*УДК 681.3*

# ОРГАНИЗАЦИЯ СТРАТЕГИЙ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АПРИОРНОЙ И ТЕКУЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ

**© 2003 Я. Е. Львович, М. А. Артемов, С. Ю. Белецкая**

*Воронежский государственный университет*
*Воронежский государственный технический университет*

Рассматриваются вопросы дополнительной обработки текущей информации в поисковых алгоритмах оптимального параметрического синтеза сложных систем. Повышение эффективности процесса поиска оптимальных вариантов осуществляется на основе преобразования оптимизационных задач с использованием замены переменных.

Особенностью задач оптимизации сложных систем (технических, информационно-телекоммуникационных, социально-экономических, технологических и др.) является невозможность адекватного описания процессов функционирования таких объектов с помощью аналитических моделей. Это обусловлено многообразием связей между структурными элементами систем, неоднозначностью алгоритмов поведения при различных условиях, наличием случайных воздействий и возмущений, корреляционным взаимодействием параметров. Необходимость комплексного учета данных факторов затрудняет аналитическую формулировку критериев оптимальности и ограничений в оптимизационных задачах и приводит к использованию алгоритмических (в частности, имитационных) моделей. При этом взаимосвязи между входными и выходными параметрами задаются с помощью различных моделирующих алгоритмов в соответствии с закономерностями функционирования оптимизируемой системы.

Рассмотрим задачу параметрической оптимизации сложных систем:

$$F_i(X) \to \min_{X \in D}, i = \overline{1,m},$$
$$D = \{X \mid \ x_k^{\min} \le x_k \le x_k^{\max}; k = \overline{1,n}; \quad ,$$
$$g_j(X) \ge 0, h_s(X) = 0, j = \overline{1,r}; s = \overline{1,q}\}.$$

Здесь $X = (x_1, \ldots x_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор управляемых параметров; $F_i(X)$ — частные критерии оптимальности; $D$ — допустимая область, представленная ограничениями двух видов: прямыми ($x_k^{\min} \le x_k \le x_k^{\max}$) и функциональными ($g_j(X) \ge 0, h_s(X) = 0$).

При этом в качестве инвариантной части выделяется задача скалярной безусловной минимизации целевой функции $f(X)$ в n-мерном евклидовом пространстве $R^n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min_{X \in R^n}.$$

Предполагается, что критерий оптимальности задан алгоритмически в виде процедуры, позволяющей по заданным значениям вектора варьируемых параметров $X = (x_1, \ldots x_n)^{\mathrm{T}}$ получать значения $f(X)$. Отсутствие аналитических формулировок критерия оптимальности приводит к необходимости применения для решения данной задачи алгоритмов оптимизации поискового типа, не использующих дифференциальные характеристики целевой функции. К основным классам поисковых алгоритмов можно отнести методы деформируемых конфигураций (алгоритм переменного многогранника и его модификации), процедуры покоординатной оптимизации и методы случайного поиска [1, 3]. Все алгоритмы поисковой оптимизации строятся в рамках следующей итерационной схемы:

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_{k+1} H^{k+1}.$$

Здесь $k$ — номер итерации, $H^{k+1}$ - вектор, задающий направление поиска, $\alpha_{k+1}$ — величина шага в данном направлении.

Решение задач оптимизации сложных систем с помощью стандартных поисковых алгоритмов зачастую приводит к неудовлетворительным результатам, что связано с низким уровнем априорного математического описания оптимизационных моделей. Поэтому целесообразным является построение процедур дополнительной обработки текущей информации и подключение их к поисковым алгоритмам, что позволит сочетать в единой алгоритмической схеме исследование свойств модели с поиском оптимальных вариантов.

Для повышения эффективности процедур поисковой оптимизации может быть использована замена переменных [3]:

$$X = AY,$$

где $Y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор новых переменных; $A$ — матрица замены переменных размера $n \times n$.

Переформулированная в новых переменных задача запишется в виде:

$$f(X) = f(AY) = \varphi(Y) \to \min_{Y \in R^n}.$$

Матрица замены переменных $A$ обеспечивает локальные свойства сепарабельности оптимизируемой функции, что позволяет преодолевать овражные ситуации в процессе поиска оптимального решения.

Воспользовавшись блочным представлением матрицы замены переменных: $A = [a^1, \ldots, a^n]$, где $a^j$ — $j$-й столбец матрицы $A$, можно перейти к следующей форме замены:

$$X = AY = [a^1, \ldots, a^n](y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} a^j y_j.$$

Для покоординатной оптимизации замена переменных, следовательно, означает использование столбцов матрицы $A$ в качестве новых координатных осей.

Структура матрицы $A$ определяется путем последовательного применения замены переменных:

$$X = A_k Y, \;\; Y = R_{k+1} Z.$$

Тогда

$$X = A_k R_{k+1} Z, \;\; A_{k+1} = A_k R_{k+1},$$

где $R_{k+1}$ — корректирующая матрица, $k$ — номер итерации.

Таким образом, проблема формирования матрицы замены переменных сводится к нахождению корректирующей матрицы $R$ и построению с ее использованием итерационной процедуры корректировки матрицы $A$ на каждом последующем шаге.

Известно [1, 4], что приведение оптимизируемой функции к сепарабельному виду, или диагонализация ее матрицы вторых производных, отвечает выполнению соотношения:

$$A_k^{\mathrm{T}} G_k A_k = \Lambda_k,$$

где $G_{\mathrm{k}}$ — матрица вторых производных (матрица Гессе) целевой функции; $A_{\mathrm{k}}$ — ортогональная матрица замены переменных; $\Lambda_k$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_j > 0,\, j = 1, \ldots, n$. В дальнейшем для простоты записи номер итерации $k$ будем опускать.

Учитывая свойства ортогональности матрицы $A$, получим [4]:

$$G = A\Lambda A^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a^j (a^j)^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} a^j (a^j)^{\mathrm{T}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - 1) a^j (a^j)^{\mathrm{T}} = I + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - 1) a^j (a^j)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (I + (\lambda_j - 1) a^j (a^j)^{\mathrm{T}}).$$

Дополнительные требования к процедуре диагонализации, связанные с достижением хорошей обусловленности, обеспечиваются путем приведения положительно определенной матрицы Гессе к единичной:

$$\hat{A}^T G \hat{A} = I,$$

$$\hat{A} \hat{A}^{\mathrm{T}} = G^{-1} = \prod_{j=1}^{n} (I + (1/\lambda_j - 1) a^j (a^j)^{\mathrm{T}}).$$

Отсюда

$$\hat{A} = G^{-1/2} = \prod_{j=1}^{n} (I + (\lambda_j^{-1/2} - 1) a^j (a^j)^{\mathrm{T}}).$$

Таким образом, матрица замены переменных может быть определена путем перемножения элементарных структур вида

$$R = I + (\lambda_j^{-1/2} - 1) a^j (a^j)^{\mathrm{T}}$$

или

$$R_\beta(\theta) = I + (\beta - 1)\theta\theta^{\mathrm{T}},\; \beta = (\lambda_j)^{-1/2},\; \|\theta\| = 1.$$

Матрица $R_\beta(\theta)$, которая может интерпретироваться как корректирующая, известна в литературе как оператор Шора [6]. Рассмотрим действие оператора $R_\beta(\theta)$ на произвольный вектор $X$ при различных значениях $\beta$ [4] (рис.).

$R_\beta(\theta)$ является оператором растяжения пространства $R^n$ в направлении $\theta$ с коэффициентом $\beta$ и оставляет без изменения проек-

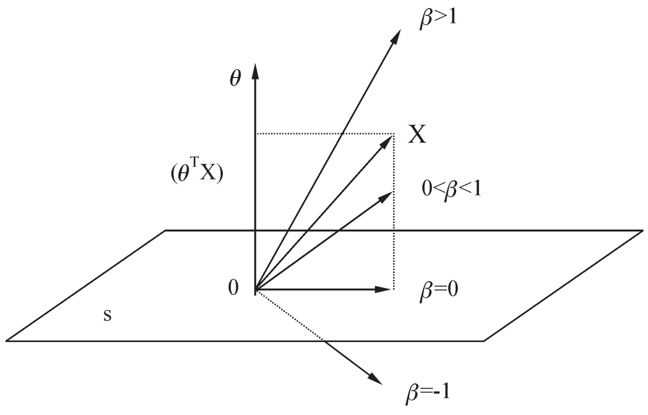


*Рис.*

цию вектора $X$ на ортогональную $\theta$ плоскость $s$. Ситуация $\beta > 1$ соответствует «повороту» вектора $X$ к вектору $\theta$ с увеличением проекции вектора $X$ на $\theta$ в $\beta$ раз. При $0 < \beta < 1$ составляющая вектора $X$, параллельная $\theta$, уменьшается в $\beta$ раз и происходит «отталкивание» вектора $X$ от направления $\theta$. При $\beta = -1$ оператор Шора превращается в ортогональный оператор отражения, и осуществляется зеркальное отражение вектора $X$ относительно плоскости $s$. При $\beta = 0$ оператор Шора переходит в оператор проектирования на плоскость, ортогональную $\theta$: $R_0(\theta) = I - \theta\theta^{\mathrm{T}}$.

При соответствующем выборе направления $\theta$ и коэффициента $\beta$ воздействие оператора Шора на очередное направление движения в оптимизационных процедурах позволяет управлять направленностью поиска. Последовательная корректировка матриц замены переменных с использованием оператора растяжения пространства может интерпретироваться как накопление апостериорной информации о ходе оптимизационного процесса. При этом оператор $R_\beta(\theta)$ рассматривается в качестве некоторой модели организации «памяти» о перспективных и неперспективных направлениях поиска, полученных на различных шагах оптимизации.

Формирование матрицы замены переменных сводится к следующей последовательности этапов:

1. Определение начальной матрицы замены $A_0$.

2. Выбор стратегии определения направления $\theta$ и параметра $\beta$ в структуре корректирующей матрицы $R_\beta(\theta)$.

3. Последовательная итерационная корректировка матриц замены переменных с использованием оператора $R_\beta(\theta)$.

На начальном этапе поиска в качестве матрицы замены переменных, как правило, выбирается единичная матрица $A_0 = I$, что связано с отсутствием априорной информации о задаче. При наличии такой информации, т.е. при возможности выделения хотя бы одного перспективного направления поиска, используется ортогональная матрица, первым столбцом которой является выделенное перспективное направление, а остальные к нему ортогональны. Такая матрица может быть построена, в частности, с применением оператора проектирования $R_0(\theta)$:

$$\theta^{k+1} = [I - \theta^1(\theta^1)^{\mathrm{T}}][I - \theta^2(\theta^2)^{\mathrm{T}}]\ldots[I - \theta^k(\theta^k)^{\mathrm{T}}]X,$$

$$\theta^{k+1} = \frac{\theta^{k+1}}{|\theta^{k+1}|}.$$

При этом вектор $X$ проецируется последовательно на плоскость, ортогональную всем построенным взаимно-ортогональным направлениям $\theta^1,\ldots,\theta^k$.

Определение направления $\theta$ в корректирующей матрице $R_\beta(\theta)$ зависит от принятой стратегии учета информации. В качестве $\theta$ может быть выбрано одно из следующих направлений: перспективное (приводящее к уменьшению значения целевой функции) направление поиска; неперспективное направление поиска; нормированная разность перспективных направлений на определенных шагах итерационного процесса.

Параметр $\beta$ при этом выбирается следующим образом: $\beta > 1$, если направление $\theta$ перспективно; $0 < \beta < 1$ в противном случае. Тогда воздействие матрицы замены переменных на очередное направление способствует ориентации поиска вдоль дна оврага. В качестве параметра $\beta$ целесообразно выбирать шаг поиска $\alpha_k$ на текущей итерации. Адаптивная настройка шага $\alpha_k$ в ходе оптимизационного процесса и изменение на этой основе параметра $\beta$ позволяет учитывать степень перспективности (или неперспективности) данного направления.

Выбор параметра $\beta$ может также осуществляться на основании информации об оптимизируемой функции. В [6] показано, что параметр $\beta$ может быть определен следующим образом:

$$\beta = (g_{ii})^{-1/2},$$

где $g_{ii}$ — диагональные элементы матрицы Гессе. При отсутствии возможности определения производных целевой функции эти элементы рассчитываются в рамках конечно-разностной аппроксимации.

Таким образом, при решении задач оптимизации сложных систем параллельно с поиском экстремума происходит построение и корректировка матриц замены переменных на основе текущей информации:

$$A_{k+1} = A_0 R_{\beta_1}(\theta_1) \ldots R_{\beta_{k+1}}(\beta_{k+1}).$$

При этом периодически через m итераций осуществляется воздействие матрицы замены переменных $A_{k+1}$ на текущее направление $H^{k+1}$, формируется новое направление поиска $S^{k+1} = A_{k+1}H^{k+1}$ и осуществляется движение в данном направлении:

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_{k+1}S^{k+1}.$$

Если данная попытка приводит к уменьшению значения функции цели ($f(X^{k+1}) < f(X^k)$), то продолжается движение в направлении $S^{k+1}$, после чего возобновляет работу процедура поисковой оптимизации.

При построении алгоритмических процедур обработки апостериорной информации необходимо учитывать, что данная информация является локальной и быстро устаревает по мере выхода из окрестности текущей поисковой точки. Поэтому в данных процедурах предусматривается механизм периодического стирания устаревшей информации и соответствующего обновления матриц замены переменных. При использовании такого подхода вводится параметр $k_1$ — число шагов, через которое матрица замены переменных становится единичной и процесс ее корректировки начинается снова. Так как в окрестности оптимальной точки информация устаревает значительно медленнее, чем вдали от нее, параметр $k_1$ изменяется по мере приближения к оптимуму. В ряде случаев является рациональным подключение модулей обработки информации не на начальном этапе, а после некоторого количества итераций.

Вычислительный эксперимент показал [4], что корректировка матрицы замены переменных на каждом шаге итерационного процесса не является целесообразной. Процесс поиска экстремума и накопление соответствующей текущей информации должны осуществляться в разных масштабах времени. При этом корректировка матрицы замены переменных производится через определенное число шагов итерационного процесса ($k_2$). Сказанное относится и к воздействию матрицы замены на очередное направление движения. С этой целью вводится параметр $k_3$, показывающий, сколько шагов должен проработать алгоритм прежде, чем будет осуществлено подобное воздействие.

Можно выделить два подхода к корректировке матриц замены переменных:

1. Корректировка осуществляется по мере получения нового направления движения. Недостатком такой стратегии является необходимость хранения в памяти ЭВМ всей матрицы замены.

2. Построение матрицы замены переменных производится непосредственно перед ее воздействием на текущий поисковый вектор. При этом необходимо хранить в памяти лишь параметры $\beta_j$ и направления $\theta_j$ и по мере необходимости формировать матрицу замены переменных, начиная с единичной. Число направлений должно адаптивно изменяться по мере приближения к оптимальному решению.

Рассмотренный подход к трансформации задач параметрического синтеза сложных систем на основе замены переменных обеспечивает повышение эффективности процедур поиска оптимальных вариантов за счет возможности дополнительной обработки апостериорной информации. При этом можно выделить два параллельных этапа оптимизационного процесса:

– накопление и обработка текущей информации путем итерационного формирования матриц замены переменных с применением оператора Шора $R_\beta(\theta)$;

– поиск оптимального решения на основе алгоритмов оптимизации, не использующих дифференциальные характеристики критериев и ограничений.

Подобные параллельные процедуры могут быть реализованы как в рамках одной вычислительной схемы, так и с использованием разных алгоритмов поисковой оптимизации. При этом один алгоритм (возможно, неэффективно работающий), может использоваться для обработки текущей информации, результаты которой затем применяются в другой оптимизационной процедуре. Это позволяет формировать гибридные алгоритмы оптимального проектирования сложных систем на основе комплексирования стандартных и модифицированных алгоритмов поисковой оптимизации. Анализ текущей информации и формирование на этой основе гибких схем перебора является важным фактором уменьшения вычислительных затрат и времени для получения оптимального решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Батищев Д.И., Львович Я.Е., Фролов В.Н.* Оптимизация в САПР. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. 416 с.

2. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985. 509 с.

3. *Черноруцкий И.Г.* Оптимальный параметрический синтез. — Л.: Энергоатомиздат, 1987. 128 с.

4. *Львович Я.Е., Каплинский А.И., Белецкая С.Ю.* Дискретно-непрерывные модели оптимального проектирования. — Воронеж: ВГТУ, 1997. 109 с.

5. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1979. 199 с.

6. *Крутько П.Д., Максимов А.И., Скворцов Л.М.* Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем. — М.: Радио и связь, 1988. 306 с.