УДК 517.925.42:517.938.5

# ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ПРИНЦИПА УСРЕДНЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА RC-УСИЛИТЕЛЯ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА*

 **О. Ю. Макаренков**

*Воронежский государственный университет*

В статье изучается $2\pi$-периодическое решение $x_E$ уравнения $\ddot{x} + x = \mu(hx - (\delta - \gamma x + Kx^2)\dot{x} + E\sin t)$, удовлетворяющее условию $x_E \to 0$ при $E \to 0$, то есть имеющее линейную природу возникновения. Периодическое решение, обладающее таким свойством, является основным при изучении узкополосного RC-усилителя. На основании модифицированного принципа усреднения предлагается условие на параметры $\mu$, $h$, $\delta$, $\gamma$, $K$ и $E$, обеспечивающее существование такого решения в наперед заданном круге.

## 1. Введение

При ряде упрощающих, но вполне допустимых для качественного анализа предположениях, математическая модель узкополосного RC-усилителя вблизи главного резонанса записывается в виде

$$\ddot{x} + x = \mu(hx - (\delta - \gamma x + Kx^2)\dot{x} + E\sin t), \qquad (1)$$

где $\mu h$ — значение расстройки, $\mu\delta$ — коэффициент затухания, $\mu\gamma$ — коэффициент асимметрии характеристики лампы, $\mu K$ — коэффициент усиления усилителя при $E = 0$ (разомкнутой цепи обратной связи), $\mu E$ — амплитуда включенной в контур усилителя э. д. с. Построение модели RC-усилителя и подробное описание всех введенных параметров имеется в [5], гл. 10, § 3.

Уравнение вида (1) является классическим объектом исследований в нелинейной механике. Известно (см. [2]), что при некоторых условиях и $E = 0$ это уравнение имеет предельный цикл, порождающий при увеличении $E$ и достаточно малых $\mu > 0$ периодическое решение $x_{\mu,E}$ (см. [1], [4]) периода $2\pi$. При этом $x_{\mu,E} \to x_0$ при $E \to 0$, где $x_0 \neq 0$, что связано с нелинейностью правой части уравнения (1). Указанное явление широко используется в теории регенеративного приемника, одноконтурного генератора, RC-генератора и многих других разделах радиотехники ([5], гл. 10, § 4, [9], гл. 5, разд. Б). Однако, как отмечено в [5], гл. 10, § 3, в случае изучаемого в данной статье узкополосного RC-усилителя описанный эффект, как и другие эффекты, вызываемые входящей в уравнение (1) нелинейностью, является нежелательным и его стараются избегать при анализе периодических режимов.

В статье рассматривается периодическое решение $x_{\mu,E}$ уравнения (1), стремящееся к нулю при $\mu \to 0$ и имеющее, тем самым, линейную природу. Основным методом исследования периодических решений в классической теории колебаний является метод Ван дер Поля медленно меняющихся амплитуд (см. [9], гл. 5, разд. Б), который состоит в построении по уравнению (1) вспомогательных «укороченных» уравнений и, после этого, в анализе свойств периодических решений уравнения (1) на основании свойств полученных укороченных уравнений. Полное строгое математическое обоснование метода медленно меняющихся амплитуд при $0 < \mu < \mu_0$ было проведено Н. Н. Боголюбовым (см. [8]) при малых значениях $\mu_0$ на основании принципа усреднения. Тем не менее, ни в работах Н. Н. Боголюбова, ни в других, известных нам классических работах по принципу усреднения, $\mu_0$ не находится в явном виде. Поэтому, для законности применения метода медленно меняющихся амплитуд принцип усреднения естественно дополнить явным выражением для $\mu_0$. Одно из таких выражений для произвольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка предлагается в теоре-

* Работа поддержана РФФИ, гранты 02-01-00189, 02-01-00307, 03-01-06308 и грантом VZ-010-0 U.S. CRDF и Министерства образования РФ.

ме 1 следующего пункта. В пункте 3 статьи теорема 1 применяется для нахождения числа $\mu_0(h,\delta,\gamma,K,E)$ такого, что при каждом $0<\mu<\mu_0$ уравнение (1) имеет $2\pi$-периодическое решение $x_{\mu,E}$, удовлетворяющее соотношению $x_{\mu,E}\to 0$ при $E\to 0$.

## 2. Модификация принципа усреднения

В этом пункте будет использован топологический способ обоснования принципа усреднения, предложенный в разных ситуациях авторами [3] и [10].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\mu f(t,x), \tag{2}$$

где функция $f:\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных, непрерывно дифференцируема по второй переменной и $T$-периодична по первой переменной.

Пусть $U\subset\mathrm{R}^n$ — открытое ограниченное множество. Введем следующие обозначения

$$f_0(\xi)=\int_0^T f(\tau,\xi)d\tau,$$
$$M_U=\max_{t\in[0,T],\xi\in\overline{U}}\left\|f(t,\xi)\right\|,$$
$$M_U'=\max_{t\in[0,T],\xi\in\overline{U}}\left\|f_\xi'(t,\xi)\right\|,$$
$$K_U=\min_{\xi\in\partial U}\left\|f_0(\xi)\right\|.$$

Очевидно, что периодические решения уравнения (2) совпадают с нулевыми точками следующего вполне непрерывного векторного поля

$$(F_\mu x)(t)=x(t)-x(T)-\mu\int_0^t f(\tau,x(\tau))d\tau,$$

заданного в пространстве $\mathrm{C}([0,T],\mathrm{R}^n)$ непрерывных функций, действующих из $[0,T]$ в $\mathrm{R}^n$.

Ниже будет использовано классическое понятие вращения векторного поля $\Phi:\overline{X}\to\overline{X}$, заданного на замыкании открытого ограниченного множества $X\in E$, где $E$ − банахово пространство (см. [6]). Эту величину мы будем обозначать через $\deg_E(\Phi,X)$.

**Теорема 1.** *Пусть открытое ограниченное множество $U\subset\mathrm{R}^n$ таково, что векторное поле $f_0$ невырождено на его границе. Тогда при*

$$\mu<\frac{2K_U}{T^2M_UM_U'} \tag{3}$$

*справедливо соотношение*

$$\deg_{\mathrm{C}([0,T],\mathrm{R}^n)}(F_\mu,W_U)=\deg_{\mathrm{R}^n}(-f_0,U), \tag{4}$$

*где*

$$W_U=\left\{x:x\in\mathrm{C}([0,T],\mathrm{R}^n),x(t)\in U,t\in[0,T]\right\}.$$

**Доказательство.** Покажем, что при условии (3) вполне непрерывное векторное поле $F_\mu$ линейно гомотопно на границе множества $W$ следующему полю

$$(F_{0,\mu}x)(t)=x(t)-x(T)-\mu\int_0^T f(\tau,x(\tau))d\tau.$$

Ниже, без дополнительных переобозначений мы будем рассматривать оператор $F_{0,\mu}$ действующим из $\mathrm{R}^n$ в $\mathrm{R}^n$, отождествляя при этом функции-константы пространства $\mathrm{C}([0,T],\mathrm{R}^n)$ с соответствующими элементами пространства $\mathrm{R}^n$. Итак, предположим, что не при всех $\mu$, удовлетворяющих (3), поля $F_\mu$ и $F_{0,\mu}$ линейно гомотопны на $\partial W_U$. Тогда найдутся $\mu\in\left(0,\dfrac{2K_U}{T^2M_UM_U'}\right)$ и $x_\mu\in\partial W$ такие, что

$$\begin{gathered}x_\mu(t)=x_\mu(T)+\lambda\mu\int_0^t f(\tau,x_\mu(\tau))d\tau+\\+(1-\lambda)\mu\int_0^T f(\tau,x_\mu(\tau))d\tau,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\lambda\in[0,1]$. Так как $^0x_\mu\in\partial W$, то существует $t_\mu\in[0,T]$ такое, что $x_\mu(t_\mu)\in\partial U$. Имеем

$$\begin{gathered}\left\|\int_{t_\mu-\frac{T}{2}}^{t_\mu+\frac{T}{2}} f(\tau,x_\mu(\tau))d\tau-\int_{t_\mu-\frac{T}{2}}^{t_\mu+\frac{T}{2}} f(\tau,x_\mu(t_\mu))d\tau\right\|\le\\
\le T\max\left\{\max_{t\in\left[t_\mu-\frac{T}{2},t_\mu\right]}\left\|f(t,x_\mu(t))-f(t,x_\mu(t_\mu))\right\|,\right.\\
\left.\max_{t\in\left[t_\mu,t_\mu+\frac{T}{2}\right]}\left\|f(t,x_\mu(t))-f(t,x_\mu(t_\mu))\right\|\right\}\le\\
\le T\max_{t\in[0,T]}\max_{\xi\in\overline{U}}\left\|f_\xi'(t,\xi)\right\|\cdot\\
\cdot\max\left\{\max_{t\in\left[t_\mu-\frac{T}{2},t_\mu\right]}\left\|x_\mu(t)-x_\mu(t_\mu)\right\|,\right.\\
\left.\max_{t\in\left[t_\mu,t_\mu+\frac{T}{2}\right]}\left\|x_\mu(t)-x_\mu(t_\mu)\right\|\right\}\le\\
\le TM_U'\max_{t\in[0,T]}\left\|\dot{x}_\mu(t)\right\|\cdot\frac{T}{2}=\\
=\frac{\lambda\mu T^2M_U'}{2}\max_{t\in[0,T]}\left\|f(t,x_\mu(t))\right\|\le\\
\le\frac{\mu T^2M_UM_U'}{2}<K_U.\end{gathered} \tag{6}$$

Но полагая в (5) $t = T$, получаем

$$\int_0^T f(\tau, x_\mu(\tau))d\tau = 0,$$

откуда

$$\int_{t_\mu - \frac{T}{2}}^{t_\mu + \frac{T}{2}} f(\tau, x_\mu(\tau))d\tau = 0.$$

На основании предыдущего равенства из неравенства (6) выводим

$$\left\| \int_{t_\mu - \frac{T}{2}}^{t_\mu + \frac{T}{2}} f(\tau, x_\mu(t_\mu))d\tau \right\| < K_U,$$

следовательно

$$\left\| \int_0^T f(\tau, x_\mu(t_\mu))d\tau \right\| < K_U,$$

что противоречит определению константы $K_U$. Таким образом, если условие (3) выполнено, то

$$\deg_{C([0,T],R^n)}(F_\mu, W_U) = \deg_{C([0,T],R^n)}(F_{0,\mu}, W_U). \quad (7)$$

На основании теоремы о сужении ([6], теорема 27. 1)

$$\deg_{C([0,T],R^n)}(F_{0,\mu}, W_U) = \deg_{R^n}(F_{0,\mu}, W_U) \quad (8)$$

и, далее, на основании линейной гомотопности на $\partial U$ полей $F_{0,\mu}$ и $F_{0,1}$, получаем

$$\deg_{R^n}(F_{0,\mu}, W_U) = \deg_{R^n}(F_{0,1}, W_U). \quad (9)$$

Из (7), (8) и (9) следует (4). Теорема доказана.

### 3. Основной результат

**Теорема 2.** *Пусть число* $r > 0$ *таково, что*

$$r\sqrt{(Kr^2 + 4\delta)^2 + 16h^2} - 4E > 0. \quad (10)$$

*Тогда при*

$$\mu < \frac{\left(r\sqrt{(Kr^2 + 4\delta)^2 + 16h^2} - 4E\right)^2}{2(8Kr^3 + 4\gamma r^2 + 2(h+\delta)r + E)(24Kr^2 + 8\gamma r + h + \delta)} \quad (11)$$

*уравнение (1) имеет* $2\pi$ *-периодическое решение* $x_{\mu,E}$, *лежащее в круге радиуса* $r$ *с центром в нуле, имеющее ненулевой топологический индекс и удовлетворяющее условию*

$$x_{\mu,E} \to 0 \text{ при } E \to 0. \quad (12)$$

**Доказательство.** Отметим сразу, что утверждение (12) является следствием остальных утверждений теоремы. Действительно, если $E_n \to 0$ при $n \to \infty$, то, как легко видеть, можно построить соответствующую последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (10), но также как и последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящуюся к нулю. Так как при $r_n \to 0$ правая часть неравенства (11) стремится к бесконечности, то предельное соотношении (12) имеет место при любом фиксированном $\mu > 0$, лишь бы $2\pi$ -периодические решения $x_{\mu,E}$ существовали.

Доказательство остальных утверждений теоремы проводится на основании теоремы 1, для применения которой приведем сначала уравнение (1) к виду (2). Для этого перепишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu(hx_1 - (\delta - \gamma x_1 + Kx_1^2)x_2 + E\sin t). \end{cases} \quad (13)$$

и произведем в этой системе замену переменных

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

которая, очевидно, переводит $2\pi$ -периодические функции в $2\pi$ -периодические. Получим следующую систему

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} 0 \\ g(\cos t y_1 + \sin t y_2, \cos t y_2 - \sin t y_1) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где через $g(x_1, x_2)$ обозначено выражение, стоящее во втором уравнении системы (13) после параметра $\mu$. В качестве множества $U \subset R^2$ рассмотрим внутренность $B_r$ круга радиуса $r$ с центром в нуле. Вычисление и оценка констант $M_{B_r}$, $M'_{B_r}$ и $K_{B_r}$ является чисто техническим моментом в доказательстве, поэтому в избежании громоздкости мы приведем для них конечный результат

$$M_{B_r} \le \sqrt{2}\left(8Kr^3 + 4\gamma r^2 + 2(h+\delta)r + E\right),$$

$$M'_{B_r} \le \sqrt{2}\left(24Kr^2 + 8\gamma r + h + \delta\right).$$

Далее, произведя интегрирование в пределах от 0 до $2\pi$ правой части уравнения (14), получим для $f_0$ следующее выражение

$$f_0(\xi) = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} -K\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 4\delta\xi_1 - 4h\xi_2 - 4E \\ -K\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 4\delta\xi_2 + 4h\xi_1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Поэтому, если

$$\max_{\phi\in[0,2\pi]}\left(-Kr^3\cos\phi - 4\delta r\cos\phi - 4hr\sin\phi\right) > 4E, \quad (16)$$

то $\left|\deg_{\mathrm{R}^n}(-f_0, B_r)\right| = 1$ (см. также [7]). Легко показать, что условие (16) совпадает с условием (10). Наконец, используя известные правила нахождения минимума функции, для константы $K_{B_r}$ получаем следующее выражение

$$K_{B_r} = \left(r\sqrt{(Kr^2 + 4\delta)^2 + 16h^2} - 4E\right)^2.$$

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться утверждением теоремы 1.

В заключение хочу выразить благодарность профессору А. И. Перову, указавшему на возможность улучшения оценки (3), использованную в данной работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Витт А. А.* Собрание трудов А. А. Андронова. Изд. АН СССР. 1956. С. 51—66.

2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз. 1959. 915 с.

3. *Каменский М. И.* ДАН СССР. 1996. Т. 347. № 2. С. 151—153.

4. *Kamenski M., Makarenkov O., Nistri P.* Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. Принято к печати.

5. *Капчинский И. М.* Методы теории колебаний в радиотехнике. М.: Госэнергоиздат. 1954. 352 с.

6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Физматгиз. 1975. 510 с.

7. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз. 1963. 246 с.

8. *Митропольский Ю. А.* Принцип усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка. 1971. 455 с.

9. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ. 1952. 264 с.

10. *Стрыгин В. В.* Украинский мат. журнал. 1970. Т. 22. № 4. С. 503—513.