УДК 519.112.71

РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

© 2003 А. В. Мухин, Г. Д. Чернышова

Воронежский государственный университет

Исследуются условия разрешимости и методы решения дискретной распределительной задачи с разрывной целевой функцией. Предлагается алгоритм точного решения, основанный на методе ветвей и границ. Также рассматриваются приближенные алгоритмы.

ВВЕДЕНИЕ

Имеется набор задач и несколько возможных исполнителей. В силу специализации или профессиональных навыков каждый исполнитель в состоянии выполнить лишь некоторые из задач. Производственные возможности исполнителей также ограничены определенным числом решаемых задач. Требуется распределить все задачи среди минимального числа исполнителей.

Исходными данными задачи являются булева матрица A, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если i - й исполнитель в состоянии} \\ \quad \text{выполнить } j \text{ - ю задачу,} \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

и вектор $D = (D_i), i = \overline{1,m}$, определяющий максимальное число задач, выполняемых i-м исполнителем.

Введем переменные следующим образом

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й исполнитель назначается} \\ \text{для выполнения } j\text{-ой задачи,} \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}.$$

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Математическая модель задачи может быть записана в виде [1]:

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}\Big(\sum_{j\in J_i} x_{ij}\Big) \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{j\in J_i} x_{ij} \le D_i,\ \ i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I_j} x_{ij} = 1,\ \ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ \ i = \overline{1,m},\ j \in J_i \tag{4}$$

Здесь $I_j = \{i : a_{ij} = 1\}$, $j = \overline{1,n}$, $J_i = \{j : a_{ij} = 1\}$, $i = \overline{1,m}$.

СВОЙСТВА И ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

1. Любая допустимая точка содержит n единиц, так как ограничение (3) требует, чтобы в каждом столбце стояла ровно одна единица.

2. Если $D_i = 1,\ \forall i = \overline{1,m}$, то исходная задача эквивалентна транспортной вида

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(1 - a_{ij})x_{ij} \to \min, \tag{1'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ \ \forall i = \overline{1,m}, \tag{2'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ \ \forall j = \overline{1,n}, \tag{3'}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ \ \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \tag{4'}$$

При этом если $x^*_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ является решением задачи (1′)—(4′), таким что $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(1 - a_{ij})x^*_{ij} = 0$, то $x^*_{ij}, i = \overline{1,m}, j \in J_i$ является решением исходной задачи (1)—(4) со значением целевой функции (1), равным n. В противном случае задача (1)—(4) неразрешима.

3. Если $D_i \ge \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}, \forall i = \overline{1,m}$, то ограничения (2) становятся несущественными. В этом случае, если следующая задача о покрытии

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1,\ \ \forall j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$x_i = \{0,1\},\ \forall i = \overline{1,m} \qquad (7)$$

разрешима, и ее решением является $x_i^*, i = \overline{1,m}$, то $\hat{x}_{ij} = \begin{cases} 1, i = k_j \\ 0, i \neq k_j \end{cases}, i = \overline{1,m}, j \in J_i$, где k_j такое, что $a_{k_j j} x_{k_j}^* = 1, j = \overline{1,n}$, является решением задачи (1)—(4).

В противном случае задача (1)—(4) неразрешима.

Оценим оптимальное значение целевой функции (1). Заметим, что если для некоторого i выполняется неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < D_i$, то можно положить $D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Поэтому будем считать, что $1 \leq D_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \forall i = \overline{1,m}$.

В простейшем случае, когда $D_i = D$, $\forall i = \overline{1,m}$, оценка снизу имеет вид $\underline{L_1} = \left\lceil \frac{n}{D} \right\rceil$, где $\lceil\ \rceil$ — знак округления до ближайшего целого вверх. Рассмотрим более общий случай. Пусть $\exists k, l,\ D_k \neq D_l$. Упорядочим последовательность $\{D_i\}, i = \overline{1,m}$ таким образом, чтобы $D_{i_1} \geq D_{i_2} \ldots \geq \geq D_{i_m}$. Тогда $\underline{L_2} = \min_{\{L\}}(l)$, где $L = \{l : \sum_{k=1}^{l} D_{i_k} \geq n\}$, является нижней оценкой целевой функции.

Теорема 1. *Если задача*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_i x_i \geq n, \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1,\ \forall j = \overline{1,n}, \qquad (10)$$

$$0 \leq x_i \leq 1,\ \forall i = \overline{1,m} \qquad (11)$$

разрешима, то ее оптимальное значение является нижней оценкой значений целевой функции (1).

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x_i^*, i = \overline{1,m}$ является решением задачи (8)—(11), $\hat{x}_{ij}, i = \overline{1,m}, j \in J_i$ — решение задачи (1)—(4), и выполнено $\sum_{i=1}^{m} x_i^* > \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}\left(\sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij}\right)$.

Рассмотрим $\hat{x}_i = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij}\right)$. Если $\sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij} > 0$, то $\hat{x}_i = 1$, и в силу (2) $D_i \hat{x}_i = D_i \geq \sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij}$. Если $\sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij} = 0$, то $\hat{x}_i = 0$, и $D_i \hat{x}_i = 0 = \sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij}$. Следовательно, $D_i \hat{x}_i \geq \sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij}$, и в силу свойства (1) $\sum_{i=1}^{m} D_i \hat{x}_i \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij} = n$.

Кроме того, справедливо

$$1 = \sum_{i \in I_j} \hat{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{x}_{ij} = \sum_{i \in I_j} a_{ij} \operatorname{sgn}(\hat{x}_{ij}) \leq$$
$$\leq \sum_{i \in I_j} \operatorname{sgn}\left(\sum_{j \in J_i} \hat{x}_{ij}\right) = \sum_{i \in I_j} \hat{x}_i \leq \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i .$$

Таким образом, $\hat{x}_{ij}, i = \overline{1,m}, j \in J_i$ является допустимой точкой задачи (8)—(11), и $\sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i < \sum_{i=1}^{m} x_i^*$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Обозначим через $|J|$ число элементов в множестве J.

Теорема 2. *Система (2)—(4) совместна тогда и только тогда, когда* $\forall J \subseteq \{\overline{1,n}\}$: $: \sum_{i=1}^{m} \min(D_i, \sum_{j \in J} a_{ij}) \geq |J|$.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $\exists \bar{J} \subseteq \{\overline{1,n}\} : \sum_{i=1}^{m} \min(D_i, \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij}) < |\bar{J}|$. Покажем, что система (2)—(4) несовместна.

Предположим противное. Пусть $x_{ij}^*, i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ решение системы.

Тогда $\sum_{j \in \bar{J}} \sum_{i \in I_j} x_{ij}^* = \sum_{j \in \bar{J}} 1 = |\bar{J}| > \sum_{i=1}^{m} \min(D_i, \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij})$.

Заметим, что $\hat{x}_{ij} \leq a_{ij} = 1, i = \overline{1,m}, j \in J_i$.

В силу замечания и уравнения (2) имеем $\sum_{i=1}^{m} \min(D_i, \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in \bar{J}} x_{ij}^* \geq \sum_{j \in \bar{J}} \sum_{i \in I_j} x_{ij}^*$.

Полученное противоречие доказывает несовместность системы.

Достаточность.

Рассмотрим последовательность $\{Z_p\}$ задач (2)—(4) с матрицей A^p, составленной из первых p столбцов матрицы $A, p = \overline{1,n}$.

1) $p = 1, J = \{1\}$.

$\sum_{i=1}^{m} \min(D_i, a_{i1}) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \geq 1 \Rightarrow \exists i_0 : a_{i_0 1} = 1;$

Тогда (x_{i1}^1), где $x_{i1}^1 = 0, i \neq i_0, x_{i_0 1}^1 = 1$, является решением задачи Z_1.

2) Пусть $(x_{ij}^{p-1}), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,p-1}$ является решением задачи Z_{p-1}.

Справедлив следующий алгоритм построения решения (x_{ij}^{p}) задачи Z_p.

a) $k=1$; $I^1=\{i: a_{ip}=1\}$.

b) Если $\exists i_k \in I^k, \sum_{j=1}^{p} x_{i_k j}^{p-1} < D_{i_k}$, то переход к п. d).

c) $J^k=\{j: \exists i \in I^k, x_{ij}^{p-1}=1\}$, $I^{k+1}=\{i: \sum_{j \in J^k} a_{ij} \geq 1\}$, $k=k+1$, переход к п. b).

d) Положим $x_{ij}^{p}=x_{ij}^{p-1}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,p-1}$, $x_{ip}^{p}=0, i=\overline{1,m}$.

e) Если $k=1$, то $x_{i_k p}^{p}=1$. Останов.

f) Выберем $i_{k-1} \in I^k$, $j_{k-1} \in J^k: x_{i_{k-1} j_{k-1}}^{p-1}=1$, $a_{i_k j_{k-1}}=1$. Положим $x_{i_k j_{k-1}}^{p}=1, x_{i_{k-1} j_{k-1}}^{p}=0$, $k=$k-1, переход к п. e).

Алгоритм строит строго возрастающую последовательность множеств $\{I^k\}$: $I^1 \subset I^2 \subset ... \subset \{\overline{1,m}\}$. Так как последовательность ограничена сверху, алгоритм является корректным.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Задача (1)-(4) разрешима тогда и только тогда, когда оптимальное значение следующей транспортной задачи равно нулю:*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(1-a_{ij})x_{ij} \to \min, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq D_i, \forall i \in \overline{1,m}, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \forall j = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} \tag{15}$$

ПОИСК ДОПУСТИМОЙ ТОЧКИ

Пусть решение $x_{ij}^{*}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ транспортной задачи (12)—(15) получено методом потенциалов, и $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j \in J_i} x_{ij}^{*}=0$. Тогда $x_{ij}^{*}, i=\overline{1,m}, j \in J_i$ является допустимой точкой задачи (1)—(4).

Решение задачи методом потенциалов предполагает получение начальной базисной точки. Наиболее распространенными алгоритмами являются метод минимального элемента и метод северо-западного угла. В силу особенностей структуры матрицы A и целевой функции (1) эти методы подверглись изменениям.

Метод минимального элемента

Так как матрица A булева, то метод минимального элемента будет находить подходящие индексы (*i,j*) среди единиц матрицы A (если рассматриваемая подматрица ненулевая). При этом е обращается внимание на возможное увеличение реальной целевой функции (1). Расширим метод минимального элемента на задачу с двумя целевыми функциями: сначала максимизируется функция (11), а затем функция (1). Описанный подход реализуется следующим алгоритмом.

1. $I=\{\overline{1,m}\}, J=\{\overline{1,n}\}, k=1$.

2. $I^k=\{i \in I: \exists j, a_{ij}=1\}$. Если $I^k=\varnothing$, то переход к п. 7.

3. Выбрать случайным образом $i \in I^k$.

4. Построить $J_i^k=\{j \in J: a_{ij}=1\}$.

Выбрать случайным образом $\{j_1,..,j_l\} \subseteq J_i^k$, где $l=\min(D_i, |J_i^k|)$.

5. $I=I \setminus \{i\}, J=J \setminus \{j_1,..,j_l\}, x_{ij_1}=...=x_{ij_l}=1$, $k=k+1$.

6. Если $J=\varnothing$, то останов. Иначе переход к п. 2.

7. Выбирается первый элемент множества J: $j=J[1]$.

Случайным образом выбирается $i \in I$. $I=I \setminus \{i\}, J=J \setminus \{j\}, x_{ij}=1$.

8. Если $J=\varnothing$, то останов. Иначе переход к п. 7.

Метод северно-западного угла

Метод северо-западного угла более удобен для рассматриваемой задачи, так как строит начальную базисную точку по строкам, и каждая строка вносит минимальный вклад в целевую функцию (1). Так как элементы матрицы A принимают лишь 2 возможных значения, имеет смысл предварительно переупорядочить строки и столбцы матрицы A таким образом, чтобы увеличить плотность единиц над главной диагональю. Такое переупорядочивание повысит вероятность получения лучшей начальной базисной точки.

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Так как задача (1)—(4) является дискретной, все точные методы решения основаны (явно или неявно) на переборе. Рассмотрим различные схемы эффективной реализации перебора.

Перебор с фиксированным значением целевой функции

В этом методе фиксируется значение $L=\underline{L}$ целевой функции (1) и по очереди рассматриваются L-элементные множества $I \subset \{1..m\}$. Если система

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le D_i, \forall i \in I \quad (16)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \forall j = \overline{1,n}, \quad (17)$$

$$x_{ij} = \{0,1\}, \forall i \in I, j \in J_i \quad (18)$$

разрешима, то ее решение является решением задачи (1)—(4). Если же для всех L-элементных подмножеств I задача (16)—(18) оказалась неразрешимой, то изменяется нижняя оценка: $\underline{L} = L + 1$, — и далее осуществляется перебор $\underline{L}$-элементных множеств. Метод допускает эффективную реализацию, если перебор подмножеств I организовать таким образом, чтобы соседние рассматриваемые множества отличались лишь двумя элементами [4]. При этом решение предыдущей задачи является хорошей начальной точкой, а процесс получения новых потенциалов (при решении системы (16)—(18) методом потенциалов) сводится к корректировке значений, полученных в предыдущей задаче [3].

Метод ветвей и границ

Зададим правило ветвления следующим образом: левая ветвь соответствует исключению очередной строки матрицы А из оптимального решения, правая — включению. В силу больших, как правило, размеров матрицы А единственным способом обхода вершин дерева оказывается односторонний обход. Левосторонний обход является предпочтительным, так как позволяет быстрее получить допустимую точку. Корню дерева соответствует матрица А. Оценочной функцией может служить простая оценка $\underline{L}_2$. Так как эта оценка в силу Теоремы 2 не гарантирует, что ветвь содержит допустимые точки, рекомендуется решать соответствующую ветви задачу (12)—(15). Практика показала, что такая реализация метода является эффективной для рассматриваемой задачи. Для разреженных матриц происходит быстрое уменьшение области поиска и сокращение перебора; для достаточно плотных уже на верхних ветвях при решении задачи (12)—(15) может быть получена оптимальная точка.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ

Несмотря на то, что теоретических трудностей при решении задачи (1)—(4) не возникает, процесс точного решения может оказаться слишком долгим. В этом случае используются приближенные методы. В качестве приближенных методов можно рассматривать все описанные алгоритмы получения допустимой точки: решение транспортной задачи с запретами (12)—(15), а также алгоритм, описанный при доказательстве Теоремы 2. Другим приближенным методом является следующая модификация перебора с фиксированным значением целевой функции.

Алгоритм.

1. Если $\underline{L} > \overline{L}$, задача неразрешима, останов. Иначе выбирается $L, \underline{L} \le L \le \overline{L}$.

2. Если для всех L-элементных подмножеств $I \subset \{1..m\}$, система (16)—(18) несовместна, то переход к п. 3, иначе переход к п. 4.

3. Меняется нижняя оценка: $\underline{L} = L + 1$. Переход к п. 1.

4. Если $L = \underline{L}$, то найдено точное решение, останов. Иначе фиксируется рекордное значение.

5. Меняется верхняя оценка: $\overline{L} = L$. Переход к п. 1.

Работа алгоритма может быть прервана на произвольном шаге. Результатом при преждевременном останове является полученный в процессе решения рекорд [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каширина И. Л., Чернышова Г. Д.* Эквивалентные преобразования одной задачи транспортного типа, позволяющие использовать различные методы ее решения.//Вестник ВГУ, серия «Физика, математика». 2001. № 2. С. 104—107.

2. *Мухин А. И., Федорова И. В., Федорова Т. В., Чернышова Г. Д.* Алгоритмический комплекс для решения задачи выбора ретрансляторов. //Вестник ВТГУ, серия «Вычислительные и информационно-телекоммуникационные системы», вып. 8.2, 2002. С. 36—39.

3. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука. 1969. 382 с.

4. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир. 1980. 473 с.