УДК 517.984

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2003 М. С. Гуровская

Воронежский государственный университет

С помощью метода подобных операторов получены оценки собственных значений одного класса дифференциальных операторов.

В статье рассматривается гильбертово пространство вектор-функций $L_2 = L_2((-1,1),\mathbb{C}^2)$, определенных на отрезке [-1,1] со значениями в $\mathbb{C}^2$ суммируемых с квадратом нормы. При этом скалярное произведение имеет вид

$$(U,V) = \int_{-1}^{1}(U_1(t)\overline{V_1(t)} + U_2(t)\overline{V_2(t)})dt,$$

если $U = (U_1,U_2)$, $V = (V_1,V_2) \in L_2$.

Основным объектом изучения является дифференциальный оператор $\mathcal{L} : D(L) \subset L_2 \to L_2 = L_2((-1,1),\mathbb{C}^2)$, определяемый дифференциальным выражением

$$lV = (-\frac{dV_1}{dx} + C(x)V_1 + d_1V_2, \frac{dV_2}{dx} + C(x)V_2 + d_2V_1),$$

где $V = (V_1,V_2) \in L_2$ и

$$C(x) = \begin{cases} C_1, & x \in [-1,0], \\ C_2, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Его область определения $D(\mathcal{L})$ задается краевыми условиями

$$V_1(-1) = r_1V_2(-1),$$

$$V_2(1) = r_2V_1(1),$$

где $r_1, r_2, C_1, C_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$.

Определение 1. Два линейных оператора $\mathcal{L}_i : D(\mathcal{L}_i) \subset H \to H, i = 1,2,$ здесь H −гильбертово пространство) называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in EndH$ (где $EndH$ − банахова алгебра линейных ограниченных операторов), такой что $UD(\mathcal{L}_2) = D(\mathcal{L}_1)$ и $\mathcal{L}_1Ux = U\mathcal{L}_2x,\ \forall x \in D(\mathcal{L}_2)$. Такой оператор U называется оператором преобразования оператора $\mathcal{L}_1$ в оператор $\mathcal{L}_2$.

Отметим, что подобные операторы обладают рядом одинаковых свойств. Наиболее важные выносятся в следующую лемму, утверждения которой вытекают из определения подобных операторов.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{L}_i : D(\mathcal{L}_i) \subset H \to H, i = 1,2$ подобные операторы и $U \in EndH$ — оператор преобразования оператора $\mathcal{L}_1$ в оператор $\mathcal{L}_2$. Тогда

1) $\sigma(\mathcal{L}_1) = \sigma(\mathcal{L}_2), \sigma_d(\mathcal{L}_1) = \sigma_d(\mathcal{L}_2), \sigma_c(\mathcal{L}_1) = \sigma_c(\mathcal{L}_2)$, где $\sigma_d(\mathcal{L}_i), \sigma_c(\mathcal{L}_i), i = 1,2$ дискретный и непрерывный спектры оператора $\mathcal{L}_i$;

2) если оператор $\mathcal{L}_2$ допускает разложение относительно прямой суммы $H = H_1 \oplus H_2$, то оператор $\mathcal{L}_1$ допускает разложение относительно прямой суммы $H = UH_1 \oplus UH_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $H = H_1 \oplus H_2$ (т.е. $H_1 = RanP$, $H_2 = KerP$), то проектор P', осуществляющий разложение $H = UH_1 \oplus UH_2$ определяется формулой $P' = UPU^{-1}$.

Преобразуем исследуемый оператор $\mathcal{L}$ в другой подобный ему оператор $\mathcal{L}_0$ с помощью обратимого оператора $U \in EndL_2$ вида

$$U\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = (\phi_1V_1, \phi_2V_2),$$

где функции $\phi_1, \phi_2 : [-1,1] \to \mathbb{C}$ имеют вид

$$\phi_1(x) = \begin{cases} e^{\frac{C_1-C_2}{2}x}e^{-\frac{a+ib}{4}x}\sqrt{r_1r_2}e^{C_1-C_2}, & x \in [-1,0] \\ e^{\frac{C_2-C_1}{2}x}e^{-\frac{a+ib}{4}x}\sqrt{r_1r_2}e^{C_1-C_2}, & x \in [0,1], \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} e^{\frac{C_2-C_1}{2}x}e^{\frac{a+ib}{4}x}r_2, & x \in [-1,0], \\ e^{\frac{C_1-C_2}{2}x}e^{\frac{a+ib}{4}x}r_2, & x \in [0,1], \end{cases}$$

где $r_1r_2 = e^{a+ib}$.

В результате простых вычислений получаем, что оператор $\mathcal{L}$ переводится преобразованием подобия U в оператор $\mathcal{L}_0$, определяемый дифференциальным выражением

$$l_0 V = (-\frac{dV_1}{dx} + \phi_1^{-1}\phi_2 d_1 V_2, \frac{dV_2}{dx} + \phi_1\phi_2^{-1} d_2 V_1), V = (V_1, V_2)$$

и краевыми условиями

$$V_1(-1) = V_2(-1),$$

$$V_2(1) = V_1(1).$$

Оператор $\mathcal{L}_0$ представим в виде $\mathcal{L}_0 = A - B$, где дифференциальный оператор $A : D(A) = D(\mathcal{L}_0) \subset L_2 \to L_2$ имеет вид

$$A\,V = \left(-\frac{dV_1}{dx}, \frac{dV_2}{dx}\right), V = (V_1, V_2) \in D(A),$$

и B ограниченный оператор умножения на матричную функцию

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_1^{-1}\phi_2 d_1 \\ \phi_1\phi_2^{-1} d_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $i^{-1}A$ является самосопряженным оператором (A − кососамосопряженный) с дискретным спектром (с компактной резольвентой). Его собственными значениями являются числа $\lambda_n = \frac{i\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ и соответствующими собственными функциями являются следующие нормированные пары функций

$$e_k(x) = (e^{-i\pi kx}, e^{i\pi kx})/2, \text{ если } n = 2k$$

$$e_k(x) = (-e^{-i\pi kx - i\pi x/2}, e^{i\pi kx + i\pi x/2})/2, \text{ если } n = 2k+1.$$

Таким образом, все собственные значения оператора A простые и указанные собственные функции образуют ортонормированный базис в L_2.

Тем самым созданы все необходимые предпосылки применения метода подобных операторов (при определенных ограничениях на B, которые будут указаны позже), когда в качестве невозмущенного оператора будет выступать оператор A, а B играть роль возмущения.

Приведем результат из метода подобных операторов (см. [1]) и временно будем считать, что $A : D(A) \subset H \to H$ — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, а $B \in EndH$. Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ — самосопряженный оператор с дискретным спектром. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ — простые собственные значения оператора A и $e_1, e_2, \cdots, e_n \cdots$ — соответствующие собственные векторы, причем

$$d = \inf_{i \neq j}(\lambda_i - \lambda_j) > 0.$$

Далее все операторы считаются заданными своими матрицами в базисе $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$. Пусть P_i — проектор Рисса, построенный по одноточечному спектральному множеству $\{\lambda_i\}$ оператора A и $P_i x = (x, e_i)e_i, x \in H$.

Рассмотрим два оператора: оператор диагонализации $J : EndH \to EndH$, задаваемый формулой

$$JX = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P_i X P_i,$$

и $\Gamma : EndH \to EndH$, определяемый для любого $X \in EndH$ как единственное решение, удовлетворяющее условию $J(\Gamma X) = 0$, операторного уравнения

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX.$$

Заметим, что если оператор $X \in EndH$ имеет матрицу $(x_{ij}) = (Xe_j, e_i)$, то

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} x_{ii}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}, & (JX)_{ij} = 0, \\ 0, & (JX)_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

Известно, что $\|J\| = 1$ и если A — самосопряженный оператор, то

$$\|\Gamma\| \leq \frac{\pi}{2d}.$$

Теорема 1. Если возмущение $B \in EndH$ и выполнено условие $4\|B\|\|\Gamma\| < 1$, то оператор $A - B$ подобен оператору диагональной структуры $A - JX$ и имеет место равенство

$$(A - B)(I - \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A - JX),$$

где оператор X есть решение нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - \Gamma X J X + B, \qquad (1)$$

и может быть найден методом последовательных приближений, начиная с $X_0 = 0, X_1 = B, \cdots$

Вернемся к рассмотренному выше оператору $\mathcal{L}_0$, который представим в виде $\mathcal{L}_0 = A - B$. Имеет место следующая

Теорема 2. Если выполнено условие

$$\max\left\{\max_{x \in [-1,0]}(e^{(C_2 - C_1 + \frac{a}{2})x}\, \frac{d_1 e^{C_2 - C_1}\sqrt{r}_2}{\sqrt{r}_1} + \right.$$
$$+ e^{(C_1 - C_2 - \frac{a}{2})x}\, \frac{d_2 e^{C_1 - C_2}\sqrt{r}_1}{\sqrt{r}_2}),$$

$$\max_{x\in[0,1]}(e^{(C_1-C_2+\frac{a}{2})x}\,\frac{d_1 e^{C_2-C_1}\sqrt{r}_2}{\sqrt{r}_1}+$$
$$\left.++e^{(C_2-C_1-\frac{a}{2})x}\,\frac{d_2 e^{C_1-C_2}\sqrt{r}_1}{\sqrt{r}_2})\right\}<\frac{1}{4},$$

то оператор $A-B$ подобен оператору диагональной структуры $A-JX$, где X − решение нелинейного уравнения (1) и может быть найден методом последовательных приближений, начиная с $X_0=0$.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 собственные значения $\{\tilde{\lambda}_n, n\in\mathbb{Z}\}$ оператора $\mathcal{L}$ допускают оценки вида

$$\left|\tilde{\lambda}_n-\frac{i\pi n}{2}\right|\le |b_{nn}|+\left|\sum_{j=-\infty, j\ne n}^{+\infty}\frac{2b_{nj}b_{jn}}{i\pi(j-n)}\right|+\frac{1}{16}. \qquad (2)$$

Доказательство. Из теорем 1 и 2 следует, что $\sigma(\mathcal{L})=\sigma(A-JX)$. Из вида оператора J получаем, что

$$\tilde{\lambda}_n=((A-JX)e_n,e_n), n\in Z.$$

Поэтому

$$\tilde{\lambda}_n=\frac{i\pi n}{2}-(JXe_n,e_n)=\frac{i\pi n}{2}-(Xe_n,e_n)=$$
$$=\frac{i\pi n}{2}-(B\Gamma Xe_n,e_n)-(Be_n,e_n)=$$
$$=\frac{i\pi n}{2}-(B\Gamma(B\Gamma X)e_n,e_n)-(B\Gamma Be_n,e_n)-(Be_n,e_n).$$

Откуда получаем (2), ч.т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.