ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 1

УДК 517.9

О ФАКТОРИАЛЬНО-ОГРАНИЧЕННЫХ И ФАКТОРИАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЯХ*

© 2003 В. В. Хатько

Воронежский государственный университет

Даются определения факториально-ограниченных и факториально-компактных линейных отношений через определение фактор-отношения. Рассматриваются их свойства. Изучается спектральная теория для данных классов линейных отношений.

1. Введение

В статье рассматриваются так называемые *факториально-ограниченные* и *факториально-компактные* линейные отношения, которые по своим спектральным свойствам очень близки соответственно к ограниченным и компактным линейным операторам. Мотивом для этой работы послужило определение *компактного* линейного отношения, данное в монографии [3], которое представляется автору неудобным для изучения спектральной теории линейных отношений. В монографии [3] почти все определения даны для линейных отношений между двумя банаховыми пространствами. В данной работе, в связи с потребностями спектральной теории, рассматриваются линейные отношения на одном линейном нормированном пространстве.

Под записью $M \subset N$ условимся в дальнейшем понимать не обязательно строгое включение множества M в множество N; иначе будем делать специальную оговорку. Условимся начало и конец доказательства отмечать знаками ◄, ►.

Приведем некоторые используемые ниже понятия из теории линейных отношений.

Пусть X и Y - комплексные банаховы пространства. Любое линейное подпространство $A \subset X \times Y$ называется *линейным отношением* между банаховыми пространствами X и Y. Если оно замкнуто в $X \times Y$, то линейное отношение называется *замкнутым*.

Подпространство $D(A) = \{x \in X \mid$ существует $y \in Y$ такой, что $(x,y) \in A\}$ называется *областью определения* линейного отношения $A \subset X \times Y$.

Ядро отношения есть $KerA = \{x \in D(A) \mid (x,0) \in \in A\}$.

Через Ax, $x \in D(A)$, обозначим множество $\{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$. Заметим, что Ax является линейным подпространством, только если $x \in KerA$, и тогда $Ax = A0$.

Область значений $ImA = \{y \in Y \mid \exists x \in D(A), (x,y) \in A\} = \bigcup\limits_{x \in D(A)} Ax$.

Суммой двух линейных отношений $A, B \subset \subset X \times Y$ называется линейное отношение из $X \times Y$ вида $A + B = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in D(A) \cap \cap D(B), y \in Ax + Bx\}$. $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$. Под $Ax + Bx$ понимается алгебраическая сумма двух множеств Ax и Bx.

Отметим, что для всех $x \in D(A)$ множество Ax представимо в виде $Ax = y + A0$ для любого вектора y из Ax.

Произведением двух линейных отношений $A \subset X \times Y$ и $B \subset Y \times Z$, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $BA = \{(x,z) \in \in X \times Z \mid$ существует вектор y из $D(B)$ такой, что $(x,y) \in A, (y,z) \in B\}$.

Обратным к линейному отношению $A \subset X \times Y$ называется линейное отношение $A^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in A\} \subset Y \times X$.

Каждое линейное отношение $A \subset X \times Y$ является графиком многозначного отображения $\tilde{A} : D(A) \subset X \to 2^Y$, где $\tilde{A}x = Ax \in 2^Y$. В дальнейшем они отождествляются.

Определение 1.1. Отношение $A \in LR(X,Y)$ называется *инъективным*, если $KerA = \{0\}$, и *сюръективным*, если $ImA = Y$.

Заметим, что для любых векторов $x, y \in D(A)$ возможны только два случая :

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 01-01-00408.

1) $Ax = Ay$;

2) $Ax \cap Ay = \varnothing$.

Из условия $KerA = \{0\}$ следует, что $Ax \cap Ay = \varnothing$ для всех $x \neq y$ из $D(A)$.

Множество замкнутых линейных отношений из X в Y обозначим $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X,X)$. Множество линейных замкнутых операторов $LO(X,Y)$, считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то $LO(X) = LO(X,X)$ и $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Итак, $EndX \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Определение 1.2. Пусть $A \in LR(X)$. Замкнутое линейное подпространство $X_0 \subset X$ назовем *инвариантным* относительно отношения A, если для всех векторов $x \in X_0 \cap D(A)$ выполненяется условие $Ax \cap X_0 \neq \varnothing$.

Определение 1.3. Пусть $A \in LR(X), X_0 \subset X, X_0$ — инвариантное относительно A подпространство. *Сужением отношения A на X_0* назовем подпространство из $X_0 \times X_0$ вида $A \cap X_0 \times X_0$. Сужение A_0 отношения A на инвариантное подпространство X_0 обозначим символом $A \mid X_0$.

Отметим, что областью определения сужения A_0 является подпространство $D(A_0) = D(A) \cap X_0$ и $A_0 x = Ax \cap X_0$ для всех $x \in D(A_0)$.

Определение 1.4. Пусть X_0, X_1 — инвариантные подпространства относительно отношения $A \in LR(X)$ и выполнены следующие условия: $X = X_0 \oplus X_1$, $D(A) = (D(A) \cap X_0) \oplus (D(A) \cap X_1)$, $A0 = (A0 \cap X_0) \oplus (A0 \cap X_1)$. В этом случае будем говорить, что отношение A является *прямой суммой отношений* $A_0 = A \mid X_0$ *и* $A_1 = A \mid X_1$ и записывать $A = A_0 \oplus A_1$. При этом множество Ax для любого $x \in D(A)$ определяется формулой

$$Ax = A_0 x_0 + A_1 x_1, x = x_0 + x_1,$$

$x_0 \in D(A_0), x_1 \in D(A_1)$ и Ax — алгебраическая сумма двух множеств $A_0 x_0$ и $A_1 x_1$.

Определение 1.5. *Резольвентным множеством* отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\rho(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(A - \lambda I)^{-1} \in EndX$.

Определение 1.6. *Спектром* линейного отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* линейного отношения A, если $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Любой ненулевой вектор x из $Ker(A - \lambda I)$ называется собственным вектором отношения A, отвечающим собственному значению λ.

Определение 1.7. *Расширенным спектром* отношения $A \in LR(X)$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(A)$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(A)$, если $A \in EndX$. В противном случае полагается $\tilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(A) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(A)$ называют *расширенным резольвентным множеством* линейного отношения A.

Определение 1.8. Будем говорить, что отношение $A \in LR(X)$ обладает свойством *стабилизации степеней на бесконечности*, если существует натуральное число m такое, что

$$A^{m-1}0 \subset A^m 0 = A^{m+1}0,$$

$$D(A^{m-1}) \supset D(A^m) = D(A^{m+1}),$$

где включения являются строгими. Число m называется *порядком стабилизации степеней* отношения A. Если для отношения A верно только одно из выше приведенных равенств, то будем говорить, что A обладает свойством *стабилизации степеней на бесконечности*

– *для пространства* $A0$ — в первом случае,

– *для пространства* $D(A)$ — во втором случае.

Число m будем называть *порядком стабилизации степеней для подпространства* $A0$ и *подпространства* $D(A)$ соответственно.

В дальнейшем m_A и m_D будут обозначать порядок стабилизации степеней на бесконечности для подпространств $A0$ и $D(A)$ соответственно. Число m_S будет обозначать просто порядок стабилизации, и тогда $m_S = m_A = m_D$.

Предположение 1.1. Существует $k \in N$ такое, что для линейного отношения $A \in LR(X)$ следующее равенство

$$D(A^k) \cap A^m 0 = \{0\}$$

верно для любого m из $\mathbb{N}$.

Лемма 1.1. *Пусть для отношения $A \in LR(X)$ выполнено предположение 1.1. Тогда A обладает свойством стабилизации степеней на бесконечности для подпространства $A0$.*

◄ $$A^{k+1}0 = A^k(A0 \cap D(A^k)) = A^k 0.$$ ►

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда $m_A k$, где k — любое число, удов-*

летворяющее равенству из предположения 1.1.

Предположение 1.2. Для отношения $A \in LR(X)$ выполнено предположение 1.1, $A^m 0$ — замкнутое подпространство, где $m = m_A$, и для любого $x \in D(A) \setminus A^m 0$ верно следующее неравенство

$$Ax \cap D(A) \neq \varnothing.$$

Далее во всей работе для рассматриваемых линейных отношений считаются выполненными предположения 1.1 и 1.2.

2. Определение и некоторые свойства фактор-отношений

В данном разделе вводится определение фактор-отношения и рассматриваются некоторые его свойства. В дальнейшем через это понятие определяются факториально-ограниченные и факториально-компактные линейные отношения.

Определение 2.1. Пусть $A \in LR(X)$, $M \subset X$ — инвариантное подпространство относительно A и X/M — фактор-пространство по M. Тогда линейное отношение $\tilde{A} = A/M \in LR(X/M)$, определенное следующими равенствами

$$D(\tilde{A}) = \{\tilde{x} \in X/M : \tilde{x} \cap D(A) \neq \varnothing\},$$

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{A}(x + M) = Ax_1 + M, \ \ x_1 \in (x + M) \cap D(A),$$

будем называть *фактор-отношением.*

Для доказазательства корректности определения 2.1 приведем ряд лемм.

Лемма 2.1. *Пусть $A \in LR(X)$ и $M \subset X$ — инвариантное подпространство относительно A. Тогда для любых $x_1, x_2 \in (x + M) \cap D(A)$, где x — произвольный элемент из X, верно равенство*

$$Ax_1 + M = Ax_2 + M.$$

◄ $$Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = y + A0.$$

Поскольку $x_1, x_2 \in x + M$, то $x_1 - x_2 \in M$, а так как M — инвариантное подпространство относительно A, в выше приведенном неравенстве можно взять $y \in M$. Пусть $y_1 \in Ax_1$ и $y_2 \in Ax_2$, тогда получаем

$$Ax_1 - Ax_2 + M = A0 + M,$$

$$y_1 - y_2 + A0 + M = A0 + M,$$

$$y_1 + A0 + M = y_2 + A0 + M,$$

$$Ax_1 + M = Ax_2 + M.$$ ►

Лемма 2.2. *Пусть X — линейное пространство и $A \subset X \times X$ — бинарное отношение на нем. Определим множества $D(A)$ и Ax, как это делается для линейных отношений. Отношение A является линейным тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:*

1) $D(A)$ — линейное пространство;

2) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ для любых $x_1, x_2 \in D(A)$;

3) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для любых $x \in D(A)$ и $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$.

В [3] приводится подобная лемма с доказательством, однако автор монографии [3] опускает первое условие, полагая, что оно следует из двух последующих. Такой подход, на мой взгляд, нелогичен, поскольку при невыполненном первом условии, второе и третье теряют смысл в некоторых случаях.

Теперь можно перейти к доказательству корректности определения фактор-отношения.

Теорема 2.1. *Определение 2.1 корректно.*

◄ Из леммы 2.1 следует, что $\tilde{A}\tilde{x}$ определено корректно.

Докажем, что $\tilde{A}$ является линейным отношением. Для этого воспользуемся леммой 2.2 и покажем, что выполнены все три ее условия:

1) Пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in D(\tilde{A})$. Тогда $\tilde{x}_1 = x_1 + M$, $\tilde{x}_2 = x_2 + M$, где $x_1, x_2 \in D(A) \cap M$, и $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = = x_1 + x_2 + M$. Так как $x_1 + x_2 \in D(A)$, то $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \in D(\tilde{A})$. Аналогичным образом доказывается, что если $\tilde{x} \in D(\tilde{A})$, то для любого $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha\tilde{x} \in D(\tilde{A})$. Следовательно, $D(\tilde{A})$ - линейное пространство.

2) Пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in D(\tilde{A})$. Тогда $\tilde{x}_1 = x_1 + M$, $\tilde{x}_2 = x_2 + M$, где $x_1, x_2 \in D(A) \cap M$, и $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = = x_1 + x_2 + M$. Получаем

$$\tilde{A}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = A(x_1 + x_2) + M =$$

$$= Ax_1 + M + Ax_2 + M = \tilde{A}\tilde{x}_1 + \tilde{A}\tilde{x}_2.$$

3) Доказывается аналогично 2). ►

Пусть $A \in LR(X)$, M — инвариантное подпространство относительно A, $\tilde{A} = A/M$. Тогда в дальнейшем если $\tilde{x} \in D(\tilde{A})$, то в записи $\tilde{x} = x + M$, x считается элементом $D(A)$.

В следующей теореме приводится важное свойство фактор-отношений (аналог подобного свойства для фактор-операторов), которое позволяет оценить спектр отношения через спектры фактор-отношения и сужения на некоторое инвариантное подпространство.

Теорема 2.2. *Пусть* $A \in LR(X)$, M *— инвариантное подпространство относительно* A, $\tilde{A} = A/M, A_M = A \setminus M$. *Тогда любые два из следующих утверждений влекут третье:*

1) A *— непрерывно обратимо;*

2) $\tilde{A}$ *— непрерывно обратимо;*

3) A_M *— непрерывно обратимо.*

◄ $2), 3) \Rightarrow 1)$. Сюръективность. Пусть $\tilde{y} \in Im\tilde{A}$, следовательно, существует такой $\tilde{x} = x + M \in D(\tilde{A})$, что $\tilde{y} \in \tilde{A}\tilde{x}$. Представим $\tilde{A}\tilde{x}$ в виде

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{A}(x + M) = Ax + M.$$

Очевидно, что $Ax \subset ImA$, а так как A_M — сюръективно, то и $M \subset ImA$. Следовательно, для любого $\tilde{y} \in Im\tilde{A}$, $\tilde{y} = y + M \subset ImA$, где $\tilde{A}$ — сюръективно. Отсюда сразу вытекает, что $ImA = X$.

Инъективность. Пусть $x \in KerA$, т.е. $Ax = A0$. Тогда $\tilde{A}(x + M) = A0 + M$. Из инъективности $\tilde{A}$ следует, что $x \in M \cap KerA$. В свою очередь из инъективности A_M следует, что $x = 0$.

$1), 2) \Rightarrow 3)$. Сюръективность. Предположим противное, что существует $y \in M$, такой, что для любого $x \in D(A_M), y \notin A_M x$. Тогда из сюръективности A следует существование такого $x' \in D(A) \setminus M$, что $y \in Ax' \cap M$. Отсюда вытекает, что $\tilde{A}(x' + M) = A0 + M$, а так как $\tilde{A}$ - инъективно, то $x' \in M$. Получили противоречие.

Инъективность A_M сразу следует из инъективности A.

$1), 3) \Rightarrow 2)$. Сюръективность $\tilde{A}$ сразу следует из сюръективности A.

Инъективность. Пусть $\tilde{x} \in Ker\tilde{A}$, т.е. $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{A}(x + M) = A0 + M$, следовательно, $Ax = A0$ или $Ax \subset M$. В первом случае из инъективности A следует, что $x = 0$, во втором случае из сюръективности A_M и из инъективности A следует, что $x \in M$. Отсюда вытекает, что $\tilde{x} = x + M = M = \tilde{0}$. ►.

Следствие 2.1. *Справедливо следующее включение* $\sigma(A) \subset \sigma(\tilde{A}) \cup \sigma(A_M)$.

◄ Справедливость данного утверждения вытекает из следующих очевидных равенств

$$(A - \lambda I)/M = A/M - \lambda I/M,$$

$$(A - \lambda I) \mid M = A \mid M - \lambda I \mid M,$$

при которых имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$\lambda \in \rho(\tilde{A}) \cap \rho(A_M)$, следовательно $\lambda \in \rho(A)$; $\lambda \notin \sigma(\tilde{A}) \cup \sigma(A_M)$, следовательно $\lambda \notin \sigma(A)$; $\lambda \in \sigma(A)$, следовательно $\lambda \in \sigma(\tilde{A}) \cup \sigma(A_M)$. ►

3. Факториально-ограниченные и факториально-компактные линейные отношения, некоторые свойства

В этой части используются ранее введенные понятия и установленные факты для определения факториально-ограниченных и факториально-компактных линейных отношений, а также описываются их свойства. Напомню, что по лемме 1.1 для рассматриваемых линейных отношений выполнено свойство стабилизации степеней на бесконечности для подпространства $A0$.

Определение 3.1. Пусть $A \in LR(X)$ и $m = m_A$. Линейное отношение A называется *факториально-ограниченным*, если $\tilde{A} = A/A^m 0$ — обычный ограниченный оператор из $L(X/A^m 0)$. Если $\tilde{A} \in L(X/A^m 0)$ — компактный оператор, то A называется *факториально-компактным* линейным отношением.

Символами $LRB(X)$ и $LRC(X)$ мы будем обозначать соответственно множество всех факториально-ограниченных и факториально-компактных линейных отношений на банаховом пространстве X, и тогда $LRC(X) \subset LRB(X)$.

В дальнейшем для любого линейного отношения $A \in LR(X)$ символ $\tilde{A}$ будет обозначать фактор-отношение по подпространству $A^m 0$, т.е. $\tilde{A} = A/A^m 0$, где $m = m_A$.

Следующая лемма описывает важное свойство факториально-ограниченных линейных отношений, которое является ключевым для дальнейшего изложения результатов.

Лемма 3.1. *Пусть* $A \in LRB(X)$ *и* $m = m_A$. *Тогда имеет место равенство*

$$\tilde{A^m} = (\tilde{A})^m$$

◄ Из определения фактор-отношения и из предположения 1.2 следует

$$(\tilde{A})^m (x + A^m 0) = (\tilde{A})^{m-1}(Ax + A^m 0) =$$

$$= (\tilde{A})^{m-2}(A^2 x + A^m 0) = \ldots = A^m x + A^m 0,$$

$$(\tilde{A^m})(x + A^m 0) = A^m x + A^m 0.$$

Из вышеприведенных равенств также вытекает, что области определения равны. ►

Теорема 3.1. *Пусть* $A \in LRB(X)$ *и* $m = m_A$. *Тогда* A *обладает свойством стабилизации степеней на бесконечности, т.е.* $m_A = m_D = m_S$.

◄ Из леммы 3.1 следует

$$D(\tilde{A}^m) = D((\tilde{A})^m) = D(\tilde{A}) = \tilde{X}.$$

По определению

$$D(\tilde{A}^m) = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : x + A^m 0 \cap D(A^m) \neq \varnothing\}.$$

Из двух предыдущих равенств вытекает, что $A^m x \cap D(A^m) \neq \varnothing$ для любого $x \in D(A^m)$. Следовательно,

$$D(A^{2m}) =$$
$$= \{x \in D(A^m) : A^m x \cap D(A^m) \neq \varnothing\} = D(A^m).$$

Из последнего равенства, предположения 1.1 и следствия 1.1 получаем

$$D(A^{m-1}) \supset D(A^m) = D(A^{m+1}),$$

где включение является строгим. ►

Для дальнейшего изложения нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, которые в свою очередь также немаловажны.

Следующая лемма справедлива для всех линейных отношений, вне зависимости от того, выполнены или нет условия из предположений 1.1 и 1.2. Замечу, что подобную лемму можно найти в [1, лемма 2.1], однако определения сужения и прямой суммы линейных отношений, введенные там, видимо, не эквивалентны определениям, которые используются в данной работе.

Лемма 3.2. *Пусть* $A \in LR(X), X = X_1 \oplus X_2$, $A = A_1 \oplus A_2$, *где* X_1, X_2 *— инвариантные относительно* A *подпространства,* $A_1 = A \mid X_1$, $A_2 = A \mid X_2$. *Тогда верны следующие эквивалентные равенства*

$$1)\ \tilde{\sigma}(A) = \tilde{\sigma}(A_1) \cup \tilde{\sigma}(A_2),\ 2)\ \tilde{\rho}(A) = \tilde{\rho}(A_1) \cap \tilde{\rho}(A_2).$$

◄ Докажем 2). Справедливость данного равенства сразу следует из разложения

$$A - \lambda I = (A_1 - \lambda I_{X_1}) \oplus (A_2 - \lambda I_{X_2}),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

и из эквивалентности следующих условий

$1) A \in End X,\ 2) \infty \in \tilde{\rho}(A)$. ►

Лемма 3.3. *Пусть* X *— линейное пространство,* D *и* M *— некоторые подпространства из* X *и* $\tilde{X} = X/M$. *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) $X = M \oplus D$*;*

2) D *и* $\tilde{X}$ *— изоморфны.*

◄ $1) \Rightarrow 2)$ Рассмотрим отображение $F : D \mapsto \tilde{X}$, которое каждый элемент из D переводит в его класс смежности из $\tilde{X}$. Докажем, что это отображение биективно.

Сюръективность. Пусть $\tilde{x} = x + M \in \tilde{X}$. Тогда $x = x_M + x_D, x_M \in M, x_D \in D$ и $\tilde{x} = x_D + x_M + M = x_D + M$, т.е. для каждого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ найдется $x_D \in D$, который в него переходит.

Инъективность. Пусть $x \in Ker F \subset D$, следовательно, $x \in D \cap M = \{0\}$.

$2) \Rightarrow 1)$ Пусть $x \in X$ лежит в классе $\tilde{x} = x' + M$, где x' - единственный элемент из $\tilde{x} \cap D$. Тогда $x = x' + x_M, x_M \in M$. Очевидно, что данное представление единственно. ►

Лемма 3.4. *Пусть* $A \in LRB(X)$, $\tilde{X} = X/A^m 0$, $X_0 = D(A^m)$, *где* $m = m_S$. *Тогда пространства* $\tilde{X}$ *и* X_0 *изометрически изоморфны.*

◄ Рассмотрим отображение $F : X_0 \mapsto \tilde{X}$, которое каждый элемент из X_0 переводит в его класс смежности из $\tilde{X}$. Докажем, что это отображение биективно.

Сюръективность. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что для любого $x \in X$, $x + A^m 0 \cap D(A^m) \neq \varnothing$, что эквивалентно сюръективности отображения F.

Инъективность. Пусть $x \in Ker F \subset X_0$, следовательно, $x \in D(A^m) \cap A^m 0 = \{0\}$ (по предположению 1.1).

Изоморфизм будет изометрическим, если наделить пространство $\tilde{X}$ следующей нормой — для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}, \|\tilde{x}\| = \|x'\|$, где x' — единственный элемент из $\tilde{x} \cap X_0$. ►

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия леммы и* $\tilde{A} = A/A^m 0, A_0 = A \mid X_0$. *Тогда операторы* $\tilde{A}$ *и* A_0 *— подобны.*

◄ Справедливость данного утверждения сразу следует из леммы и из того факта, что X_0 — инвариантное подпространство относительно A. ►

Теорема 3.2. *Пусть* $A \in LRB(X) \setminus LO(X)$, $X_0 = D(A^m), X_\infty = A^m 0, A_0 = A \mid X_0, A_\infty = A \mid X_\infty$, $m = m_S$. *Тогда* A *обладает следующими свойствами:*

1) $X = X_0 \oplus X_\infty, A = A_0 \oplus A_\infty$*;*

2) $A_0 \in End X_0$, *причем если* A *— факториально-компактное линейное отношение, то* A_0 *— компактный оператор из* $End X_0$*;*

3) $A_\infty^{-1} \in End X_\infty, (A_\infty^{-1})^m = 0$ *и* $(A_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$*;*

◄ 1) следует из лемм 3.4 и 3.3.

2) вытекает из следствия 3.1.

3) следует из 1) и из [4, теорема 2.1]. ►

4. Спектральные свойства факториально-ограниченных и факториально-компактных линейных отношений.

Следующая теорема описывает общий вид спектра факториально-ограниченных линейных отношений.

Теорема 4.1. *Пусть* $A \in LRB(X) \setminus LO(X)$, $X_0 = D(A^m), X_\infty = A^m 0, A_0 = A \mid X_0, A_\infty = A \mid X_\infty$, $m = m_S$. *Тогда* A *обладает следующими спектральными свойствами:*

1) $\tilde{\sigma}(A_\infty) = \{\infty\}$;

2) $\sigma(A) = \sigma(A_0), \tilde{\sigma}(A) = \sigma(A_0) \cup \{\infty\}$.

◄ 1) следует из пункта 3 теоремы 3.2 и из [1, следствие 2.5].

2) следует из 1) и из леммы 3.2. ►

Для более подробного описания спектра факториально-ограниченных линейных отношений нам понадобится следующее определение.

Определение 4.1. Пусть $A \in LRB(X)$, $\tilde{X} = X/A^m 0$ и $\tilde{A} = A/A^m 0$. Зададим на множестве факториально-ограниченных линейных отношений функционал f, определенный следующим равенством $f(A) = \|\tilde{A}\|_{End\tilde{X}}$, который мы будем обозначать $\|A\|_f$.

Лемма 4.1. *Пусть* $A \in LRB(X)$, $X_0 = D(A^m)$ *и* $A_0 = A \mid X_0$, *где* $m = m_S$. *Тогда* $\|A\|_f = \|A_0\|_{EndX_0}$.

◄ Данное равенство сразу вытекает из следствия 3.1. ►

Теорема 4.2. *Пусть* $A \in LRB(X)$ *и для некоторого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *выполнено неравенство* $|\lambda| > \|A\|_f$, *тогда* $\lambda \in \rho(A)$.

◄ Из пункта 2 теоремы 4.1 следует, что $\rho(A) = \rho(A_0)$, а по лемме 4.1 $\|A\|_f = \|A_0\|_{EndX_0}$. Поэтому достаточно показать, что $\lambda \in \rho(A_0)$, как только $|\lambda| > \|A_0\|_{EndX_0}$. Доказательство данного утверждения можно найти в [5, глава 4, § 5, теорема 7]. ►

Иначе говоря, спектр факториально-ограниченного линейного отношения A содержится в круге радиуса $\|A\|_f$ с центром в нуле. Отсюда также следует, что $\sigma(A)$ — компактное множество.

Спектр факториально-компактных линейных отношений допускает еще более полное описание.

Теорема 4.3. *Пусть* $A \in LRC(X)$. *Тогда* A *обладает следующими свойствами:*

1) Если $\lambda \in \sigma(A)$ *и* $\lambda \neq 0$, *то* λ *является собственным значением отношения* A *и* $dimKer(A - \lambda I) < \infty$;

2) Если для $m = m_S$, $dimD(A^m) = \infty$, *то* $0 \in \sigma(A)$;

3) Число собственных значений отношения A, *для которых выполняется неравенство* $|\lambda| > \delta > 0$, *всегда конечно, т.е. множество* $\sigma(A)$ *не более чем счетно и не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки* 0.

◄ Так как по теореме 4.1 $\sigma(A) = \sigma(A_0)$, то данные утверждения достаточно доказать для спектра оператора $A_0 = A \mid D(A^m)$, где $m = m_S$. Из пункта 2 теоремы 3.2 следует, что A_0 — компактный оператор. Доказательства выше перечисленных свойств для спектра компактного опрератора можно найти в [6, теоремы 4.18 и 4.25] и в [5, глава 4, § 6, теорема 4].

Таким образом, по своим спектральным свойствам факториально-ограниченные и факториально-компактные линейные отношения очень близки соответственно к ограниченным и компактным линейным операторам. ►

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. // Матем. сб. 2002 Т. 193, 11, С. 3—35.

2. *Баскаков А.Г.* Лекции по алгебре. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2001.

3. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

4. *Загорский А.С., Хатько В.В.* О некоторых свойствах линейных отношений на конечномерных линейных пространствах. // Вестник ВГУ. 2002. Серия физика, математика. Выпуск 2.

5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

6. *Рудин У.* Функциональный анализ. «Меркурий-ПРЕСС», 2000.