*УДК 621.391:396*

# ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ В УСЛОВИЯХ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРОПУСКОВ НАБЛЮДЕНИЙ

**© 2003 А. А. Сирота, М. Н. Лантюхов**

*Воронежский государственный университет*

Синтезирован алгоритм фильтрации параметров состояния динамической системы в дискретном времени, предназначенный для обработки информации в условиях наличия пропусков наблюдений, описываемых случайной марковской последовательностью. Проведен анализ точностных характеристик полученного линейного фильтра в сравнении с известными, не учитывающими зависимый характер пропусков наблюдений.

## Введение

В реальных системах управления при обработке последовательности наблюдений в задачах фильтрации—оценивания параметров состояния динамических систем возникает ситуация, когда часть из наблюдений в заранее неизвестные моменты времени выпадает из рассмотрения, причем сам факт пропуска очередного наблюдения не обязательно может быть зафиксирован наблюдающей стороной. Это происходит в случаях, например, когда истинные измерения вектора состояния объекта перестают попадать в заданную окрестность (строб) ожидаемого положения объекта в пространстве наблюдений, или, когда процесс обнаружения наблюдаемых сигналов этого объекта приобретает стохастический характер. При обработке информационной последовательности наблюдений, возникающей в этих случаях, весьма эффективным в вычислительном отношении является использование рекуррентных линейных алгоритмов фильтрации калмановского типа [1], для которых обеспечивается независимость коэффициентов фильтров от наблюдений. Известно также, что эффективность процедур фильтрации снижается по отношению к ожидаемой в случае неадекватности используемых моделей динамики состояний и наблюдений. Поэтому возникает необходимость проведения синтеза и анализа линейных алгоритмов фильтрации с учетом специфики процесса наблюдений, вызванной появлением случайных пропусков.

В [1—3] рассматривается задача, когда поведение объекта описывается уравнением состояний и начальными условиями вида

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k\,,\quad x_1 \sim \{\tilde{x}_{1|0}, P_{1|0}\}\,, \tag{1}$$

где $x_k$ — $m$-мерный вектор состояния объекта в момент времени $t_k$; $u_k$ — $r$-мерный вектор возмущений ($M[u_k]=0$; $M[u_k u_k^T]=Q_k$); $F_k$ и $G_k$ — матрицы соответствующей размерности. Последовательность наблюдений при этом имеет вид

$$z_k = a_k(H_k x_k + v_k) + (1-a_k)\tilde{z}_{k|k-1}\,, \tag{2}$$

где $z_k$ — $n$-мерный вектор наблюдений в момент времени $t_k$; $\tilde{z}_{k|k-1}$ — вектор экстраполированной на момент времени $t_k$ оптимальной в среднеквадратичном линейной оценки вектора состояния $z_k$ по совокупности наблюдений $z^{k-1}=(z_1,\dots,z_{k-1})$; $v_k$ — вектор аддитивного шума измерений ($M[v_k]=0$; $M[v_k v_k^T]=R_k$); $H_k$ — матрица связи состояний и наблюдений; $a_k$ — скалярная случайная величина, принимающая значения единица или ноль с вероятностями $P_k(1)$ и $P_k(0)=1-P_k(1)$ независимо от результатов предшествующей обработки. При этом в ситуации пропуска ($a_k=0$) осуществляется доопределение последовательности в точке $z_k=\tilde{z}_{k|k-1}$, что обеспечивает реализацию оптимального линейного фильтра оценивания последовательности $x_k$ с независящими от наблюдений коэффициентами [2]. Шумы $v_k$, $u_i$ предполагаются некоррелированными между собой, а также с $a_j$ и $x_0$ при любых $k$, $i$ и $j$.

## Методика и результаты синтеза алгоритма фильтрации

В [1—3] последовательность $\{a_k\}$ предполагалась независимой в совокупности, что как отмечено в [1] существенно упрощает синтез алгоритма оценивания. В тоже время, во многих ситуациях такое допущение неправомерно, поэтому целью настоящей работы является построение алгоритма фильтрации ориентированного на более общий случай, когда имеется статистическая зависимость возникновения пропусков наблюдений от шага к шагу. Пусть последовательность пропусков $\{a_k\}$ для определенности описывается марковской однородной цепью, которая принимает два состояния $a_k = 1$ с вероятностью $P(a_k) = P_k(1)$ и $a_k = 0$ с вероятностью $P(b_k) = P_k(0)$, $P(a_k) + P(b_k) = 1$. Вероятности отсутствия и наличия пропуска наблюдения на $k$-м шаге определяется по формуле $P_k = \pi P_{k-1}$, где $\pi$ — матрица одношаговых переходов

$$\pi = \begin{Vmatrix} P_{00} & 1-P_{11} \\ 1-P_{00} & P_{11} \end{Vmatrix}, \text{ а } P_k = \begin{Vmatrix} P_k(0) \\ P_k(1) \end{Vmatrix}.$$

Введенная модель является основой для проведения синтеза алгоритма обработки информации в виде оптимального линейного алгоритма оценивания. Оценку в соответствии с [1] будем искать на основе рекуррентного уравнения вида

$$\tilde{x}_{k+1|k} = \mathbf{\Phi}_k \tilde{x}_{k|k-1} + W_k z_k, \tag{3}$$

где $\mathbf{\Phi}_k$ и $W_k$ матрицы, которые требуется найти.

Необходимое и достаточное условие оптимальности несмещенной линейной оценки определяется системой уравнений $M[\varepsilon_{k+1|k} z_j^T] = 0$, $j = 1,\ldots,k$, где $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k}$ — ошибка оценивания. Пусть это условие выполняется для каждого $j = 1,\ldots,k-1$. Тогда с учетом независимости $u_k$, исходя из равенства $M[x_k z_j^T] = M[\tilde{x}_{k|k-1} z_j^T]$, получается необходимое условие оптимальности оценки $\tilde{x}_{k+1|k}$

$$\begin{gathered} (F_k - \mathbf{\Phi}_k - W_k H_k)A(k,j) - W_k B(k,j) = 0, \\ A(k,j) = M[x_k z_j^T], \\ B(k,j) = M[a_k \gamma_k z_j^T],\ j = 1,\ldots,k-1 \\ \gamma_k = H_k \varepsilon_{k|k-1} + v_k = H_k x_k - H_k \tilde{x}_{k|k-1} + v_k. \end{gathered} \tag{4}$$

Система (4) разрешима, если $B(k,j) = 0$ для всех $j = 1,\ldots,k-1$. Тогда $\mathbf{\Phi}_k = F_k - W_k H_k$. При этом одновременно выполняется

$$\begin{gathered} M[(z_k - z_{k|k-1}) z_j^T] = \\ = M[(a_k(H_k x_k + v_k) - a_k H_k \tilde{x}_{k|k-1}) z_j^T] + \\ + M[(H_k \tilde{x}_{k|k-1} - z_{k|k-1}) z_j^T] = 0, \\ j = 1,\ldots,k-1 \end{gathered}$$

Отсюда следует, что оптимальная оценка $z_k$ с экстраполяцией на один шаг имеет вид

$$\tilde{z}_{k|k-1} = H_k \tilde{x}_{k|k-1}.$$

Уравнение для оптимального фильтра теперь получается из условия

$$M[\varepsilon_{k+1} z_k^T] = M[\varepsilon_{k+1}(z_k - H_k \tilde{x}_{k|k-1})^T] = 0.$$

Проводя подстановку $\mathbf{\Phi}_k = F_k - W_k H_k$, после ряда преобразований [1] получим

$$\begin{gathered} W_k = F_k \hat{W}_k = F_k M[\varepsilon_k \delta_k^T](M[\delta_k \delta_k^T])^{-1}, \\ \delta_k = z_k - H_k \tilde{x}_{k|k-1} = a_k H_k \varepsilon_k + a_k v_k, \\ \tilde{x}_{k+1|k} = F_k[\tilde{x}_{k|k-1} + \hat{W}_k(z_k - H_k x_{k|k-1})]. \end{gathered} \tag{5}$$

Отметим, что выражение (5) совпадает с известным общим выражением теоремы о нормальной корреляции. Таким образом, в наиболее простом случае для получения фильтра требуется, чтобы

$$\begin{gathered} B(k,j) = M[\delta_k z_j^T] = M[(a_k H_k(x_k - \tilde{x}_{k|k-1})) z_j^T] = 0, \\ j = 1,\ldots,k-1. \end{gathered}$$

Используя эту методику, получим теперь уравнение для фильтра со статистически зависимыми пропусками наблюдений. При выводе учтем следующие рекуррентные соотношения для ошибки оценивания, вытекающее из общей структуры фильтра:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{k+1} = F_k[\varepsilon_k - a_k \hat{W}_k H_k \varepsilon_k - a_k \hat{W}_k v_k] + G_k u_k, \\ M[\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+1}^T] = M\{F_k[\varepsilon_k \varepsilon_k^T - a_k(\varepsilon_k \varepsilon_k^T H_k^T \hat{W}_k^T + \hat{W}_k H_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T) + \\ + a_k \hat{W}_k (H_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T H_k^T + v_k v_k^T) \hat{W}_k^T] F_k^T + G_k u_k u_k^T G_k^T\}. \end{gathered}$$

На первом шаге ($k = 1$)

$$\begin{gathered} B(1,0) = M[\delta_1] = 0; \\ \tilde{x}_{2|1} = F_1(\tilde{x}_{1|0} + \hat{W}_1(z_1 - H_k \tilde{x}_{1|0})), \hat{W}_1 = V_1 U_1^{-1}; \\ V_1 = M[\varepsilon_{1|0}\delta_1^T] = P(a_1) P_{1|0} H_1^T = \tilde{P}_{1|0} H_1^T, \\ U_1 = P(a_1) H_1 P_{1|0} H_1^T + P(a_1) R_1, \end{gathered}$$

$$P_{2|1} = M[\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^T] = P(a_1)[F_1(P_{1|0} - P_{1|0}H_1^T\hat{W}_1^T)F_1^T + G_1Q_1G_1^T] +$$
$$+P(b_1)[F_1P_{1|0}F_1^T + G_1Q_1G_1^T] = P(a_1)P_{2|1}(a_1) + P(b_1)P_{2|1}(b_1),$$
$$P_{2|1}(a_1) = M[\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \mid a_1], P_{2|1}(b_1) = M[\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \mid b_1]$$

то есть уравнения для оценки и матрицы ошибок на первом шаге получаются в виде, совпадающем с известным [1, 2].
На втором шаге ($k = 2$)

$$B(2,1) = M[\boldsymbol{\delta}_2 z_1^T] = M[a_2H_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 z_1^T] =$$
$$= M\{a_2a_1H_2[F_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - a_1\hat{W}_1H_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 - a_1\hat{W}_1v_1) + G_1u_1]\times$$
$$\times(x_1^TH_1^T + v_1^T)^T + a_2(1-a_1)H_2\boldsymbol{\varepsilon}_2x_{1|0}^TH_1^T\} =$$
$$= P(a_2,a_1)H_2F_1[P_{1|0}H_1^T - P_{1|0}H_1^T(H_1P_{1|0}H_1^T + R_1)^{-1}\times$$
$$\times(H_1P_{1|0}H_1^T + R_1)] = 0.$$

Это означает, что условие существования оценки в стандартном виде (5) выполняется. Одновременно имеем

$$\tilde{x}_{3|2} = F_2[\tilde{x}_{2|1} + \hat{W}_2(z_2 - H_2\tilde{x}_{2|1})], \hat{W}_2 = V_2U_2^{-1},$$
$$V_2 = M[(x_2 - \tilde{x}_{2|1})(z_2 - \tilde{z}_{2|1})^T]M[\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\delta}_2^T] =$$
$$= M[a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^T]H_2^T = M[a_2a_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^T]H_2^T +$$
$$+M[a_2b_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^T]H_2^T = \tilde{P}_{2|1}(a_2)H_2^T,$$
$$\tilde{P}_{2|1}(a_2) = P(a_2,a_1)P_{2|1}(a_1) + P(a_2,b_1)P_{2|1}(b_1),$$
$$U_2 = M[\boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{\delta}_2^T] = H_2M[a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^T]H_2^T + M[a_2v_2v_2^T] =$$
$$= H_2\tilde{P}_{2|1}(a_2)H_2^T + P(a_2)R_2,$$
$$P_{3|2} = M[\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3^T] = M[a_2\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3^T] + M[b_2\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3^T] =$$
$$= \{F_2[\tilde{P}_{2|1}(a_2) - \tilde{P}_{2|1}(a_2)H_2^TW_2^T] + P(a_2)G_2Q_2G_2^T\} +$$
$$+\{F_2\tilde{P}_{2|1}(b_2)F_2^T + \tilde{P}(b_2)G_2Q_2G_2^T\} =$$
$$= P(a_2)P_{3|2}(a_2) + P(b_2)P_{3|2}(b_2);$$
$$\tilde{P}_{2|1}(b_2) = M[b_2\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^T] = P(b_2,a_1)P_{2|1}(a_1) + P(b_2,b_1)P_{2|1}(b_1),$$
$$P_{3|2}(a_2) = F_2[\tilde{P}_{2|1}(a_2) - \tilde{P}_{2|1}(a_2)H_2^T\hat{W}_2^T] / P(a_2) + G_2Q_2G_2^T,$$
$$P_{3|2}(b_2) = F_2\tilde{P}_{2|1}(b_2)F_2^T / P(b_2) + G_2Q_2G_2^T.$$

Пусть теперь $B(k,j) = 0$, $j = 1,\ldots,k-1$ и оптимальная оценка $\tilde{x}_{k|k-1}$ в известном виде существует. Действуя дальше по индукции покажем, что и $B(k+1,j) = 0$, $j = 1,\ldots,k$. Пусть сначала $j = \overline{1,k-1}$, тогда представим

$$B(k+1,j) = M[a_{k+1}H_{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}z_j^T] =$$
$$= M[a_{k+1}a_jH_{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}_kx_j^TH_j^T] =$$
$$= M[a_{k+1}a_jH_{k+1}F_k\boldsymbol{\varepsilon}_kx_j^TH_j^T] -$$
$$-M[a_{k+1}a_ka_jH_{k+1}F_k\hat{W}_kH_k\boldsymbol{\varepsilon}_kx_j^TH_j^T].$$

С учетом того, что

$$M[a_{k+1}a_j\boldsymbol{\varepsilon}_kx_j^T] = M[a_{k+1}a_ka_j\boldsymbol{\varepsilon}_kx_j^T] +$$
$$+M[a_{k+1}(1-a_k)a_j\boldsymbol{\varepsilon}_kx_j^T],$$

марковости последовательности $\{a_k\}$ и условия $B(k,j) = 0$, $j = 1,\ldots,k-1$, получим

$$M[\boldsymbol{\varepsilon}_kx_k^T \mid a_{k+1}a_ka_j] = M[\boldsymbol{\varepsilon}_kx_k^T \mid a_ka_j] = 0,$$
$$M[\boldsymbol{\varepsilon}_kx_k^T \mid a_{k+1}b_ka_j] = M[\boldsymbol{\varepsilon}_kx_k^T \mid b_ka_j] = 0,$$
$$j = 1,\ldots,k-1.$$

Для $j = k$ теперь

$$M[a_{k+1}H_{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}z_k^T] = H_{k+1}M[\{a_{k+1}a_kF_k(\boldsymbol{\varepsilon}_k - a_k\hat{W}_kH_k\boldsymbol{\varepsilon}_k - a_k\hat{W}_kv_k) +$$
$$+G_ku_k\}(x_k^TH_k^T + v_k^T)] = H_{k+1}F_k\{P(a_{k+1},a_k)M[\boldsymbol{\varepsilon}_kx_k^TH_k^T \mid a_k,a_{k+1}] -$$
$$-P(a_{k+1},a_k)\hat{W}_kH_kM[\boldsymbol{\varepsilon}_kx_k^TH_k^T \mid a_k,a_{k+1}] -$$
$$-P(a_{k+1},a_k)\hat{W}_kM[v_kv_k^T \mid a_k,a_{k+1}]\} =$$
$$= H_{k+1}F_k\{P(a_{k+1} \mid a_k)(M[a_k\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k^T]H_k^T - \hat{W}_k(H_kM[a_k\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k^T]H_k^T +$$
$$+M[a_kv_kv_k^T]))\} = H_{k+1}F_k\{P(a_{k+1} \mid a_k)(M[\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\delta}_k^T] - \hat{W}_kM[\boldsymbol{\delta}_k\boldsymbol{\delta}_k^T])\}.$$

С учетом (5), получим, что и для $j = k$ выполняется $B(k,j) = 0$.

Соответственно на $k$-ом шаге оценка может быть получена в виде

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_{k+1|k} = F_k[\tilde{x}_{k|k-1} + \hat{W}_k(z_k - H_k\tilde{x}_{k|k-1})], \hat{W}_k = V_kU_k^{-1},\\
&V_k = \tilde{P}_{k|k-1}(a_k)H_k^T = P(a_k,a_{k-1})P_{k|k-1}(a_{k-1})H_k^T +\\
&+P(a_k,b_{k-1})P_{k|k-1}(b_{k-1})H_k^T,\\
&U_k = H_k\tilde{P}_{k|k-1}(a_k)H_k^T + P(a_k)R_k; P_{k+1|k} =\\
&= P(a_k)P_{k+1|k}(a_k) + P(b_k)P_{k+1|k}(b_k),\\
&P_{k+1|k}(a_k) = F_k[\tilde{P}_{k|k-1}(a_k) - \tilde{P}_{k|k-1}(a_k)H_k^T\hat{W}_k^T]\times\\
&\times F_k^T / P(a_k) + G_kQ_kG_k^T;\\
&P_{k+1|k}(b_k) = F_k\tilde{P}_{k|k-1}(b_k)F_k^T / P(a_k) + G_kQ_kG_k^T;\\
&\tilde{P}_{k|k-1}(b_k) = P(b_k,a_{k-1})P_{k|k-1}(a_{k-1}) +\\
&+P(b_k,b_{k-1})P_{k|k-1}(b_{k-1}).
\end{aligned} \qquad (6)$$

В результате, получены рекуррентные соотношения для оптимального в классе линейных фильтра, в которых в явном виде учтен марковский характер последовательности пропусков наблюдений. В случае, если зависимость между значениями последовательности $\{a_k\}$ отсутствует, то есть $P(a_k \mid a_{k-1}) = P(a_k)$, $P(a_k \mid b_{k-1}) = P(a_k)$, $P(b_k \mid a_{k-1}) = P(b_k)$, $P(b_k \mid b_{k-1}) = P(b_k)$ уравнения (6) переходят в известные уравнения [2] для фильтра при наличии независимой последовательности пропусков

$$\tilde{x}_{k+1|k} = F_k[\tilde{x}_{k|k-1} + \hat{W}_k^{'}(z_k - H_k\tilde{x}_{k|k-1})],$$

$$\hat{W}_k^{'} = P(a_k)P_{k|k-1}H_k^T[P(a_k)H_kP_{k|k-1}H_k^T + P(a_k)R_k]^{-1}, \quad (7)$$

$$P_{k+1|k} = F_k[P_{k|k-1} - P(a_k)P_{k|k-1}H_k^T\hat{W}_k^{'}]F_k^T + F_kQ_kF_k^T.$$

Отметим также, что при $P(a_k) = 1$, $k = 1,2,\ldots$ уравнения (7) переходят в уравнения для классического фильтра Калмана.

### Описание модельного эксперимента

В рамках рассмотренной статистической модели наблюдений методом имитационного моделирования проводилось сравнительное исследование характеристик обобщенного фильтра (7), полученного в [1, 2] для независимой во времени последовательности пропусков наблюдений, и синтезированного фильтра (6), учитывающего зависимый характер элементов последовательности $\{a_k\}$. В качестве модели состояний использовалась модель марковской последовательности $(m = 1)$, динамика которой определяется уравнениями вида

$$x_{k+1} = \rho_x x_k + \sigma_x\sqrt{1-\rho_x^2}u_k, \quad x_1 \sim \{0, \sigma_x^2\}.$$

Первоначально исследовалось качество работы фильтра (7) в условиях отсутствия и наличия статистической зависимости пропусков наблюдений в рамках марковской модели, то есть, в последнем случае, при отличии реальной модели наблюдений от используемой при синтезе. На рис. 1 представлены зависимости дисперсии ошибки $\sigma_{Err}^2$ оценивания в каждой точке при общем числе шагов $k = 10$, от вероятности $P_{00} = (b_{k+1} \mid b_k)$ при различных значениях вероятности $P_{11} = (a_{k+1} \mid a_k)$. Кривые 1 определяют зависимость теоретической ошибки, рассчитанной на всех шагах в соответствии с (7) для значений $P_{11} = (a_{k+1} \mid a_k)$, $k = 1,2,\ldots$, полученных при соответствующих $P_{00}$ и $P_{11}$. Кривые 2 отвечают экспериментальным данным. Во всех экспериментах и расчетах $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_z^2 = 0,5$, $\rho_x = 0,9$. Из полученных зависимостей видно, что имеется расхождение теоретической дисперсии ошибок и дисперсии ошибок, достигнутых в ходе модельного эксперимента. В частности, при достаточно высоком уровне статистической зависимости $P_{00} \geq 0,6$ это расхождение может составлять до $20\ldots30\%$.

На рис. 2 для сравнения представлены аналогичные графики (кривые 1) для экспериментально полученных дисперсий ошибок фильтра (7), не учитывающего зависимый характер пропусков, и синтезированного в настоящей работе в соответствии с уравнениями (6) фильтра (кривые 2). Теоретическая дисперсия ошибок, рассчитываемая на основе (6), для синтезированного фильтра практически совпадает с экспериментальной. Из приведенных зависимостей рис. 2 следует, что при не учете статистически зависимого характера появления пропусков проигрыш фильтра (7) в качестве обработки для указанных условий составляет до 10—15 %.

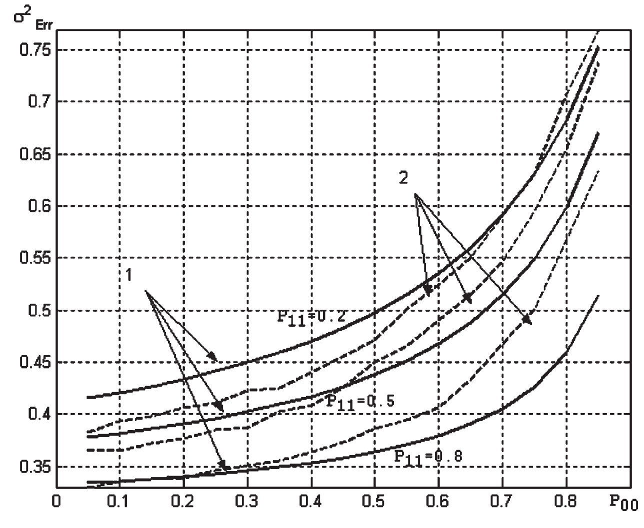


*Рис. 1*

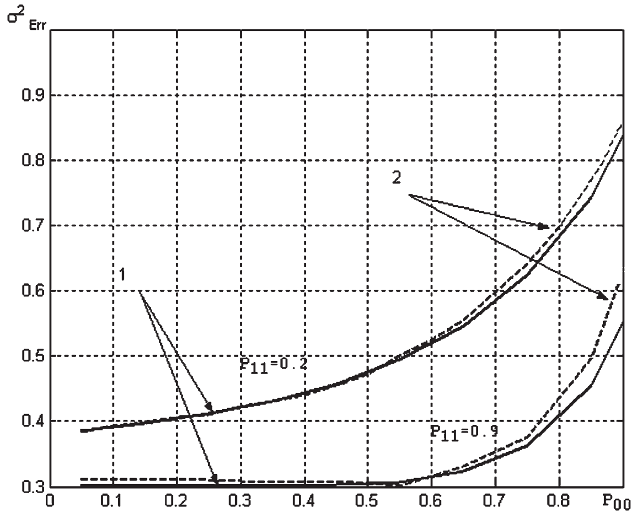


*Рис. 2*

Таким образом, в работе получен оптимальный алгоритм линейной фильтрации, реализующий обобщение известных результатов в этой области на случай наличия статистически зависимых последовательностей пропусков наблюдений. В рамках марковской модели последовательности пропусков показано совпадение теоретически получаемых оценок с результатами модельного эксперимента и наличие определенного выигрыша в качестве обработки при использовании синтезированного алгоритма фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малютин Ю. М., Экало А.* В. Применение ЭВМ для решения задач идентификации объектов. Ленинград. Изд. Ленинградского университета, 1988. 154—175 с.

2. *Сирота А. А.* //Радиотехника. 1988. № 5. С. 59—62.

3. *Куликов Д. В., Экало А. В.* //Автоматика и телемеханика. 1986. № 3. С. 48—54.