f. \quad (0.9)$$

Итак, слабое решение задачи (0.2), (0.3), (0.4), (0.5) — это решение операторного уравнения (0.9), удовлетворяющее начальному условию (0.7).

Математическая модель движения жидкости Фойгта [2], обобщенные модели жидкости Кельвина–Фойгта, а также модели, описывающие движение слабо концентрированных растворов полимеров исследованы в работах [7], [9], [10], [11]. Отметим работу [10], в которой вводятся понятия обобщенного сильного и обобщенного слабого решения для системы Фойгта и устанавливается теорема существования и единственности таких решений. Однако, эти понятия отличаются от предложенного в данной работе понятия слабого решения. Введение нового понятия слабого решения соответствует подходу Р. Темама [12] и позволяет установить существование решения для случая $a\in V; f\in L_1(0,T;V^*)$ и негладких областей с липшицевой границей $\partial\Omega$. В [10] существование сильного обобщенного решения предполагает, что $a\in W_2^2(\Omega)^n\cap V$, $f\in L_2(Q_T)$. Существование слабого обобщенного решения доказано в предположении, что $a\in V$, $f\in L_2(Q_T)$. Кроме того, теоремы существования и в том, и в другом случае установлены для областей с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Отметим также, что для $f\in L_2(Q_T)$ слабые решения, изучаемые в этой работе, являются сильными обобщенными решениями в смысле [10], однако при меньших ограничениях на начальные данные a и область Ω.

Основным результатом данной работы является следующая теорема:

Теорема 0.1. *При любых $f\in L_1(0,T;V^*)$, $a\in V$ существует единственное слабое решение $v\in W$ задачи (0.2)—(0.5).*

Доказательство теоремы проводится по схеме работы [6]. Поставленная начально-краевая задача заменяется операторным уравнением. Разрешимость операторного уравнения устанавливается методом продолжения решений на основе теории топологической степени с помощью априорных оценок решений.

Работа включает в себя введение и 6 параграфов. В первом параграфе вводятся операторные уравнения, эквивалентные поставленной задаче о слабых решениях. Во втором параграфе исследуются свойства операторов из этих операторных уравнений. В третьем параграфе получена априорная оценка для решений операторного уравнения. В четвертом параграфе получена теорема существования слабых решений начально-краевой задачи для модели движения жидкости Фойгта. В пятом параграфе доказывается теорема единственности решения. В последнем параграфе получена одна теорема о классах слабых решений задачи (0.2)—(0.5) при $f \in L_p(0,T;V^*)$ и $f \in C([0,T],V^*)$.

1. Эквивалентные операторные уравнения

Рассмотрим следующее операторное уравнение:

$$(\varkappa A + I)v' + C(v) - B(v) = F, \qquad (1.1)$$

где $F = f - \nu A a$ и $C(v)(t) = \int\limits_0^t \nu A v'(s)\, ds$.

Заметим, что задача (0.9), (0.7) эквивалентна задаче (1.1), (0.7). Действительно, для любой функции $\varphi \in V$ имеем:

$$\langle C(v)(t), \varphi\rangle = \left\langle \int\limits_0^t \nu A v'(s)\, ds, \varphi \right\rangle = \int\limits_0^t \langle \nu A v'(s), \varphi\rangle\, ds =$$

$$= \nu \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \nabla v'(s) : \nabla\varphi\, dxds = \nu \int\limits_\Omega \int\limits_0^t \nabla v'(s) : \nabla\varphi\, dsdx =$$

$$= \nu \int\limits_\Omega \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}(\nabla v(s) : \nabla\varphi)\, dsdx = \nu \int\limits_\Omega (\nabla v(s) : \nabla\varphi)\,|_0^t\, dx =$$

$$= \nu \int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi\, dx - \nu \int\limits_\Omega \nabla a : \nabla\varphi dx =$$

$$= \langle \nu A v(t), \varphi\rangle - \langle \nu A a, \varphi\rangle$$

или, что то же самое $\langle \nu A v, \varphi\rangle = \langle C(v), \varphi\rangle + \langle \nu A a, \varphi\rangle$. Откуда и получаем требуемое.

Таким образом задача о слабом решении эквивалентна задаче о существовании решения $v \in W$ операторного уравнения (1.1), причём решение должно удовлетворять начальному условию (0.7).

Введем следующие обозначения:

$$L : W \mapsto L_1(0,T;V^*) \times V,\ \ L(v) = ((\varkappa A + I)v', v\,|_{t=0});$$

$$g_1 : W \mapsto L_1(0,T;V^*) \times V,\ \ g_1(v) = (C(v), 0);$$

$$g : W \mapsto L_1(0,T;V^*) \times V,\ \ g(v) = (\nu A v, 0);$$

$$K : W \mapsto L_1(0,T;V^*) \times V,\ \ K(v) = (B(v), 0).$$

Тогда задача (0.9), (0.7) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$L(v) + g(v) - K(v) = (f, a), \qquad (1.2)$$

а эквивалентная ей задача (1.1), (0.7) равносильна операторному уравнению:

$$L(v) + g_1(v) - K(v) = (f - \nu A a, a) \qquad (1.3)$$

В работе будет установлена разрешимость операторного уравнения (1.3) с помощью априорной оценки для решений уравнения (1.2).

2. Исследование свойств операторов

В этом разделе исследуются свойства операторов из операторных уравнений (0.9), (1.1), (1.2) и (1.3). Чтобы не нагромождать обозначения мы будем обозначать теми же буквами операторы, действующие в разных пространствах. Например, в нижеследующей лемме оператор A — это оператор из V в V^*, оператор из $L_1(0,t_0;V)$ в $L_1(0,t_0;V^*)$ и оператор из $C([0,T],V)$ в $C([0,T],V^*)$. Из контекста всегда будет понятно в каких пространствах действует данный оператор.

2.1 Свойства операторов A, $\varkappa A + I$ и C

Лемма 2.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $A : V \mapsto V^*$ — обратим, непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{V^*} \le \|u\|_V \qquad (2.1)$$

b) Для любого $t_0 \in [0,T]$ оператор $A : L_1(0,t_0;V) \mapsto L_1(0,t_0;V^*)$ — непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{L_1(0,t_0;V^*)} \le \|u\|_{L_1(0,t_0;V)} \qquad (2.2)$$

c) Оператор $A : C([0,T],V) \mapsto C([0,T],V^*)$ — непрерывен и для него имеет место оценка: $\|Au\|_{C([0,T],V^*)} \le \|u\|_{C([0,T],V)}$

Доказательство: *a)* Для любой функции $u \in V$ форма

$$\varphi \in V \mapsto ((u,\varphi)) \text{ линейна и непрерывна } V.$$

Следовательно, существует элемент Au из V^* такой, что

$$\langle Au, \varphi \rangle = ((u,\varphi)) \text{ для всех } \varphi \in V,$$

причем отображение $u \mapsto Au$ линейно на V.

Для доказательства непрерывности A достаточно доказать его ограниченность. По определению имеем

$$\|Au\|_{V^*} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|_V\neq 0}} \frac{|\langle Au,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_V} \le \sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|_V\neq 0}} \frac{\|u\|_V\cdot\|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = \|u\|_V,$$

и, следовательно, $\|Au\|_{V^*} \le \|u\|_V$. Таким образом оператор $A: V \mapsto V^*$ ограничен и непрерывен. Более того в силу теоремы 1.2.2 и замечания 1.2.2 [12] (с. 28, 31) отображение A является изоморфизмом V на V^*.

b) Пусть $t_0 \in [0,T]$, $u \in L_1(0,t_0;V)$. Тогда проинтегрировав (2.1) от 0 до t_0, мы получим, что

$$\|Au\|_{L_1(0,t_0;V^*)} = \int_0^{t_0} \|Au(t)\|_{V^*}\, dt \le$$

$$\le \int_0^{t_0} \|u(t)\|_V\, dt = \|u\|_{L_1(0,t_0;V)}.$$

Поскольку, A — линеен и ограничен, то он непрерывен как оператор из $L_1(0,t_0;V)$ в $L_1(0,t_0;V^*)$.

c) Пусть $u \in C([0,T],V)$, тогда $Au(t)$ непрерывно по t как суперпозиция непрерывных отображений:

$$[0,T] \xrightarrow{u} V \xrightarrow{A} V^*$$

Отсюда, используя оценку (2.1), мы получим следующую оценку:

$$\|Au\|_{C([0,T],V^*)} \le \|u\|_{C([0,T],V)}.$$

Так как оператор A линеен и ограничен, то он непрерывен как оператор из $C([0,T],V)$ в $C([0,T],V^*)$. □

Лемма 2.2. *Для оператора $\varkappa A + I$ имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $\varkappa A + I : V \mapsto V^*$ — обратим, непрерывен, для него имеют место оценки:

$$\varkappa \|u\|_V \le \|(\varkappa A + I)u\|_{V^*} \le l_1 \|u\|_V, \qquad (2.3)$$

где l_1 — константа, зависящая от $\varkappa$.

b) Оператор $(\varkappa A + I) : L_p(0,T;V) \mapsto L_p(0,T;V^*)$, $(1 \le p < \infty)$ — непрерывен, обратим и для него имеют место оценки:

$$\varkappa \|u\|_{L_p(0,T;V)} \le \|(\varkappa A + I)u\|_{L_p(0,T;V^*)} \le l_1 \|u\|_{L_p(0,T;V)} \qquad (2.4)$$

Доказательство: *a)* В силу леммы 2.1 *(a)* оператор $A: V \mapsto V^*$ непрерывен; поскольку вложение $V \subset V^*$ непрерывно, то I непрерывен как оператор из V в V^*. Таким образом $\varkappa A + I$ непрерывен из V в V^* как сумма двух непрерывных операторов.

Покажем, что $\varkappa A + I$ обратим, как оператор из V в V^*. Для этого достаточно доказать, что оператор $\varkappa A + I$ сильно монотонный (по терминологии [3]). Пусть $u, v \in V$, тогда получим, что

$$\langle (\varkappa A + I)u - (\varkappa A + I)v, u - v\rangle =$$

$$= \varkappa((u-v,u-v)) + (u-v,u-v) =$$

$$= \varkappa \|u-v\|_V^2 + \|u-v\|_H^2 \ge \varkappa \|u-v\|_V^2$$

и, следовательно, $\varkappa A + I$ — сильно монотонный оператор с постоянной монотонности $\varkappa$. В силу теоремы 2.2 и следствия 2.3 из [3] (с. 96—97) оператор $\varkappa A + I$ обратим и обратный оператор $(\varkappa A + I)^{-1}$ липшиц-непрерывен.

Пусть $u \in V$, тогда из предыдущего неравенства имеем

$$\langle (\varkappa A + I)u, u\rangle \ge \varkappa \|u\|_V^2.$$

С другой стороны: $\langle (\varkappa A + I)u, u\rangle \le \|(\varkappa A + I)u\|_{V^*} \|u\|_V$. Таким образом имеем: $\varkappa \|u\|_V^2 \le \|(\varkappa A + I)u\|_{V^*} \|u\|_V$. Отсюда и получается требуемая оценка снизу.

Найдем теперь оценку сверху на $\varkappa A + I$.

$$\|(\varkappa A + I)u\|_{V^*} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|_V\neq 0}} \frac{|\langle (\varkappa A + I)u,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_V} \le$$

$$\le \sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|_V\neq 0}} \frac{\varkappa \|u\|_V \|\varphi\|_V + \|u\|_H \|\varphi\|_H}{\|\varphi\|_V} \le$$

$$\le \sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|_V\neq 0}} \frac{\varkappa \|u\|_V \|\varphi\|_V + C_1^2 \|u\|_V \|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = l_1 \|u\|_V$$

где $l_1 = \varkappa + C_1^2$; мы воспользовались тем, что $\|u\|_H \le C_1 \|u\|_V$ для некоторой константы C_1. Таким образом, мы получили требуемую оценку сверху.

b) Пусть $u \in L_p(0,T;V)$. Возведем правую часть оценки (2.4) в p-тую степень и проинтегрируем от 0 до Т. Получим:

$$\int_0^T \|(\varkappa A + I)u\|_{V^*}^p\, dt \le l_1 \int_0^T \|u\|_V^p\, dt.$$

Так как $u \in L_p(0,T;V)$, то правая часть неравенства конечна, и, следовательно, левая часть неравенства конечна. Таким образом

$$\|(\varkappa A + I)u\|_{L_p(0,T;V^*)} \le l_1 \|u\|_{L_p(0,T;V)}.$$

Отсюда следует, что $(\varkappa A+I)u\in L_p(0,T;V^*)$, поскольку $\varkappa A+I$ — линейный и ограниченный, то получаем, что он непрерывен как оператор из $L_p(0,T;V)$ в $L_p(0,T;V^*)$. Покажем теперь его обратимость. Сначала докажем, что множество значений оператора $\varkappa A+I$ совпадает со всем $L_p(0,T;V^*)$. Для этого надо показать, что уравнение $(\varkappa A+I)u=w$ имеет решение $u\in L_p(0,T;V)$ для любого $w\in L_p(0,T;V^*)$. В силу того что оператор $\varkappa A+I:V\mapsto V^*$ обратим, мы имеем, что при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ уравнение $(\varkappa A+I)u=w$ имеет решение $u(t)=(\varkappa A+I)^{-1}w(t)$. Осталось показать, что определенная таким образом функция $u\in L_p(0,T;V)$. В силу оценки (2.3) мы имеем:

$$\varkappa\,\|u\|_V\le\left\|(\varkappa A+I)u\right\|_{V^*}=\|w\|_{V^*}.$$

Возведем это неравенство в p-тую степень и проинтегрируем его по отрезку $[0,T]$. Поскольку $w\in L_p(0,T;V^*)$, мы имеем, что

$$\varkappa\,\|u\|^p_{L_p(0,T;V)}=\varkappa\int_0^T\|u\|_V^p\,dt\le$$
$$\le\int_0^T\left\|(\varkappa A+I)u\right\|^p_{V^*}dt=\int_0^T\|w\|^p_{V^*}dt<\infty.$$

Из этого неравенства следует, что $u\in L_p(0,T;V)$ и $\ker(\varkappa A+I)=\{0\}$. В итоге получили, что $\varkappa A+I$ обратим как оператор из $L_p(0,T;V)$ в $L_p(0,T;V^*)$. □

Лемма 2.3. *Для операторов $\varkappa A+I$ и C имеет место следующее неравенство:*

$$\|C(v)\|_{L_1(0,t_0;V^*)}\le\frac{\nu t_0}{\varkappa}\left\|(\varkappa A+I)v'\right\|_{L_1(0,t_0;V^*)}\tag{2.5}$$

для любых $t_0\in[0,T],v\in W$.

Доказательство: . Пусть $t_0\in[0,T],t_0$ — фиксировано. При $t\in[0,t_0]$ из оценки (2.1) получим

$$\|C(v)(t)\|_{V^*}=\left\|\int_0^t\nu Av'(s)ds\right\|_{V^*}\le\nu\int_0^t\|Av'(s)\|_{V^*}ds\le$$
$$\le\nu\int_0^t\|v'(s)\|_V\,ds\le\nu\int_0^{t_0}\|v'(s)\|_V\,ds=\nu\,\|v'\|_{L_1(0,t_0;V)}.$$

Интегрируя полученное неравенство по t от 0 до t_0, приходим к оценке

$$\int_0^{t_0}\|C(v)(t)\|_{V^*}dt\le\nu\int_0^{t_0}\|v'\|_{L_1(0,t_0;V)}dt=\nu t_0\,\|v'\|_{L_1(0,t_0;V)}$$

или, что то же самое, к оценке $\|C(v)\|_{L_1(0,t_0;V^*)}\le\le\nu t_0\,\|v'\|_{L_1(0,t_0;V)}$. Воспользовавшись теперь оценкой (2.4) снизу на $\varkappa A+I$, мы и получим требуемую оценку (2.5). □

2.2. Свойства оператора B

Лемма 2.4. *Для отображения B имеют место следующие свойства:*

a) Отображение $B:V\mapsto V^*$ — непрерывно, для него имеет место оценка:

$$\|B(v)\|_{V^*}\le C_3\,\|v\|_V^2\tag{2.6}$$

с некоторой константой C_3.

b) Отображение $B:L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)\mapsto\mapsto L_1(0,T;V^*)$ — непрерывно.

c) Отображение $B:W\mapsto L_1(0,T;V^*)$ — вполне непрерывно и для него имеет место оценка:

$$\|B(v)\|_{L_1(0,T;V^*)}\le C_3T\,\|v\|^2_{C([0,T],V)}.\tag{2.7}$$

Доказательство: *a)* Для каждого $v\in V$ форма

$$\varphi\mapsto\int_\Omega v_iv_j\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,\varphi\in V,$$

линейна и непрерывна на V [12] (с. 133). Следовательно, существует элемент из V^*, который мы обозначим через $B(v)$, такой, что

$$\langle B(v),\varphi\rangle=\int_\Omega v_iv_j\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\quad\forall\varphi\in V.$$

В силу теоремы вложения Соболева мы имеем непрерывное вложение $V\subset L_4(\Omega)^n$ при $(n\le4)$ и, следовательно: $\|v\|_{L_4(\Omega)^n}\le C_2\,\|v\|_V$. В последней оценке константа C_2 зависит от области Ω. Таким образом имеем

$$\left|\langle B(v),\varphi\rangle\right|\le\max_{i,j}\|v_iv_j\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi\|_V\le$$
$$\le C_0\,\|v\|^2_{L_4(\Omega)^n}\|\varphi\|_V,$$

откуда и следует, что

$$\|B(v)\|_{V^*}\le C_0\,\|v\|^2_{L_4(\Omega)^n}\tag{2.8}$$

с некоторой константой C_0. Отсюда $\|B(v)\|_{V^*}\le\le C_3\,\|v\|_V^2$ с константой $C_3=C_0C_2^2$.

Покажем непрерывность отображения $B:V\mapsto V^*$, $v\mapsto B(v)$. Для произвольных v^m, v^0 имеем:

$$\left|\langle B(v^m),\varphi\rangle-\langle B(v^0),\varphi\rangle\right|=$$
$$=\left|\int_\Omega v_i^mv_j^m\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx-\int_\Omega v_i^0v_j^0\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx\right|\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^n\left\|v_i^mv_j^m-v_i^0v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)}\le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n} \le$$

$$\le C_4 \|\varphi\|_V \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n} \le \le C_4 \|\varphi\|_V$. Отсюда следует, что

$$\left\| B(v^m) - B(v^0) \right\|_{V^*} \le C_4 \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 + v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m (v_j^m - v_j^0) \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_j^0 (v_i^m - v_i^0) \right\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| v_j^m - v_j^0 \right\|_{L_4(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_j^0 \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| v_i^m - v_i^0 \right\|_{L_4(\Omega)} \le$$

$$\le n^2 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} + n^2 \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} =$$

$$= n^2 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} .$$

Таким образом получили, что

$$\begin{aligned} &\left\| B(v^m) - B(v^0) \right\|_{V^*} \le \\ &\le \tilde{C}_4 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset V$ сходится к некоторой предельной функции v^0. Из непрерывности вложения $V \subset L_4(\Omega)^n$ при $(n \le 4)$ следует, что $v^m \to v^0$ в норме пространства $L_4(\Omega)^n$. Тогда непрерывность отображения $B : V \mapsto V^*$ следует из неравенства (2.9).

b) Для $v \in L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$ из оценки (2.8) следует, что $B(v) \in L_1(0,T;V^*)$. Установим теперь непрерывность отображения $B : L_2(0,T;L_4(\Omega)^n) \mapsto \mapsto L_1(0,T;V^*)$.

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_2(0,T; L_4(\Omega)^n)$ сходящаяся и ее предел v^0. Проинтегрируем неравенство (2.9) от 0 до T. Получим:

$$\int_0^T \left\| B(v^m(t)) - B(v^0(t)) \right\|_{V^*} dt \le$$

$$\le \tilde{C}_4 \int_0^T \left(\left\| v^m(t) \right\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\| v^0(t) \right\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \left\| (v^m - v^0)(t) \right\|_{L_4(\Omega)^n} dt \le$$

$$\le \tilde{C}_4 \left(\int_0^T \left\| v^m(t) \right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T \left\| v^m(t) - v^0(t) \right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \tilde{C}_4 \left(\int_0^T \left\| v^0(t) \right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T \left\| v^m(t) - v^0(t) \right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Или, что то же самое:

$$\left\| B(v^m) - B(v^0) \right\|_{L_1(0,T;V^*)} \le$$

$$\le \tilde{C}_4 \left(\|v^m\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)} + \|v^0\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)} \right) \|v^m - v^0\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)} .$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. А это значит, что отображение $B : L_2(0,T;L_4(\Omega)^n) \mapsto L_1(0,T;V^*)$ — непрерывно.

c) Воспользуемся замечанием 2.1 к теореме 2.2 из [12] (с. 216—223). Оно имеет следующую формулировку:

Замечание 2.1. *Пусть X_0, X — банаховы пространства, а X_1 — гильбертово пространство. Предполагается, что они удовлетворяют следующему условию:*

$$X_0 \subset X \subset X_1,$$

где вложения непрерывны, X_0 — рефлексивно, вложение $X_0 \to X$ компактно. Пусть, далее, $T > 0$ — фиксированное конечное число и α — конечное число, $\alpha > 1$.

Рассмотрим пространство $Y = \{v : v \in \in L_\alpha(0,T;X_0); v' \in L_1(0,T;X_1)\}$ с нормой $\|v\|_Y = = \|v\|_{L_\alpha(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L_1(0,T;X_1)}$.

При перечисленных предположениях вложение Y в $L_\alpha(0,T;X)$ — компактно.

В нашем случае

$$X_0 = V,\ \ X = L_4(\Omega)^n,\ \ X_1 = L_2(\Omega)^n,\ \ \alpha = 2,$$

$$Y = \{v : v \in L_2(0,T;V);\ \ v' \in L_1(0,T;L_2(\Omega)^n)\}.$$

Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $V \subset L_4(\Omega)^n$ при $(n \le 3)$, то выполнены все условия замечания 2.1 и из него вытекает компактность вложения Y в $L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$.

Заметим, что $W \subset Y$, причем вложение непрерывно. Это вытекает из того, что вложения $C([0,T],V) \subset L_2(0,T;V)$ и $L_1(0,T;V) \subset \subset L_1(0,T;L_2(\Omega)^n)$ непрерывны. Далее, из пункта *(b)* мы имеем, что отображение $B : L_2(0,T;L_4(\Omega)^n) \mapsto L_1(0,T;V^*)$ — непрерывно.

Таким образом имеем

$$W \subset Y \subset L_2(0,T;L_4(\Omega)^n) \xrightarrow{B} L_1(0,T;V^*)$$

где первое вложение непрерывно, второе вложение — вполне непрерывно, а отображение B — непрерывно. Таким образом получили, что отображение $B: W \mapsto L_1(0,T;V^*)$ — вполне непрерывно.

Пусть $v \in W$. Проинтегрировав неравенство (2.6) по t от 0 до T, получим требуемое неравенство:

$$\int_0^T \|B(v)(t)\|_{V^*}\, dt \le C_3 \int_0^T \|v(t)\|_V^2\, dt \le$$

$$\le C_3 \left(\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_V \right)^2 \int_0^T dt = C_3 T \, \|v\|^2_{C([0,T],V)} . \ \square$$

2.3 Свойства операторов L и g_1

Введем некоторые определения, которые потребуются нам в этом разделе (все определения могут быть найдены в [6]). Пусть E — банахово пространство, 2^E — множество всех ограниченных подмножеств E.

Определение 2.1. *Мерой некомпактности в банаховом пространстве E называется функция $\psi: 2^E \mapsto R$, принимающая неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям:*

a) $\psi(\overline{co}(M)) = \psi(M)$, *где* $\overline{co}(M)$ *— замыкание выпуклой оболочки множества* $M \in 2^E$.

b) $\forall (M_1, M_2 \in 2^E)[M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \psi(M_1) \le \psi(M_2)]$

В этом разделе мы будем использовать меру некомпактности Куратовского в пространстве $L_1(0,T;V^*)\times V$.

Определение 2.2. *Мерой некомпактности Куратовского множества $M \in 2^E$ называется число $\gamma(M)$ равное инфимуму тех $d > 0$, для которых множество M может быть представлено как объединение конечного числа подмножеств M_i с диаметром не больше чем d.*

Определение 2.3. *Отображение g_1 называется уплотняющим относительно оператора L по мере некомпактности γ на $L_1(0,T;V^*)\times V$ если*

$$\gamma(g_1(M)) < \gamma(L(M))$$

для каждого $M \subset W$ такого, что множества $g_1(M)$ и $L(M)$ ограничены и $\gamma(g_1(M)) \ne 0$.

Лемма 2.5. *Для операторов L и g_1 имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $L: W \mapsto L_1(0,T;V^*)\times V$ обратим.

b) Оператор $g_1: W_{[0,t_0]} \mapsto L_1(0,t_0;V^*)\times V$ является уплотняющим относительно оператора $L: W_{[0,t_0]} \mapsto L_1(0,t_0;V^*)\times V$ для некоторого $t_0 \in [0,T]$.

Доказательство: *a)* Для того, чтобы доказать что оператор L обратим, достаточно показать, что задача

$$(\varkappa A + I)v' = f \tag{2.10}$$

$$v\,|_{t=0} = a \tag{2.11}$$

имеет единственное решение $v \in W$ для любых $f \in L_1(0,T;V^*), a \in V$. Покажем это:

Поскольку оператор $(\varkappa A + I)$ обратим как оператор из $L_1(0,T;V)$ в $L_1(0,T;V^*)$, то применяя $(\varkappa A + I)^{-1}$ к уравнению (2.10), получим, что

$$v' = (\varkappa A + I)^{-1}(f) \ \text{ и } \ v' \in L_1(0,T;V).$$

Так как

$$v(t) = \int_0^t (\varkappa A + I)^{-1}(f)\, ds + a$$

получаем, что $v \in C([0,T],V)$.

Отсюда следует, что $v \in W$. Покажем, что решение единственно. Действительно, если существует второе решение $u \in W$ $(u \ne v)$ задачи (2.10), (2.11), то разность $(v-u)$ является решением следующей задачи: $(\varkappa A + I)(v' - u') = 0$, $(v-u)\,|_{t=0} = 0$.

Применим к $(\varkappa A + I)(v' - u') = 0$ оператор $(\varkappa A + I)^{-1}$. Получим, что $v' - u' = 0$. Отсюда следует, что $v - u \equiv C$. Из условия $(v-u)\,|_{t=0} = 0$ вытекает, что $v \equiv u$. Таким образом получили противоречие с нашим предположением о том, что $u \ne v$. Следовательно, оператор L обратим.

b) Уплотняемость оператора g_1 относительно оператора L следует из неравенства (2.5). Действительно, для любого множества $M \in W$ такого, что $\gamma(M) \ne 0$, мы имеем:

$$\gamma(g_1(M)) \le \frac{\nu t_0}{\varkappa} \gamma(L(M)).$$

Выбирая теперь t_0 таким образом, чтобы $\frac{\nu t_0}{\varkappa} < 1$, мы и получим требуемое утверждение. $\square$

3. Априорная оценка

В этом пункте устанавливается априорная оценка в пространстве W решений семейства операторных уравнений, включающих уравнение (1.2).

Введем вспомогательное семейство операторных уравнений:

$$L(v)+\lambda g(v)-\lambda K(v)=(f,a) \text{ где } \lambda\in[0,1]. \quad (3.1)$$

Установим априорную оценку для решений этого семейства. Пусть $v\in W$ — решение уравнения (3.1) для некоторого $\lambda\in[0,1]$. Применим первую компоненту (3.1) для $t\in[0,T]$ к значению $v(t)$ для функции $v\in W$. Получим:

$$\left\langle(\varkappa A+I)v'(t),v(t)\right\rangle+\lambda\left\langle\nu Av(t),v(t)\right\rangle-$$
$$-\lambda\left\langle B(v)(t),v(t)\right\rangle=\left\langle f(t),v(t)\right\rangle.$$

По определению оператора B имеем, что

$$\left\langle B(v)(t),v(t)\right\rangle=\int_\Omega v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx=$$
$$=\frac12\int_\Omega v_i(t)\frac{\partial(v_j(t)v_j(t))}{\partial x_i}\,dx=-\frac12\int_\Omega\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i}v_j(t)v_j(t)\,dx=$$
$$=-\frac12\int_\Omega \operatorname{div}v(t)\,v_j(t)v_j(t)\,dx=0.$$

Таким образом получим, что

$$\left\langle(\varkappa A+I)v'(t),v(t)\right\rangle+\lambda\left\langle\nu Av(t),v(t)\right\rangle=\left\langle f(t),v(t)\right\rangle.$$

Проинтегрируем это равенство по s от 0 до t, где $t\in[0,t_1],t_1$ будет определено позднее.

$$\int_0^t\left\langle(\varkappa A+I)v'(s),v(s)\right\rangle ds+\int_0^t\lambda\left\langle\nu Av(s),v(s)\right\rangle ds=$$
$$=\int_0^t\left\langle f(s,x),v(s)\right\rangle ds. \quad (3.2)$$

Используя определение оператора $\varkappa A+I$ и формулу интегрирования по частям получим

$$\int_0^t\left\langle\varkappa Av'(s),v(s)\right\rangle ds=\int_0^t\int_\Omega\varkappa\nabla v'(s):\nabla v(s)\,dx\,ds=$$
$$=\frac{\varkappa}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}\left(\int_\Omega\nabla v(s):\nabla v(s)\,dx\right)ds=$$
$$=\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega\nabla v(t):\nabla v(t)\,dx-\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega\nabla a:\nabla a\,dx=$$
$$=\frac{\varkappa}{2}((v(t),v(t)))-\frac{\varkappa}{2}((a,a))=\frac{\varkappa}{2}\left\|v(t)\right\|_V^2-\frac{\varkappa}{2}\|a\|_V^2.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\int_0^t\left\langle Iv'(s),v(s)\right\rangle ds=\int_0^t\int_\Omega v'(s)\cdot v(s)\,dx\,ds=$$
$$=\frac12\int_0^t\frac{d}{ds}\left(\int_\Omega v(s)\cdot v(s)\,dx\right)ds=$$
$$=\frac12\int_\Omega v(s)\cdot v(s)\,dx\,\Big|_0^t=\frac12\int_\Omega v(t)\cdot v(t)\,dx-\frac12\int_\Omega a\cdot a\,dx=$$
$$=\frac12(v(t),v(t))-\frac12(a,a)=\frac12\left\|v(t)\right\|_H^2-\frac12\|a\|_H^2.$$

В итоге получается

$$\int_0^t\left\langle(\varkappa A+I)v'(s),v(s)\right\rangle ds=$$
$$=\frac{\varkappa}{2}\left\|v(t)\right\|_V^2+\frac12\left\|v(t)\right\|_H^2-\frac{\varkappa}{2}\|a\|_V^2-\frac12\|a\|_H^2.$$

Тогда (3.2) можно переписать в виде

$$\frac{\varkappa}{2}\left\|v(t)\right\|_V^2+\frac12\left\|v(t)\right\|_H^2-\frac{\varkappa}{2}\|a\|_V^2-\frac12\|a\|_H^2+$$
$$+\lambda\int_0^t\left\langle\nu Av(s),v(s)\right\rangle ds=\int_0^t\left\langle f(s,x),v(s)\right\rangle ds.$$

Перенесем в последнем равенстве все слагаемые кроме первых двух в правую часть. Тогда

$$\frac{\varkappa}{2}\left\|v(t)\right\|_V^2+\frac12\left\|v(t)\right\|_H^2\le\lambda\left|\int_0^t\left\langle\nu Av(s),v(s)\right\rangle ds\right|+$$
$$+\left|\int_0^t\left\langle f(x,s),v(s)\right\rangle ds\right|+\frac{\varkappa}{2}\|a\|_V^2+\frac12\|a\|_H^2.$$

Отсюда

$$\frac{\varkappa}{2}\left\|v(t)\right\|_V^2\le\lambda\left|\int_0^t\left\langle\nu Av(s),v(s)\right\rangle ds\right|+$$
$$+\left|\int_0^t\left\langle f(x,s),v(s)\right\rangle ds\right|+\frac{\varkappa}{2}\|a\|_V^2+\frac12\|a\|_H^2. \quad (3.3)$$

Оценим слагаемые в правой части неравенства. Для первого слагаемого имеем

$$\left|\lambda\int_0^t\left\langle\nu Av(s),v(s)\right\rangle ds\right|=\lambda\left|\int_0^t\nu\int_\Omega\nabla v(s):\nabla v(s)\,dx\,ds\right|=$$
$$=\lambda\left|\int_0^t\nu\left\|v(s)\right\|_V^2\,ds\right|\le\nu\max_{0\le s\le t}\left\|v(s)\right\|_V^2\int_0^t ds\le$$
$$\le\nu t_1\max_{0\le s\le t_1}\left\|v(s)\right\|_V^2=\nu t_1\|v\|_{C([0,t_1],V)}^2.$$

Переходим к следующему слагаемому

$$\left|\int_0^t \langle f(x,s), v(s)\rangle\, ds\right| \le \int_0^t \left|\langle f(x,s), v(s)\rangle\right| ds \le$$

$$\le \int_0^t \|f(x,s)\|_{V^*} \|v(s)\|_V\, ds \le \max_{0\le s\le t} \|v(s)\|_V \int_0^t \|f(x,s)\|_{V^*}\, ds \le$$

$$\le \max_{0\le s\le t_1} \|v(s)\|_V \int_0^{t_1} \|f(x,s)\|_{V^*}\, ds =$$

$$= \|v\|_{C([0,t_1],V)} \|f\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \le \frac{\varepsilon \|v\|^2_{C([0,t_1],V)}}{2} + \frac{\|f\|^2_{L_1(0,t_1;V^*)}}{2\varepsilon}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $ab \le \dfrac{\varepsilon a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\varepsilon}$ для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$.

Преобразуем последнее слагаемое. При этом мы воспользуемся тем, что $\|v\|_H \le C_1 \|v\|_V$ с некоторой константой C_1. Здесь как и ранее $l_1 = \varkappa + C_1^2$:

$$\frac{1}{2}\varkappa \|a\|_V^2 + \frac{1}{2}\|a\|_H^2 \le \frac{1}{2} l_1 \|a\|_V^2 .$$

В итоге неравенство (3.3) можно переписать в виде:

$$\frac{\varkappa}{2}\|v(t)\|_V^2 \le$$

$$\le \left(\nu t_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|v\|^2_{C([0,t_1],V)} + \frac{\|f\|^2_{L_1(0,t_1;V^*)}}{2\varepsilon} + \frac{l_1}{2}\|a\|_V^2 .$$

Выберем t_1 таким образом, чтобы $\nu t_1 < \dfrac{\varkappa}{8}$, и ε так, чтобы $\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varkappa}{8}$. Заметим, что правая часть неравенства от t не зависит. Вычислим максимум по $t \in [0, t_1]$ от левой части неравенства. Перенесем члены, содержащие $\|v\|^2_{C([0,t_1],V)}$, в левую часть. Тогда для положительных констант $C_5 = \dfrac{\varkappa}{2} - \left(\nu t_1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $C_6 = \dfrac{1}{2\varepsilon C_5}$, $C_7 = \dfrac{l_1}{2C_5}$, получим

$$\|v\|^2_{C([0,t_1],V)} \le C_6 \|f\|^2_{L_1(0,t_1;V^*)} + C_7 \|a\|_V^2 .$$

Поскольку

$$\|f\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \le \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}, \qquad (3.4)$$

мы получим следующую оценку:

$$\|v\|^2_{C([0,t_1],V)} \le C_6 \|f\|^2_{L_1(0,T;V^*)} + C_7 \|a\|_V^2 . \qquad (3.5)$$

Для получения оценки на $\|v'\|_{L_1(0,t_1;V)}$ заметим, что если $v \in W$ удовлетворяет уравнению (3.1), то справедливо равенство:

$$(\varkappa A + I)v' + \lambda\nu A v - \lambda B(v) = f.$$

Выразим из равенства $(\varkappa A + I)v'$ и применим к обеим частям полученного равенства $(\varkappa A + I)^{-1}$. Тогда

$$v' = (\varkappa A + I)^{-1}\left(-\lambda\nu A v + \lambda B(v) + f\right).$$

Следовательно,

$$\|v'\|_{L_1(0,t_1;V)} =$$

$$= \left\|(\varkappa A + I)^{-1}(-\lambda\nu A v + \lambda B(v) + f)\right\|_{L_1(0,t_1;V)} \le$$

$$\le \left\|(\varkappa A + I)^{-1}\right\| \left\|\lambda\nu A v + \lambda B(v) + f\right\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \le$$

$$\le \left\|(\varkappa A + I)^{-1}\right\| (\lambda\nu \|Av\|_{L_1(0,t_1;V^*)} + \lambda \|B(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)} +$$

$$+ \|f\|_{L_1(0,t_1;V^*)}) \le \left\|(\varkappa A + I)^{-1}\right\| (\nu \|Av\|_{L_1(0,t_1;V^*)} +$$

$$+ \|B(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)} + \|f\|_{L_1(0,t_1;V^*)}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lambda \in [0,1]$. Используя оценки (2.2) и (2.7) для норм $\|Av\|_{L_1(0,t_1;V^*)}$ и $\|B(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)}$ соответственно и оценку (3.4), получим следующую оценку:

$$\|v'\|_{L_1(0,t_1;V)} \le$$

$$\le \left\|(\varkappa A + I)^{-1}\right\| (\nu \|v\|_{L_1(0,t_1;V)} + C_3 t_1 \|v\|^2_{C([0,t_1],V)} +$$

$$+ \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}).$$

Воспользовавшись тем, что

$$\|v\|_{L_1(0,t_1;V)} = \int_0^{t_1} \|v(s)\|_V\, ds \le$$

$$\le t_1 \max_{s\in[0,t_1]} \|v(s)\|_V = t_1 \|v\|_{C([0,t_1],V)}$$

и оценкой (3.5) для $\|v\|_{C([0,t_1],V)}$, получим следующую оценку

$$\|v'\|_{L_1(0,t_1;V)} \le \left\|(\varkappa A + I)^{-1}\right\| \Big(\nu t_1 \sqrt{C_6 \|f\|^2_{L_1(0,T;V^*)} + C_7 \|a\|_V^2} +$$

$$+ C_3 t_1 \left(C_6 \|f\|^2_{L_1(0,T;V^*)} + C_7 \|a\|_V^2\right) + \|f\|_{L_1(0,t_1;V^*)}\Big).$$

Обозначив правую часть последнего неравенства через

$$C_8(\left\|(\varkappa A + I)^{-1}\right\|, \nu, t_1, \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}, \|a\|_V),$$

получим искомую оценку для $\|v'\|_{L_1(0,t_1;V)}$, а именно:

$$\|v'\|_{L_1(0,t_1;V)} \le$$

$$\le C_8(\left\|(\varkappa A + I)^{-1}\right\|, \nu, t_1, \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}, \|a\|_V). \qquad (3.6)$$

Из оценок (3.5) и (3.6) получаем, что для решения уравнения (3.1) имеет место оценка:

$$\|v\|^2_{C([0,t_1],V)} + \|v'\|_{L_1(0,t_1;V)} \le$$
$$\le C_9(\|(\varkappa A+I)^{-1}\|, \varkappa, \nu, t_1, \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}, \|a\|_V). \quad (3.7)$$

Таким образом доказана следующая теорема:

Теорема 3.1. *Если $v \in W$ — решение уравнения (3.1) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место априорная оценка (3.7).*

4. Применение теории степени. Теорема существования

В этом разделе будет доказана теорема существования для слабых решений задачи (0.2)—(0.5).

Пусть E, F — банаховы пространства и D — ограниченное подмножество в E. Рассмотрим множество отображений следующего вида

$$L + g : \overline{D} \subset E \mapsto F$$

где L — обратимый, а g — непрерывный и уплотняющий относительно оператора L по мере некомпактности ψ пространства F. Предполагается, что $L(x) + g(x) \ne 0$, при $x \in \partial D$ (невырожденность оператора $L + g$ на границе ∂D).

Для таких отображений в [6] определена степень $\deg(L + g, \overline{D}, 0)$. Перечислим некоторые свойства этой степени:

1. Если $\deg(L+g,\overline{D},y_0) = \deg(L+g-y_0,\overline{D},0) \ne 0$, то тогда уравнение $L(x)+g(x) = y_0$ имеет решение в D.

2. Если $L(x) + \lambda g(x) \ne y_0$ для всех $x \in \partial D$ и $\lambda \in [0,1]$, тогда

$$\deg(L+g,\overline{D},y_0) = \deg(L,\overline{D},y_0).$$

3. Если уравнение $L(x) = y_0$ имеет решение в D, тогда

$$\deg(L,\overline{D},y_0) = 1.$$

4.1 Теорема существования

Теорема 4.1. *Для любых $f \in L_1(0,T;V^*)$, $a \in V$ уравнение (1.3) имеет по меньшей мере одно решение $v \in W$.*

Доказательство: Пусть $t_2 \in (0,T], t_2 < \frac{\varkappa}{8\nu}$. Заметим, что t_2 удовлетворяет условиям для выбора t_0 и t_1 (напомним, что t_0 выбиралось из условия $t_0 < \frac{\varkappa}{\nu}$, а t_1 выбиралось из условия $t_1 < \frac{\varkappa}{8\nu}$).

Первый шаг. Из оценки (3.7) следует что все решения семейства уравнений (3.1) на отрезке $[0,t_2]$ лежат в шаре $B_R \subset W_{[0,t_2]}$ радиуса $R = C_9(\|(\varkappa A+I)^{-1}\|, \varkappa, \nu, t_1, \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}, \|a\|_V) + 1$ с центром в нуле. Поэтому ни одно из уравнений этого семейства не имеет решений на границе шара B_R. И, следовательно, ни одно из уравнений семейства

$$L(v) + \lambda g_1(v) - \lambda K(v) = (f - \lambda\nu A a, a) \quad (4.1)$$

также не имеет решений на границе шара B_R.

Оператор L — обратим, оператор g_1 — уплотняющий относительно оператора L, оператор K — вполне-непрерывный (вполне-непрерывность оператора следует из леммы 2.4 (c)). Следовательно, оператор $g_1 - K$ также будет уплотняющим. Таким образом для каждого $\lambda \in [0,1]$ для оператора $L + \lambda(g_1 - K)$ определена степень: $\deg(L + \lambda(g_1 - K), \overline{B}_R, (f - \lambda\nu A a, a))$. Поскольку оператор L — обратим, то уравнение $L(v) = (f,a)$ имеет решение в шаре B_R. По свойству 3 степени получаем, что

$$\deg(L, \overline{B}_R, (f,a)) = 1.$$

По свойствам 1 и 2 степени имеем, что

$$\deg(L + g_1 - K, \overline{B}_R, (f - \nu A a, a)) =$$
$$= \deg(L, \overline{B}_R, (f,a)) = 1.$$

Таким образом по свойству 1 степени получаем, что уравнение (1.3) имеет решение $v \in W_{[0,t_2]}$.

Второй шаг. Рассмотрим теперь нашу задачу на отрезке $[t_2, T]$ (в начальном условии вместо a здесь будет $a_1 = v(t_2)$). Произведем замену координат: $\tau = t - t_2$. Тогда получим нашу исходную задачу на отрезке $[0, T_1]$ (здесь $T_1 = T - t_2$) с начальным условием $v(0) = a_1$. По первому шагу доказательства у нее существует хотя бы одно решение $v \in W_{[0,t_2]}$. Таким образом мы получили решение (1.3) на отрезке $[0, 2t_2]$. Так как в точке t_2 решение на отрезке $[0,t_2]$ соединяется (по построению) с решением на отрезке $[t_2, 2t_2]$, то $v \in C([0,2t_2],V)$. Следовательно $v \in W_{[0,2t_2]}$.

Повторяем процедуру продолжения решения. Поскольку каждый раз мы продолжаем решение на отрезок фиксированной длины t_2 и отрезок $[0,T]$ — конечен, то за конечное число шагов мы построим решение уравнения (1.3) на отрезке $[0,T]$. То, что функция $v \in W$, вытекает из построения. □

Из теоремы вытекает, что операторное уравнение (0.9) имеет решение, причем это решение удовлетворяет начальному условию

(0.7). Отсюда имеем, что существует хотя бы одно слабое решение задачи (0.2)—(0.5).

5. Единственность решения

Теорема 5.1. *Слабое решение задачи (0.2)—(0.5) единственно.*

Доказательство: Первый шаг. Докажем единственность слабого решения задачи (0.2)—(0.5) на отрезке $[0,t_2]$, где $t_2 < \frac{\varkappa}{8\nu}$.

Предположим противное. Пусть существуют два решения u и v ($u \neq v$) уравнения (0.6) на отрезке $[0,t_2]$, удовлетворяющие начальному условию (0.7). Вычтем из уравнения (0.6) для u уравнение (0.6) для v. Обозначим через $w = u - v$. Тогда для w мы получим равенство

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\varphi\,dx + \nu\int_\Omega \nabla w : \nabla\varphi\,dx - \int_\Omega (u_i u_j - v_i v_j)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \varkappa\int_\Omega \nabla\frac{\partial w}{\partial t} : \nabla\varphi\,dx = 0$$

для любых $\varphi \in V$ и почти всех $t \in (0,t_2)$. Поскольку, это равенство выполнено для всех $\varphi \in V$, то оно выполнено и для $\varphi = w$. Таким образом при почти всех $t \in (0,t_2)$ получим:

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} w\,dx + \nu\int_\Omega \nabla w : \nabla w\,dx - \int_\Omega (u_i u_j - v_i v_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx + \varkappa\int_\Omega \nabla\frac{\partial w}{\partial t} : \nabla w\,dx = 0. \tag{5.1}$$

Заметим, что

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} w\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w\cdot w)\,dx,$$

$$\varkappa\int_\Omega \nabla\frac{\partial w}{\partial t} : \nabla w\,dx = \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\nabla w : \nabla w)\,dx,$$

$$\int_\Omega (u_i u_j - v_i v_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega (u_i u_j - u_i v_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega (u_i v_j - v_i v_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega u_i w_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx +$$
$$+\int_\Omega v_j w_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega u_i\frac{\partial (w_j w_j)}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega v_j w_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} u\, w_j w_j\,dx + \int_\Omega v_j w_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega v_j w_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx.$$

Тогда равенство (5.1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w\,w)\,dx + \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\nabla w : \nabla w)\,dx + \nu\int_\Omega \nabla w : \nabla w\,dx - \int_\Omega v_j w_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\,dx = 0$$

для почти всех $t \in (0,t_2)$. Проинтегрируем это равенство по отрезку $[0,t]$ ($t \in [0,t_2]$) и перенесем нелинейный член в правую часть

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w(x,t)w(x,t)\,dx + \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \nabla w(x,t) : \nabla w(x,t)\,dx + \nu\int_0^t\int_\Omega \nabla w(x,s) : \nabla w(x,s)\,dx\,ds =$$
$$= \int_0^t\int_\Omega v_j(x,s)w_i(x,s)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x,s)\,dx\,ds.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = 0$. Перепишем это равенство в виде:

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2 + \frac{\varkappa}{2}\|w(t)\|_V^2 + \nu\int_0^t \|w(s)\|_V^2\,ds = \int_0^t\int_\Omega v_j(x,s)w_i(x,s)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x,s)\,dx\,ds. \tag{5.2}$$

С помощью неравенства Гёльдера, непрерывного вложения V в $L_4(\Omega)^n$, априорной оценки для функции v и неравенства:

$$\|w\|_{L_4(\Omega)^n} \le C_{10}\|\nabla w\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}$$

можно оценить правую часть (5.2) следующим образом

$$\left|\int_0^t\int_\Omega v_j(x,s)w_i(x,s)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x,s)\,dx\,ds\right| \le$$
$$\le \int_0^t\int_\Omega \left|v_j(x,s)w_i(x,s)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x,s)\right|dx\,ds \le$$
$$\le \int_0^t \|v_j(s)w_i(s)\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(s)\right\|_{L_2(\Omega)} ds \le$$
$$\le \int_0^t \|v_j(s)\|_{L_4(\Omega)}\|w_i(s)\|_{L_4(\Omega)}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(s)\right\|_{L_2(\Omega)} ds \le$$
$$\le C_1\int_0^t \|v_j(s)\|_V\|w_i(s)\|_{L_4(\Omega)}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(s)\right\|_{L_2(\Omega)} ds \le$$
$$\le C_1C_9C_{10}\int_0^t \sum_{i,j=1}^n\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(s)\right\|_{L_2(\Omega)}^2 ds = C_{11}\int_0^t \|w(s)\|_V^2\,ds.$$

Поскольку в левой части (5.2) каждое слагаемое неотрицательно, то ее можно оценить снизу:

$$\frac{\varkappa}{2}\|w(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{2}\|w(t)\|_V^2 + \frac{\varkappa}{2}\|w(t)\|_V^2 + \nu\int_0^t \|w(s)\|_V^2\, ds.$$

Из оценок на левую и правую часть равенства (5.2) мы получаем следующее неравенство:

$$\frac{\varkappa}{2}\|w(t)\|_V^2 \leq C_{11}\int_0^t \|w(s)\|_V^2\, ds,$$

которое имеет место при всех $t \in [0, t_2]$. Воспользовавшись неравенством Гроноулла−Беллмана [3](с. 191-192) получим, что $\|w(t)\|_V \equiv 0$, а следовательно $u \equiv v$. Получили противоречие.

Второй шаг. Пусть v — единственное слабое решение задачи (0.2)—(0.5) на отрезке $[0, t_2]$. Рассмотрим теперь нашу задачу на отрезке $[t_2, T]$ (в начальном условии вместо a здесь будет $a_1 = v(t_2)$). Произведем замену координат: $\tau = t - t_2$. Тогда получим нашу исходную задачу на отрезке $[0, T_1]$ (здесь $T_1 = T - t_2$) с начальным условием $v(0) = a_1$. По первому шагу доказательства она имеет единственное решение на отрезке $[0, t_2]$. Таким образом мы получили единственное слабое решение задачи (0.2)—(0.5) на отрезке $[0, 2t_2]$.

Повторяем процедуру, описанную на втором шаге. Поскольку каждый раз отрезок, на котором доказывается единственность, увеличивается по отношению к предыдущему на t_2, то за конечное число шагов мы докажем единственность слабого решения задачи (0.2)—(0.5) на отрезке $[0, T]$. □

6. О классах слабых решений задачи (0.2)—(0.5) при $f \in L_p(0, T; V^*)$ и $f \in C([0, T], V^*)$

Теорема 6.1. *Если $f \in L_p(0, T; V^*)$, где $1 \leq p < \infty$, то слабое решение задачи (0.2)—(0.5) принадлежит пространству $W_p = \{v : v \in C([0, T], V), v' \in L_p(0, T; V)\}$.*

Доказательство: Пусть $v \in W$ — слабое решение задачи (0.2)—(0.5). Тогда для него имеет место равенство:

$$(\varkappa A + I)v' + \nu A v - B(v) = f.$$

Или, что то же самое

$$(\varkappa A + I)v' = -\nu A v + B(v) + f \tag{6.1}$$

Заметим, что $B(v) \in C([0, T], V^*)$. Действительно: $B(v)(t)$ непрерывно по t как суперпозиция непрерывных отображений:

$$[0, T] \xrightarrow{v} V \xrightarrow{B} V^*.$$

В силу леммы 2.1 *(c)* имеем, что $\nu A v \in C([0, T], V^*)$. Поскольку $f \in L_p(0, T; V^*)$, получаем, что правая часть равенства (6.1) лежит в $L_p(0, T; V^*)$. Применяя $(\varkappa A + I)^{-1}$ к (6.1), получим:

$$v' = (\varkappa A + I)^{-1}\left(-\nu A v + B(v) + f\right).$$

Таким образом получили, что $v' \in L_p(0, T; V)$. Следовательно $v \in W_p$. □

Замечание 6.1. *Так как $L_2(0, T; L_2(\Omega)^n) \subset L_2(0, T; V^*)$, то введенное в статье решение совпадает при $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega)^n)$ с сильным обобщенным решением задачи (0.2)—(0.5), введенным в [10].*

Замечание 6.2. *Повторяя аргументы доказательства леммы 2.2(b) и теоремы 6.1 можно доказать, что при $f \in C([0, T], V^*)$ для слабого решения v задачи (0.2)—(0.5) выполнено $v' \in C([0, T], V)$ и, следовательно, $v \in C^1([0, T], V)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. — Новосибирск: Наука, 1986.

2. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. — М.: Мир, 1971.

3. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.

4. *Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G.* Topological Degree Method in the Equations of the Navier−Stokes Type // Abstract and Applied Analysis, 1997. — V. 1, 2. — P. 1—45.

5. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: 1980.

6. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений // Матем. заметки, 1982. — Т. 31. — № 5. — С. 801—812.

7. *Каразеева Н.А., Котсиолис А.А., Осколков А.П.* О динамических системах, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей. // Краевые задачи математической физики. 14. Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, CLXXXVIII, Л.: Наука, 1990. — С. 59—87. // Тр. МИАН СССР, 1988. — Т. 179. — С. 126—164.

8. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.

9. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Фойгта и жидкостей Олдройта. // Тр. МИАН СССР, 1987. — Т. 179. — С. 126—164.

10. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1973. — Т. 38. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7. — С. 98—136.

11. *Павловский В.А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров. // ДАН СССР, 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809—812.

12. *Темам Р.* Уравнения Навье−Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1987.