УДК 517.925.52

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2003 А. И. Перов

Воронежский государственный университет

Методом интегральных уравнений доказывается существование ограниченных решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при условии, что линейная часть является экспоненциально дихотомической, а нелинейная — подчинена подлинейной оценке с малой константой. Ранее подобные результаты устанавливались либо топологическим методом Важевского (Б. П. Демидович), либо методом направляющих функций (М. А. Красносельский и А. И. Перов).

В теории нелинейных колебаний, наряду с периодическими и почти-периодическими решениями, изучают также широкий класс так называемых ограниченных решений, потому что не всегда установившиеся решения описываются периодическими или даже почти-периодическими функциями.

Для исследования указанных типов решений разработано несколько методов. Мы остановимся только на некоторых из них. Прежде всего, — он исторически был первым, — это метод интегральных уравнений, основанный на изучении интегральных операторов в различных функциональных пространствах (подробнее об этом см.: для периодических решений [11], для почти-периодических решений [6], для ограниченных решений [1]; см. также [9], [10], [12]). С другой стороны, здесь с успехом могут быть применены и методы, базирующиеся на изучении поведения интегральных кривых или фазовых траекторий в конечномерных пространствах: топологический метод Важевского, предложенный им в 1947 г. [13], и метод направляющих функций, опубликованный Красносельским и Перовым в 1958 г. [4].

В настоящей статье предлагается, как нам кажется, новый прием доказательства существования ограниченных решений, идейно примыкающий к методу интегральных уравнений. Трудность, которая здесь возникает и с которой знакомы все, работающие в этой области, состоит в том, что интегральный оператор, возникающий в задаче об ограниченных решениях, не обладает свойством компактности, что закрывает дорогу применению здесь известного принципа неподвижной точки Шаудера. Мы показываем, как можно обойти это препятствие.

Для удобства дальнейшей деятельности введем некоторые определения и обозначения. Пусть $\mathbb{R}$ — числовая прямая, $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное координатное пространство, каким-либо образом нормированное; норма элемента (вектора) $\mathbf{x}$ из $\mathbb{R}^n$ обозначается $\|\mathbf{x}\|$. Напомним, что векторная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ называется *ограниченной*, если можно указать такую неотрицательную константу c, для которой $\|\mathbf{f}(t)\|\le c$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Банахово пространство всех непрерывных ограниченных функций $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\mathbf{f}(\cdot)\| = sup\|\mathbf{f}(t)\|$ обозначается $C(\mathbb{R}^n)$. Банахово пространство всех измеримых ограниченных в существенном функций $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ с нормой $|\,\mathbf{f}(\cdot)\,| = vrai\ max\|\mathbf{f}(t)\|$ обозначается $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$. (В обоих случаях при определении нормы t пробегает всю числовую прямую $\mathbb{R}$).

Выпишем системы дифференциальных уравнений, с которыми нам предстоит работать,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t,\mathbf{x}). \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{A}(t)$ — непрерывная ограниченная матричная функция, обеспечивающая экспоненциальную дихотомию решений линейной однородной системы (1). В этом случае линейная неоднородная система (2) для любой непрерывной ограниченной векторной функции $\mathbf{f}(t)$ имеет единственное (непрерывное) решение $\mathbf{x}(t)$. Это решение может быть представлено в виде

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t,s)\mathbf{f}(s), \tag{4}$$

где $\mathbf{G}(t,s)$ — это матричная функция Грина задачи об ограниченных решениях для системы (2) (см., например, [1], [3], [12]). Отметим, что

$$\|\mathbf{G}(t,s)\| \le c\ e^{-\gamma|t-s|}, \tag{5}$$

для некоторых положительных постоянных c и γ.

Правая часть формулы (4) определяет линейный интегральный оператор, который мы обозначим через $\mathbf{K}$. Этот оператор является линейным ограниченным оператором как в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$, так и в пространстве $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$, причем $\|\mathbf{K}\|$, $|\mathbf{K}| \le 2c/\gamma$ в силу оценки (5). Для нас важно равенство

$$\|\mathbf{K}\| = |\mathbf{K}|, \tag{6}$$

которое мы докажем позднее. Отметим, что норму оператора $\mathbf{K}$ найти в явном виде возможно лишь в исключительных случаях, так что зачастую приходится ограничиваться лишь оценками (типа приведенной выше).

Перейдем к изучению нелинейной системы (3). Предположим, что векторная функция $\mathbf{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных и что $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t))$ есть (непрерывная) ограниченная функция, если $\mathbf{x}(t)$ обладает теми же свойствами. Тогда задача об ограниченных решениях системы (3) равносильна разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(t,s)\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s))ds \tag{7}$$

в классе ограниченных функций. Обозначим через $\mathcal{F}$ нелинейный интегральный оператор, стоящий в правой части формулы (7). Мы видим, что если выполнено условие Липшица

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\| \le l\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \tag{8}$$

то оператор $\mathcal{F}$, рассматриваемый, скажем, в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$, также удовлетворяет условию Липшица

$$\|\mathcal{F}\mathbf{x}(\cdot) - \mathcal{F}\mathbf{y}(\cdot)\| \le \|\mathbf{K}\|\,l\,\|\mathbf{x}(\cdot)-\mathbf{y}(\cdot)\|. \tag{9}$$

Поэтому, если

$$\|\mathbf{K}\|\,l < 1, \tag{10}$$

то оператор $\mathcal{F}$ согласно (9) оказывается сжимающим, и для доказательства однозначной разрешимости интегрального уравнения (7), которое мы запишем в виде $\mathbf{x}(t) = \mathcal{F}\mathbf{x}(t)$, может быть применен принцип сжимающих отображений. Этот подход был использован многими математиками (К. О. Фридрихс, Дж. Стокер, Б. П. Демидович, К. Кордуняну и др.).

Предположим теперь, что вместо условия (8) выполнено менее ограничительное условие

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\| \le a\,\|\mathbf{x}\| + b, \tag{11}$$

где a и b — некоторые неотрицательные постоянные. Тогда для нелинейного интегрального оператора $\mathcal{F}$ в $C(\mathbb{R}^n)$ получим

$$\|F\mathbf{x}(\cdot)\| \le \|\mathbf{K}\|(a\,\|\mathbf{x}(\cdot)\| + b). \tag{12}$$

Поэтому, если выполнено условие

$$\|\mathbf{K}\|\,a < 1, \tag{13}$$

то оператор $\mathcal{F}$ отображает в себя шар S (с центром в нуле и радиусом r) пространства $C(\mathbb{R}^n)$, где

$$r = \frac{\|\mathbf{K}\|\,b}{1-\|\mathbf{K}\|\,a}. \tag{14}$$

Однако, так как оператор $\mathcal{F}: S \to S$ не обладает свойством *компактности*, то мы не можем для доказательства разрешимости уравнения (7) применить п р и н ц и п н е п о д в и ж н о й т о ч к и Ш а у д е р а. Опишем нашу конструкцию преодоления этого препятствия.

Фиксируем некоторый отрезок $[\alpha,\beta]$ и введем в рассмотрение банаховы пространства $C[\alpha,\beta](\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{L}_0[\alpha,\beta](\mathbb{R}^n)$. Первое состоит из всех непрерывных функций $\mathbf{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\mathbf{f}(\cdot)\|[\alpha,\beta] = max\,\|\mathbf{f}(t)\|$, а второе состоит из всех измеримых ограниченных в существенном функций $\mathbf{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $|\,\mathbf{f}(\cdot)\,|[\alpha,\beta] = vrai\ max\,\|\mathbf{f}(t)\|$. (В обоих случаях t пробегает отрезок $[\alpha,\beta]$).

Рассмотрим пространство $C[\alpha,\beta](\mathbb{R}^n)$. Поставим в соответствие произвольной функции $\mathbf{x}(t)$ из этого пространства функцию $\tilde{x}(t)$ из $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$, положив $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t) = 0$ при $t \,\overline{\in}\, [\alpha,\beta]$. Рассмотрим вместо изучаемого на всей оси $\mathbb{R}$ интегрального уравнения (7) интегральное уравнение на отрезке $[\alpha,\beta]$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s,\tilde{x}(s))ds, \quad \alpha\le t\le\beta, \tag{15}$$

которое можно переписать в несколько ином виде

$$x(t) = g(t) + \int_{\alpha}^{\beta} G(t,s) f(s, x(s)) ds, \quad \alpha \le t \le \beta, \quad (16)$$

где

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\alpha} G(t,s) f(s,0) ds + \int_{\beta}^{\infty} G(t,s) f(s,0) ds.$$

Обозначим через $\mathcal{F}[\alpha,\beta]$ нелинейный интегральный оператор, определяемый правой частью уравнения (15) (или, что то же самое, уравнения (16)). Этот оператор действует и непрерывен как в пространстве $C[\alpha,\beta](\mathbb{R}^n)$, так и в пространстве $\mathcal{L}_0[\alpha,\beta](\mathbb{R}^n)$. Самое главное заключается в том, что оператор $\mathcal{F}[\alpha,\beta]$ обладает свойством *компактности*. Из условия (11) в силу равенства (6) вытекает, что

$$\left\|\mathcal{F}[\alpha,\beta]\mathbf{x}(\cdot)\right\|[\alpha,\beta] \le$$
$$\le |\mathbf{K}|\left(a\left|\tilde{\mathbf{x}}(\cdot)\right| + b\right) = \|\mathbf{K}\|\left(a\left\|\mathbf{x}(\cdot)\right\|[\alpha,\beta] + b\right).$$

Поэтому оператор $\mathcal{F}[\alpha,\beta]$ в силу условия (13)отображает шар $S[\alpha,\beta]$ пространства $C[\alpha,\beta](\mathbb{R}^n)$ в себя, если радиус этого шара достаточно велик, например, вычисляется по формуле (14). Согласно п р и н ц и п у н е п о д в и ж н о й т о ч к и Ш а у д е р а интегральный оператор $\mathcal{F}[\alpha,\beta]$ имеет в шаре $\mathbf{S}[\alpha,\beta]$ по крайней мере одну неподвижную точку, т.е. уравнение (16) имеет по крайней мере одно решение и для этого решения $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}[\alpha,\beta](t)$ согласно (15)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \alpha \le t \le \beta, \quad (17)$$

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\| \le r, \quad \alpha \le t \le \beta, \quad (18)$$

где r вычисляется по формуле (14). Итак, мы установили, что нелинейная система (3) на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ имеет решение, подчиненное оценке (18), где r не зависит от отрезка $[\alpha,\beta]$. Отсюда уже нетрудно вывести, что нелинейная система (3) имеет ограниченное решение, определенное на всей оси и это решение удовлетворяет оценке

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\| \le r, \quad -\infty < t < \infty. \quad (19)$$

Подробнее об этом см. [8, с. 112—113] или [5, с. 178—179].

Нами доказана следующая

Теорема. *Пусть* $\mathbf{A}(t)$ *— непрерывная ограниченная матричная функция, обеспечивающая экспоненциальную дихотомию решений однородной системы (1). Пусть* $\mathbf{K}$ *— линейный интегральный оператор задачи об ограниченных решениях неоднородной системы (2)(см. (4)). Пусть векторная функция* $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию (11). Пусть, наконец, выполнено условие (13).*

Тогда нелинейная система (3) имеет по крайней мере одно ограниченное решение. Любое ограниченное решение системы (3) удовлетворяет оценке (19), где число r *вычисляется по формуле (14).*

Докажем равенство (6). Рассмотрим произвольную функцию $\mathbf{f}(t)$ из $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$ и ее усреднение по Стеклову

$$\mathbf{f}_h(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} \mathbf{f}(s) ds, \quad h > 0. \quad (20)$$

Ясно, что $\mathbf{f}_h(t)$ лежит в $C(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\left\|\mathbf{f}_h(\cdot)\right\| = \left|\mathbf{f}_h(\cdot)\right| \le \left|\mathbf{f}(\cdot)\right|. \quad (21)$$

Положим

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t,s)\mathbf{f}(s) ds, \quad \mathbf{x}(t;h) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t,s)\mathbf{f}_h(s) ds,$$

и покажем, что при любых фиксированных t и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(t,\varepsilon) > 0$, что

$$\left\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t;h)\right\| \le \varepsilon \text{ при } 0 < h \le \delta(t,\varepsilon). \quad (22)$$

Действительно, для любого $a > 0$ имеем

$$\left\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t;h)\right\| \le \int_{-\infty}^{t-a} \left\|\mathbf{G}(t,s)\right\| \left\|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_h(s)\right\| ds +$$
$$+ \int_{t-a}^{t+a} \left\|\mathbf{G}(t,s)\right\| \left\|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_h(s)\right\| ds +$$
$$+ \int_{t+a}^{\infty} \left\|\mathbf{G}(t,s)\right\| \left\|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_h(s)\right\| ds,$$

откуда согласно оценке (5) и неравенству (21) получаем

$$\left\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t;h)\right\| \le$$
$$\le \frac{4e^{-\gamma a} c}{\gamma} \left|\mathbf{f}(\cdot)\right| + c\int_{t-a}^{t+a} \left\|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_h(s)\right\| ds. \quad (23)$$

Выберем $a > 0$ так,чтобы первое слагаемое было меньше или равно $\varepsilon/2$; найденное a фиксируем. После этого по теореме Колмогорова [7, с. 380, лемма 4] найдем такое $\delta = \delta(t,\varepsilon)$, для которого второе слагаемое $\le \varepsilon/2$ при $0 < h \le \delta(t,\varepsilon)$. Тогда из (23) вытекает неравество (22).

Поэтому при $0 < h \le \delta(t,\varepsilon)$ в силу неравенства (22)

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\| \le \left\|\mathbf{x}(t;h)\right\| + \left\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t;h)\right\| \le \|\mathbf{K}\| \left\|\mathbf{f}_h(\cdot)\right\| + \varepsilon,$$

откуда согласно (21)

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{K}\| |\mathbf{f}(\cdot)| + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства выводим

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{K}\| |\mathbf{f}(\cdot)|,$$

откуда следует, что

$$|\mathbf{x}(\cdot)| = \|\mathbf{x}(\cdot)\| \leq \|\mathbf{K}\| |\mathbf{f}(\cdot)|.$$

В силу произвольности $\mathbf{f}(t)$ из $\mathcal{L}_0$ из последнего неравенства получаем $|\mathbf{K}| \leq \|\mathbf{K}\|$, так как неравенство $\|\mathbf{K}\| \leq |\mathbf{K}|$ очевидно, то равенство (6) установлено.

Утверждение теоремы сохраняет свою силу и тогда, когда $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определена и непрерывна лишь при $-\infty < t < \infty$ и $\|\mathbf{x}\| \leq \rho$, и для указанных значений аргументов удовлетворяет условию (11), причем имеет место (13) и $r \leq \rho$ (r взято из (14)). Это, так сказать, локальный вариант теоремы.

Нетрудно видеть, что теорема верна и в том случае, если пространство $\mathbb{R}^n$ заменить произвольным банаховым пространством $\mathbb{X}$. Единственное, что здесь нужно дополнительно потребовать — это *компактность* оператора $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ (т.е. он должен ограниченные множества из $\mathbb{R} \times \mathbb{X}$ переводить в компактные множества из $\mathbb{X}$).

Стимулом для написания настоящей статьи послужила работа [2]. В ней предполагалось, что $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$ и для собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ выполнено условие

$$Re\lambda_j \neq 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

а относительно нелинейности, помимо ее непрерывности, предполагалось, что

$$\frac{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \to 0 \text{ при } \|\mathbf{x}\| \to \infty \text{ равномерно } t. \tag{25}$$

Кроме того, предполагалось (и это было тесно связано с существом используемого метода), что система (3) такова, что любая начальная задача имеет единственное решение. При этих условиях топологическим методом Важевского было доказано существование ограниченного решения системы (3).

Нетрудно видеть, что условие (24) равносильно требованию экспоненциальной дихотомии системы (1) в случае постоянной матрицы $\mathbf{A}$. Из условия (25) вытекает, что выполнимо условие (11), в котором a можно взять сколь угодно малым и, значит, выполнено и условие (13). Поэтому полученный Б.П. Демидовичем результат вытекает из доказанной в этой статье теоремы, причем предположение о единственности любой начальной задачи для системы (3) оказывается излишним.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

2. *Демидович Б.П.* Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений// Мат. сборник. 1956. Т. 40(82). № 1. С. 73—94.

3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука. 1967. — 472 с.

4. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1958. Т. 123. № 2. С. 235—238.

5. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука. 1966. — 332 с.

6. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука. 1970. — 352 с.

7. *Натансон И.П.* Теория функций вещественных переменных. — М.—Л.: Гостехиздат. 1950. — 400 с.

8. *Перов А.И.* Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж. — 1959. — 129 с.

9. *Перов А.И.* Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 531—534.

10. *Перов А.И., Дунаев С.А., Коструб И.Д.* Об одной теореме существования ограниченных, почти периодических и периодических решений// Вестник ф-та ПММ, ВГУ. 2002. вып. 3. С. 160—170.

11. *Розенвассер Е.Н.* Колебания нелинейных систем. — М.: Наука. 1969. — 576 с.

12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир. 1970. — 720 с.

13. *Wazewski T.* Sur un principle topologique de l'examine de l'allure asymptotique des equations differentielles ordinaires// Ann. Soc. Polon. Math. 1947. 20. P. 279—313.