УДК 517.9

УГЛОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ[1]

© 2003 А. В. Гнездилов*, Ю. И. Сапронов, О.В. Швырёва

**Военный институт радиоэлектроники*
Воронежский государственный университет

Изложены результаты анализа новых типов угловых особенностей фредгольмова функционала на банаховом многообразии (особенностей в точке края, заданного ограничениями в виде неравенств $g_k \geq 0$, $k = 1, ..., m$). Исследования основаны на методе конечномерной редукции и стандартных подходах теории особенностей гладких функций, связанных с использованием диаграмм Ньютона, нормальных форм особенностей, версальных деформаций и т.п. Получены описания каустик и *bif*-раскладов рассмотренных особенностей. Результаты применены к задаче о посткритических формах равновесий упругого стержня при наличии интегральных ограничителей в виде неравенств.

Введение

Развитие аналитических и топологических методов для изучения поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек края банахова многообразия представляет интерес как для теории особенностей гладких функционалов, так и для «соседних» областей науки — теории управления, теории фазовых переходов и т.п.

Угловые особенности функций на конечномерных многообразиях были введены Д. Сирсмой [1] как обобщение краевых особенностей, ранее введенных и изученных В. И. Арнольдом [2], [3]. Д. Сирсма установил при этом, что список простых угловых особенностей получается вложением списка простых краевых особенностей.

Среди унимодальных угловых особенностей имеются такие, которые не имеют прямых налогов в краевом случае (например, особенность $x^2 + y^2 + axy$ в вершине положительного квадранта на координатной плоскости). Более сложные примеры угловых особенностей (высокой модальности) и их приложений были рассмотрены в [4].

В [5] дана полная классификация *bif*-раскладов в полурегулярных точках минимума на вершинах трехгранных углов, полученная при решении задачи о ветвлении критических торов для функций с поликруговой симметрией, там же описаны характерные плоские сечения соответствующих каустик.

Анализ бифуркаций в обычных (некраевых) критических точках эффективно осуществляется на основе схем конечномерной редукции [6—9]. Аналогичный подход применим и в угловых точках [9—20], но при этом возникает необходимость подбора ключевых параметров, согласованных с неравенствами, задающими угол. В [4] была предложена естественная идея включения системы ограничителей в систему угловых параметров. В данной статье используется эта же идея.

Первый шаг в изучении любой особенности — определение и вычисление мод бифуркации $\{e_j\}_{j=1}^n$, что в конечном итоге дает возможность представления любой ветви бифурцирующих экстремалей в форме

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + o(\xi), \tag{0.1}$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ — ветвь критических точек ключевой функции (зависящих от закритического приращения «управляющего параметра»).

В анализе обычных критических точек моды бифуркации чаще всего определяются как собственные функции главной части оператора Гессе (производной Фреше градиента) в заданной критической точке. В угловых же точках выбор мод менее очевиден.

Вслед за построением бифуркационных мод в полный рост встает задача построения и анализа нормальной формы ключевой функции. Основу для ее решения дают схемы конечномерных редукций [9], [11] и конструкции теории особенностей гладких функций [3].

[1] Работа выполнена при поддержке фонда «Университеты России» (грант У.Р. 04.01.008)

1. Редукции угловых особенностей фредгольмовых функционалов

1.1. Редуцирующие схемы

Пусть E, F — банаховы пространства и $f: E \longrightarrow F$ — фредгольмово отображение нулевого индекса, $E \subset F \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Предположим, что вложения $E \subset F \subset \mathcal{H}$ непрерывны и E плотно в $\mathcal{H}$. Отображение f называется потенциальным, если существует такой гладкий функционал V на E (потенциал отображения f), что $f = grad_H V$, то есть $\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle_H$, $x, h \in E$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$). Уравнение

$$f(x) = 0 \qquad (1.2)$$

в этом случае называется потенциальным.

Точка $a \in E$ называется *экстремалью или критической точкой гладкого функционала* $V(x)$, заданного на банаховом пространстве E, если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h \rangle_H = 0 \quad \forall\, h \in E.$$

Вследствие плотности E в H последнее соотношение влечет равенство $f(a) = 0$. Таким образом, множество решений уравнения (1.2) и множество критических точек функционала V совпадают.

Если $f(x, \lambda): E \times \mathbf{R}^q \to F$ — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от параметра λ, и если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то $V(\cdot, \lambda)$ гладко зависит от данного параметра.

Иногда поведение функционала изучается при ограничениях на основную переменную в виде m неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих m-*гранный угол*:

$$\mathcal{C} = \{x \in E \mid g_j(x) \geq 0, j = 1, \ldots, m\}.$$

В случае $m = 1$ (одного неравенства) получаем так называемую краевую особенность. Точка $a \in \mathcal{C}$ называется *условно критической* для гладкого функционала $V(x, \lambda)$, если $grad_{\mathcal{H}} V(0)$ ортогонален грани $\mathcal{C}$, содержащей a. Число элементов носителя

$$supp(a) = \{k \in \{1, \ldots, m\} \mid g_k(a) \neq 0\}$$

(приведенная размерность минимальной грани угла, содержащей эту точку) называется *порядком* точки a.

Анализ поведения $V(x, \lambda)$ можно проводить на основе перехода к функции $W(\xi) :=$ $:= \inf\limits_{x: g(x) = \xi} V(x)$ в какой−либо схеме конечномерной редукции. Здесь $g(x) = (g_1, \ldots, g_n)^\top$, $\{g_j\}_{j=1}^n$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя семейство ограничителей $\{g_k\}_{k=1}^m$ (определяющих угол). Функционалы $g_j(x)$ подчинены, как правило, дополнительным условиям технического характера. В данной статье предполагается, что

$$grad_{\mathcal{H}} g_j(x) \in F \quad \forall x \in E.$$

Предполагается также, что вблизи нуля в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует единственная (морсовская) экстремаль $\varphi(\xi)$. Подмногообразие $\mathcal{N}$, состоящее из точек $\varphi(\xi)$, называется редуцирующим.

Ключевая функция представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

1.2. Многообразие катастроф и каустика

Пусть $\hat{M} \in E \times \mathbf{R}^q$ — многообразие катастроф, то есть $\hat{M} = M_0 \cup M_1 \ldots \cup M_m$, где M_k определяется соотношениями:

$$f(x, \lambda) = 0, x \in C_k, dim\, Ker \frac{\partial [f]_k}{\partial x}(x, \lambda) > 0.$$

Здесь $\mathcal{C}_k$ — совокупность граней угла $\mathcal{C}$ приведенной размерности k, $\mathcal{C}_0$ — вершинная грань угла, а $[f]_k = grad_{\mathcal{H}}(V|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика Σ определяется как образ многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi: E \times \mathbf{R}^q \longrightarrow \mathbf{R}^q: \quad \Sigma = \pi(\hat{M})$.

Если известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый bif − расклад можно описать матрицей $L = \begin{pmatrix} l_0^0 & \ldots & l_d^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_0^m & \ldots & l_d^m \end{pmatrix}$, в которой элемент l_i^j совпадает с количеством критических точек (углового) индекса j на i-мерных (в приведенном смысле) гранях.

Как обычно, версальные деформации угловых особенностей содержат информацию о всех метаморфозах, происходящих при всевозможных гладких деформированиях функции — о перестройках поверхностей уровня, расклейках и склейках особых точек, о различных бифуркационных эффектах и т.д., и поэтому они играют центральную роль в теории угловых особенностей (как и в теории обычных особенностей [3]).

В угловом случае версальная деформация определяется как функция $V(x,\lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(x,0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(V)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(V)$, то деформация называется миниверсальной. Если вместо кольца ростков гладких функций использовать максимальный (в нем) идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(V)$. Деформация $V(x,\lambda)$, для которой $V(x,0)=0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(x,0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(V)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустику).

Каустика разбивает базу ограниченной миниверсальной деформации на ячейки, каждой из которых отвечает единственный bif-расклад.

В бифуркационном анализе угловой особой точки выделяются, как и в обычной теории, следующие две основные задачи: 1) описание геометрического строения (главной) каустики и 2) описание bif-раскладов, соответствующих компонентам связности дополнения к каустике (в базе ограниченной миниверсальной деформации).

1.3. Моды бифуркации

Пусть, как и выше, g — редуцирующее отображение. Рассмотрим редуцирующее подмногообразие $\mathcal{N}$, состоящее из условных экстремалей $\varphi(\xi)$ функционала V на подмногообразиях $\mathcal{M}_\xi := g^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ называется маргинальным [9]. Без ущерба для общности можно предположить, что исходная угловая критическая точка нулевая.

Пусть N — линейная оболочка системы градиентов ограничителей в нуле:

$$N := Lin(\{grad\ g_1(0),\dots,grad\ g_m(0)\}$$

и пусть $\tilde{N} := A^{-1}(N)$, где $A := \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ — оператор Гессе в нуле. Пусть, далее, $e_1,\dots,e_n$ — ортонормированный в энергетической метрике $\langle x,y\rangle_1 := \langle \bar{A}(x),y\rangle$ (оператор $\bar{A}$ задан соотношением $\bar{A}(u+v) := u + A(v), u \in Ker\ A, v \perp Ker\ A$) базис подпространства $\tilde{N}$, построенный при условии, что его первые r векторов задают базис ядра оператора A: $Lin\{e_1,\dots,e_r\} = Ker\ A$.

Теорема 1.1. *Подпространство $\tilde{N}$ является касательным к редуцирующему подмногообразию $\mathcal{N}$ в нуле.*

Доказательство. Условная экстремаль функционала V на подмногообразии $\mathcal{M}_\xi$ является решением (единственным вблизи нуля) уравнения

$$P_x \cdot f(x) = 0,$$

где P_x — ортогональный проектор на касательное подпространство в точке $x \in \mathcal{M}_\xi$ к подмногообразию $\mathcal{M}_\xi$. Следовательно, верно тождество

$$P_{\varphi(\xi)} \cdot f(\varphi(\xi)) = 0.$$

Продифференцировав это тождество в нуле, легко убедиться, что образ дифференциала маргинального отображения совпадает с прообразом нуля оператора $P_0 \cdot A$ или, что равносильно, с прообразом подпространства $\tilde{N}$ относительно A. Что и требовалось доказать.

Теорема 1.2. *Существует такое диффеоморфное преобразование координат в пространстве ключевых параметров, что после его применения к редуцирующему отображению g (заменой образа) для маргинального отображения реализуется представление (0.1) с коэффициентами $e_1,\dots,e_n$ в линейной части, задающими заранее выбранный базис в $\tilde{N}$. Слагаемое $o(\xi)$ при этом (в (0.1)) ортогонально $\tilde{N}$ (в энергетической метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$).*

Доказательство. Для редуцирующего подмногообразия $\mathcal{N}$ рассмотрим параметризацию вида

$$\gamma(\xi) = \sum_k \xi_k e_k + \alpha(\xi), \alpha(\xi) = o(\xi), \alpha(\xi) \perp \tilde{N}$$

(соотношение ортогональности задано в энергетической метрике). Очевидно, что отображение $\psi := g\cdot\gamma$ является локальным диффеоморфизмом пространства ключевых параметров. После замены $\xi \mapsto \psi(\xi)$ (образа редуцирующего отображения) получим отображение $p = \psi^{-1}\cdot g$, для которого $p(\gamma(\xi)) \equiv \xi$. Следовательно, после замены редуцирующего отображения g на p отображение γ становится маргинальным. Так как для него выполняется представление (0.1), то справедливость утверждения теоремы установлена.

Замечание 1.1. *В случае линейных ограничителей имеет место соотношение* $g \cdot \alpha = 0$ *и, следовательно, диффеоморфизм* ψ *является линейным.*

2. Полурегулярные угловые особенности

2.1. Особенности с симметрией параллелепипеда

Угловые экстремали появляются не только в вариационных задачах с полуограничениями, но и в вариационных задачах с симметриями [1], [4], [5].

Ниже описаны расклады бифурцирующих морсовских экстремалей параметрического семейства гладких фредгольмовых функционалов $V(x,\lambda)$ из нулевой особой экстремали при условии, что функционал $V(x,0)$ инвариантен относительно некоторой системы коммутирующих инволюций, задающих на ядре его второго дифференциала полусвободное действие группы симметрии параллелепипеда (то есть нуль — единственная неподвижная точка).

Дополнительные условия заданы так, что редукция приводит к задаче анализа экстремалей в окрестности нуля для функции n переменных, представляющей собой возмущение m-мерной сборки, четной по каждой переменной. Анализ такой функции эквивалентен анализу полурегулярной угловой особенности.

Напомним, что многообразием размерности n с m-мерным углом ($m \le n$) называется гладкое вещественное n-мерное многообразие с набором из m неособо пересекающихся гладких гиперповерхностей. Локально (в окрестности угловой точки) такое многообразие устроено как пространство $\mathbf{R}^n$ с выделенным в нем семейством гиперплоскостей

$$\mathbf{R}^n_j = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_j = 0\}, j = 1, \ldots, m$$

(здесь x_j — j-я координата точки x). Случай одной гиперплоскости ($m = 1$) называется многообразием с краем. Множество

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_j \ge 0, j = 1, \ldots, m\}$$

называется *m-гранным углом.* Точка $a \in \mathcal{C}$ называется *условно критической* для гладкой функции W в $\mathbf{R}^n$, если $grad\, W(a)$ ортогонален наименьшей грани $\mathcal{C}$, содержащей a. Число элементов носителя

$$supp(x) = \{k \in \{1, \ldots, m\} \mid x_k \ne 0\}$$

(приведенная размерность минимальной грани угла, содержащей эту точку) называется *порядком* точки a. *Кратностью* $\hat{\mu}$ условно критической точки $a \in \mathcal{C}$ называется размерность фактор-алгебры

$$\hat{Q}(W,a) = \mathbf{R}[[x-a]]/\hat{\mathfrak{A}}(W,a),$$

где $\mathbf{R}[[x-a]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $x-a$, а $\hat{\mathfrak{A}}(W,a)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbf{R}[[x-a]]$, порожденный двумя следующими наборами функций:

$$\left\{\frac{\partial W}{\partial x_j}\right\}_{j \in supp(a)}, \left\{x_k \frac{\partial W}{\partial x_k}\right\}_{k \notin supp(a)}$$

Точка, для которой $\hat{\mu} = 1$, называется *простой* или *регулярной.* Пусть

$$K = \{1, \ldots, m\} \setminus supp(a).$$

Через $\mu_K(W,a)$ обозначается (обычная) кратность в точке a ограничения $W|_{\mathbf{R}^n_K}$, $\forall K \in \{1, \ldots, m\} \setminus supp(a)$, где

$$\mathbf{R}^n_K = \bigcap_{k \in K} \mathbf{R}^n_k.$$

Нерегулярная условно критическая точка a, для которой

$$\mu_K \le 1 \quad \forall K \in \{1, \ldots, m\} \setminus supp(a),$$

называется *полурегулярной.*

Если $supp(a) = \phi$ и a — полурегулярная условно критическая точка для W, то угловой заменой координат (посредством локального диффеоморфизма пары $(\mathbf{R}^n, \mathcal{C}) \to (\mathbf{R}^n, \mathcal{C})$, преобразующего каждую грань $\mathcal{C}$ на себя) функция W приводится к нормальной форме

$$W(x) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k x_k^2 + \\ + \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_q \le m, q \ge 2} a_{k_1,\ldots,k_q} x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_q} + \sum_{p=m+1}^{n} \sigma_p x_p^2, \quad (2.4)$$

где $\sigma_k \in \{-1, 1\}$.

Каноническая миниверсальная деформация особенности W в нуле задается разверткой

$$W(x,\lambda) = W(x) + \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_q \le m, q \ge 0} \lambda_{k_1,\ldots,k_q} x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_q}, \quad (2.5)$$

$\lambda = \{\lambda_{k_1,\ldots,k_q}\}$. Доказательство этих утверждений можно осуществить либо непосредственно [1], либо сведением к их эквивариантным аналогам [23].

Для полурегулярной особенности можно положить, без ущерба для общности, $m = n$ и $a = 0$.

Если $\hat{\mathbf{R}}^n$ — пространство с координатами $y_1, \ldots, y_n$, 2^m-листно накрывающее $\mathcal{C}$ посредством отображения

$$\pi : \hat{\mathbf{R}}^n \to \mathbf{R}^n, \pi(y) = (y_1^2, \ldots, y_m^2, y_{m+1}, \ldots, y_n)^T,$$

то $W(x)$ поднимается в $\hat{\mathbf{R}}^n$ формулой $\hat{W}(y) = \hat{W}(y) = W(\pi(y))$. Функция $\hat{W}$ инвариантна относительно инволюций $J_1, \ldots, J_m$ (J_k изменяет знак в k-й координате). Угловому диффеоморфизму

$$\varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$$

однозначно соответствует диффеомрфизм

$$\hat{\varphi} : \left(\hat{\mathbf{R}}^n, 0\right) \to \left(\hat{\mathbf{R}}^n, 0\right),$$

эквивариантный относительно $J_1, \ldots, J_m$, для которого

$$\hat{\varphi}(\hat{\mathcal{C}}) \subset \hat{\mathcal{C}}, \ \ \varphi\pi = \pi\hat{\varphi}$$

(здесь $\hat{\mathcal{C}} = \{x \in \hat{\mathbf{R}}^n \mid y_j \geq 0, j = 1, \ldots, m\}$. Таким образом угловые особенности отождествляются с $\{J_1, \ldots, J_m\}$-эквивариантными [1], [3]. При $m = n$ форме (2.4) соответствует инвариантная n-мерная сборка:

$$\hat{W}(y) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k y_k^4 + \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_q \leq m, q \geq 2} a_{k_1, \ldots, k_q} y_{k_1}^2 \cdot \ldots \cdot y_{k_q}^2, \quad (2.6)$$

а форме (2.5) — развертка

$$\hat{W}(y) + \sum_{k=1}^{m} \sigma_k y_k^4 + \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_q \leq m} \lambda_{k_1, \ldots, k_q} y_{k_1}^2 \cdot \ldots \cdot y_{k_q}^2, \quad (2.7)$$

задающая миниверсальную деформацию особенности (0.1) в классе функций, инвариантных относительно абелевой группы $\mathbf{Z}_2^m$, порожденной инволюциями J_k, $k = 1, \ldots, m$.

При таком отождествлении регулярные условно критические точки функции W соответствуют (обычным) регулярным критическим точкам функции $\hat{W}$. У соответствующих друг другу критических точек совпадают индексы Морса (под *индексом Морса* регулярной условно критической точки $a \in \mathcal{C}$ подразумевается обычный индекс Морса ограничения

$$W\mid_{\mathbf{R}_K^n}, K = \{1, \ldots, m\} \setminus supp(a),$$

сложенный с количеством отрицательных первых производных W в точке a). Ясно, что при этом отождествляются бифуркационные диаграммы угловой и $\mathbf{Z}_2^m$-эквивариантной особенностей.

2.2. Каустика полурегулярной угловой особенности

Пусть Σ — каустика (бифуркационная диаграмма функций без стратов Максвелла) для угловой особенности функции W в полурегулярной условно критической точке $a = 0$, то есть Σ — росток в нуле множества тех значений параметра в базе ограниченной миниверсальной деформации $W(x, \lambda)$ (полученной, например, из (2.5) ограничением $W(x, \lambda) \equiv 0$), для которых $W(\cdot, \lambda)$ имеет вырожденную условно критическую точку. Рассмотрим множество N_K, состоящее из тех $(x, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{\hat{\mu}-1}$, для которых

$$x_j = \frac{\partial W}{\partial x_k}(x, \lambda) = 0 \quad \forall k \in K, \forall j \notin K, x_k \geq 0; \quad (2.8)$$

где $W(\cdot, \lambda)$ — ограниченная миниверсальная деформация в форме (2.5). Из условия полурегулярности следует, что N_K вблизи нуля в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{\hat{\mu}-1}$ устроено как подмногообразие размерности $\hat{\mu} - 1$ с $card\,K$-гранным углом. Проекция $\pi : (x, \lambda) \mapsto x$, суженная на N_K, диффеоморфно отображает некоторую окрестность нуля в N_K на окрестность нуля в угле пространства $\mathbf{R}^{\hat{\mu}-1}$, заданном неравенствами

$$\gamma_{K,k}(\lambda) \geq 0 \quad \forall k \in K, \quad (2.9)$$

где $\gamma_{K,k}(\lambda)$ — выражение x_k через λ в силу системы уравнений (2.8). Если γ_K — столбец, составленный из компонент $\gamma_{K,k}$, а H_K — матрица, составленная из элементов

$$h_{i,j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0), \quad i, j \in K,$$

то

$$\gamma_K = -H_K^{-1} b_K + o(b_K), \quad (2.10)$$

где b_K — столбец, составленный из компонент $b_k, k \in K$, вектора $b = grad_x\, W(0, \lambda)$. Соотношение (2.10) одновременно задает асимптотику бифурцирующих условно критических точек с носителем K.

Пусть

$$N = \bigcup_K N_K, \ \ S = \bigcup_{K', K''} \left(N_{K'} \bigcap N_{K''}\right), \ \ K' \neq K''.$$

Для полурегулярной угловой особенности росток множества $\pi(S)$ в нуле совпадает с Σ. С каждой парой семейств

$$L, K,\ L\bigcap K=\phi,\ L\bigcup K\subset\{1,\dots,n\},$$

свяжем подмножество

$$S_{K;L}=\{(x,\lambda)\in N_K \mid supp(grad_x W(x,\lambda))\subset \\ \subset\{1,\dots,n\}\setminus(k\cup L)\}.$$

Из определения S следует, что

$$S=\bigcup S_{K;L},\ L\bigcap K=\phi,\ L\bigcup K\subset\{1,\dots,n\},\ L\neq\phi.$$

Аналогично имеем

$$\Sigma=\bigcup\Sigma_{K;L},\ L\cap K=\phi, \\ L\cup K\subset\{1,\dots,n\},\ L\neq\phi, \tag{2.11}$$

где $\Sigma_{K;L}=cl(\pi(S_{K;L}))$. Разложение (2.11) задает стратификацию каустики Σ. Из определения $\Sigma_{K;L}$ получаем

$$\Sigma_{K;L}=\bigcap_{l\in L}\Sigma_{K;l}. \tag{2.12}$$

Так как $\Sigma_{K;l}$ задается соотношениями

$$x_j=\frac{\partial W}{\partial x_k}(x,\lambda)=\frac{\partial W}{\partial x_l}(x,\lambda)=0\ \forall k\in K, \\ \forall j\notin K,\ x_k\geq 0;$$

(см. (2.11)), то для $K\neq\phi$ компонента $\Sigma_{K;l}$ задается соотношениями

$$\gamma_{K;l}(\lambda)=0,\ \gamma_{K;k}(\lambda)\geq 0\ \forall k\in K, \tag{2.13}$$

где $\gamma_{K;l}$ получено из $\frac{\partial W}{\partial x_l}(x,\lambda)$ подстановкой вместо x явного выражения x через λ, вытекающего из равенств (2.8).

Полезно отметить, что

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{K;l}(\lambda)&=b_l(\lambda)+\sum_k h^K_{l;k}\gamma_{K;k}+o(b),\\ \gamma_{K;k}(\lambda)&=-\sum_j \bar{h}^K_{k;j}b_j(\lambda)+o(b)\ \forall k\in K,\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

где $b_j(\lambda)=\frac{\partial W}{\partial x_j}(0,\lambda)$, $\bar{h}^K_{k;j}$ — элемент матрицы H_K^{-1} (см. (2.8)). В итоге получаем следующее утверждение: *каустика полурегулярной угловой особенности (2.8) в нуле представима в виде (2.11) (см. (2.12)), где компонента $\Sigma_{K;j}$ задается соотношениями (2.13), в которых $\gamma_{K;l}$ и $\gamma_{K;k}$ представляются в форме (2.14). При этом асимптотика бифурцирующей регулярной условно критической точки с носителем K задается формулой (2.10).*

Для описания фазовых переходов в кристаллах представляет интерес асимптотика критического значения $b_K(\lambda)$ функции $W(\cdot,\lambda)$ в регулярной условно критической точке с носителем K:

$$b_K(\lambda)=-\sum_{k,j}\bar{h}^K_{k;j}b_k(\lambda)b_j(\lambda)+o(|b|^2). \tag{2.15}$$

2.3. Малые размерности

Случай $n=1$ для полурегулярных угловых особенностей тривиален. Многие фрагменты случая $n=2$ исследованы в рамках прикладных задач [22], [21]. Полное описание дано в [4]. Случай $n=3$ был недавно полностью исследован (для угловых точек минимума) в [5]. Случай угловой точки минимума (форма (Hx,x) положительна в $\mathcal{C}$) имеет наибольший прикладной интерес. Бифуркации экстремалей из таких точек называются мягкими.

При $n=2$ мягкие бифуркации соответствуют ситуациям, в которых $\sigma_1=\sigma_2=1$ и $h_{1,2}>-1$ (см. (2.4)). Положив в канонической деформации (2.5) $\lambda_3=h_{1,2}+\lambda_{1,2}$, получим

$$W(x,\lambda)=x_1^2+x_2^2+2\lambda_3x_1x_2+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, \\ x\in\mathbf{R}^2,\ \lambda\in\mathbf{R}^3.$$

Каустика Σ в этом случае состоит из четырех компонент:

$$\Sigma_{\phi;1},\ \Sigma_{\phi;2},\ \Sigma_{2;1},\ \Sigma_{1;2}.$$

Так как $\gamma_{\phi;j}=\lambda_j$, $\gamma_{i;i}=-\frac{1}{2}\lambda_i$ и $\gamma_{i;j}=\lambda_j-\lambda_3\lambda_i$, то первые две компоненты задаются соотношениями

$$\lambda_1=0\ (\Sigma_{\phi;1}),\ \lambda_2=0\quad(\Sigma_{\phi;2}),$$

а третья и четвертая — соотношениями

$$\lambda_1-\lambda_3\lambda_2=0,\ \lambda_2\leq 0\quad(\Sigma_{2;1}), \\ \lambda_2-\lambda_3\lambda_1=0,\ \lambda_1\leq 0\quad(\Sigma_{1;2}).$$

Пересечение всех компонент представляет собой прямую $\lambda_1=\lambda_2=0$. Третья и четвертая компоненты пересекаются по полупрямой $\lambda_3=1,\lambda_1=\lambda_2\leq 0$ и обе они содержат разные «половины» прямой $\lambda_3=-1,\lambda_1+\lambda_2=0$. Первая с третьей и вторая с четвертой пересекаются по полупрямым $\lambda_1=\lambda_3,\lambda_2\leq 0$ и $\lambda_2=\lambda_3,\lambda_1\leq 0$. Каустика Σ расслаивается над стратом $\lambda_1=\lambda_2=0$ (посредством ортогонального проецирования) с особыми слоями, содержащими точки с $\lambda_3=-1,0,1$. Все вырожденные критические точки при $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$ и $|\lambda_3|\neq 1$ имеют тип краевой особенности B_2 [3]. Асимптотические формулы (2.10) для бифурцирующих условно критических точек здесь являются точными. Для координат критических точек второго порядка имеем

$$x_j = \theta_j(\lambda) = -\frac{\lambda_j - \lambda_3\lambda_k}{2(1-\lambda_3^2)},\ j \neq k.$$

Для соответствующих критических значений получаем

$$\beta_j = -\frac{1}{4}\lambda_j^2$$

(для точек первого порядка) и

$$\beta_{1,2}(\lambda) = -\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{4(1-\lambda_3^2)}$$

(для точек второго порядка).

Топология линий уровня функции $W(x,\lambda)$ в $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ и функции $\hat{W}(x,\lambda)$ приведена в таблицах контуров в [4].

При $n = 3$ множество Σ состоит из двенадцати компонент

$$\Sigma_{\phi;k},\ \Sigma_{j;k},\ \Sigma_{i,j;k},\ (i \neq j \neq k \neq i).$$

Запишем развертку (2.5) в виде

$$W(x,\lambda,\alpha,\beta) = \sum_{j=1}^{3} x_j^2 + \\ + \sum_{i\neq j\neq k\neq i} \alpha_j x_i x_k + \beta x_1 x_2 x_3 + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j. \qquad (2.16)$$

Мягкие бифуркации здесь делятся на шесть типов (по типу матрицы H): положительные матрицы ($ind\ H = 0$), определяемые неравенствами

$$det\ H > 0,\ |\alpha_j| < 1; \qquad (2.17)$$

матрицы индекса два, для которых

$$det\ H > 0,\ \alpha_1 > 1; \qquad (2.18)$$

и четыре типа матриц индекса единица, каждый из которых определяется неравенством $det\ H < 0$ и одной из следующих групп соотношений (с точностью до перестановки координат в $\mathbf{R}^3$):

$$min\{\alpha_j\} > 1; \qquad (2.19)$$

$$min\{\alpha_1, \alpha_2\} > 1,\ |\alpha_3| < 1; \qquad (2.20)$$

$$\alpha_1 > 1,\ max\{|\alpha_2|, |\alpha_3|\} < 1; \qquad (2.21)$$

$$max\{|\alpha_1|\} < 1,\ \alpha_1 > \alpha_2\alpha_3. \qquad (2.22)$$

Соотношения (2.17)—(2.22) характеризует тип квадрики $\{(Hx,x) = 0\}$ и ее расположение в $\mathbf{R}^3$ по отношению к $\mathcal{C}$.

Из (2.10), (2.14) получаем

$$\gamma_{\phi;j} = \lambda_j,\ \gamma_{i;i} = -\frac{1}{2}\lambda_i,\ \gamma_{i;j} = \lambda_j - \alpha_k\lambda_i\ (i \neq j \neq k \neq i),$$

$$\gamma_{i,j;i} = -\frac{\lambda_i - \alpha_k\lambda_j}{2(1-\alpha_k^2)},\ \gamma_{i,j;j} = -\frac{\lambda_j - \alpha_k\lambda_i}{2(1-\alpha_k^2)},$$

$$\gamma_{i,j;k} = \lambda_k + 2(\alpha_j\gamma_{i,j;i} + \alpha_i\gamma_{i,j;j}) = \\ = \lambda_k + \frac{(\alpha_j\alpha_k - \alpha_i)\lambda_j + (\alpha_i\alpha_k - \alpha_j)\lambda_i}{(1-\alpha_k^2)} + \\ + \frac{\beta(\lambda_i - \alpha_k\lambda_j)(\lambda_j - \alpha_k\lambda_i)}{4(1-\alpha_k^2)^2},$$

$$\gamma_{1,2,3;i} = \\ = -\frac{(1-\alpha_j^2)\lambda_j + (\alpha_j\alpha_i - \alpha_k)\lambda_i + (\alpha_j\alpha_k - \alpha_i)\lambda_k}{2(1 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)} + o(|\lambda|^2).$$

Отсюда получаем асимптотические формулы для соответствующих критических значений (см. (2.15)—(2.16))

$$\beta_j = -\frac{1}{4}\lambda_j^2 + o(|\lambda|^2),$$

$$\beta_{i,j} = -\frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\alpha_k\lambda_i\lambda_j)}{4(1-\alpha_k^2)} + o(|\lambda|^2),$$

$$\beta_{1,2,3} = \\ = -\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j^2)\lambda_j^2 + \sum_{i\neq j\neq k\neq i}(\alpha_j\alpha_i - \alpha_k)\lambda_i\lambda_j\right)}{4(1 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)} + o(|\lambda|^2).$$

Компоненты каустики задаются соотношениями

$$\lambda_j = 0\ \ (\Sigma_{\phi;1}),$$

$$\lambda_j - \alpha_k\lambda_i = 0,\ \lambda_i \leq 0\ \ (\Sigma_{i;j}),$$

$$\lambda_k + \frac{(\alpha_j\alpha_k - \alpha_i)\lambda_j + (\alpha_i\alpha_k - \alpha_j)\lambda_i}{(1-\alpha_k^2)} + \\ + \frac{\beta(\lambda_i - \alpha_k\lambda_j)(\lambda_j - \alpha_k\lambda_i)}{4(1-\alpha_k^2)^2} = 0,$$

$$\frac{\alpha_k\lambda_j - \lambda_i}{(1-\alpha_k^2)} \geq 0, \gamma_{i,j;j} = \frac{\alpha_k\lambda_i - \lambda_j}{(1-\alpha_k^2)} \geq 0\ \ (\Sigma_{i,j;k}).$$

Описание всех bif-раскладов и сепаратрисных поверхностей уровня (при рассматриваемом здесь подходе) не сложное, но требует большого количества вычислений. В [5] был развит геометрический подход, позволивший дать полную классификацию всех bif-раскладов для мягких бифуркаций (при $n = 3$).

Ограничимся рассмотрением в этом разделе лишь бифуркаций условных минимумов.

Теорема 2.1 ([4]). *В случае (2.17) при любых α, β и любом достаточно малом λ в малой окрестности нуля существует единственная точка условного минимума функции $W(x, \lambda, \alpha, \beta)$. При этом для любого носителя найдется сколь угодно малое λ, которому отвечает точка минимума с данным носителем.*

В случаях (2.18)—(2.19) допускается (локально) существование точек минимума лишь в начале координат и на ребрах конуса $\mathcal{C}$. Допускается также сосуществование двух или трех (но не более) точек минимума первого порядка (на ребрах).

В случае (2.20) не допускается (локально) существование точек минимума максимального порядка (то есть внутри $\mathcal{C}$), но допускается точка минимума с носителем $\{1,2\}$ (грань $x_3 = 0$). Более того, допускается сосуществование двух (но не более) точек минимума первого порядка, расположенных на первом и третьем или на втором и третьем ребрах, и сосуществование двух разнотипных точек минимума, расположенных на ребре $x_1 = x_2 = 0$ и грани $x_3 = 0$.

В случаях (2.21)—(2.22) порядок любой бифурцирующей точки локального минимума не превосходит двух. При этом допускается сосуществование двух (но не более) точек минимума второго порядка, расположенных на гранях $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$. В случае (2.21) при $\alpha_1\alpha_3 < \alpha_2$ или при $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1\alpha_3 > \alpha_2$ и $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_3$, а также в случае (2.22) при $\alpha_1\alpha_3 < \alpha_2$ допускается сосуществование разнотипных точек минимума, расположенных на ребре $x_1 = x_2 = 0$ и грани $x_3 = 0$.

Доказательство теоремы сводится к проверке разрешимости системы неравенств, определяющих области существования или сосуществования условно критических точек. Первое утверждение и второе в случае (2.18) могут быть также получены из широко известной теоремы об экстремумах выпуклой функции на выпуклом многограннике.

2.4. Функционалы с 3-круговой симметрией

Критические орбиты гладкого фредгольмова функционала V на банаховом многообразии M в случае поликруговой симметрии [5] после редукции и факторизации ключевых переменных по действию тора переходят в условно критические точки некоторой функции в положительном координатном угле в $\mathbf{R}^m$.

Пусть V инвариантен относительно гладкого действия m-мерного тора $\mathbf{T}^m$ на M и допускает конечномерную редукцию на области $\mathcal{O} \subset M$ с редуцирующим отображением

$$p : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathbf{R}^{2m}$$

($\tilde{\mathcal{O}}$ открыто в $\mathbf{R}^{2m}$, $p(a) = 0 \in \tilde{\mathcal{O}}$), эквивариантным относительно действий $\mathbf{T}^m$ на M и на $\mathbf{R}^{2m}$, причем последнее действие задано ортогональным представлением $R : \mathbf{T}^m \longrightarrow \mathbf{SO}(2m)$,

$$R(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = diag(I_{\varphi_1}, \ldots, I_{\varphi_m}) \ \forall (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathbf{T}^m,$$

I_φ — матрица поворота 2-мерной координатной плоскости на угол φ. Тогда будем говорить, что V обладает *m-круговой симметрией.*

Расклад бифурцирующих критических торов удобно изображать матрицей

$$\mathbf{M} = (l_i^j), \ \imath, j = 0, 1, \ldots, \ m-1,$$

в которой l_i^j — количество критических $(j+1)$-мерных торов индекса (Морса) i.

Если функционал $V(x, \lambda)$ гладко зависит от параметра $\lambda \in \mathbf{R}^q$ и обладает 3-круговой симметрией, то ключевая функция $W : \tilde{\mathcal{O}} \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ инвариантна относительно указанного выше действия $\mathbf{T}^3$ и в соответствующих ключевых координатах имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} const + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(\delta)\rho_j + \sum_{j,k=1}^{3} a_{jk}\rho_j\rho_k + \\ + o(\|\rho\|^2) + O(\delta)O(\|\rho\|^2), \end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered} \rho_j = r_j^2 = \xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2, \ \rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3), \\ \delta = \lambda - \lambda_0, \ \alpha_j(0) = 0. \end{gathered}$$

Все bif-расклады зависят от индекса Морса ν в нуле формы $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j(\delta) r_j^2$ и от индекса Морса τ в (единственной) критической точке ограничения

$$\sum_{j,k=1}^{3} a_{jk}\rho_j\rho_k \Big|_{\sum_{j=1}^{3} \alpha_j(\delta)\rho_j + 1 = 0}.$$

Теорема 2.2 ([5]). *Пусть для ключевой функции (2.23) функционала V выполняются сле-*

дующие три требования: 1) $rk\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial\lambda_i}\right) = 3$ *;*
2) $\det(a_{jk}) \neq 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,\ a_{11} \neq 0$ *;*

3) $\sum_{j,k=1}^{3} a_{jk}\rho_j\rho_k > 0$ *при* $\rho_j \geq 0\ \ \forall j$ *и* $\|\rho\| > 0$.

Тогда при $\delta \notin \Sigma$ *допускаются те и только те* bif*-расклады критических торов для* V*, которым соответствуют матрицы* $\mathbf{M}$ *из следующих списков: 1) в случае* $\nu = 1, \tau = 0$ *—*

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

2) $\nu = 1, \tau = 1$ —

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

3) $\nu = 2, \tau = 0$ —

$$\begin{pmatrix}0&0&2\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&2\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

4) $\nu = 2, \tau = 1$ —

$$\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&2\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

5) $\nu = 3, \tau = 0$ —

$$\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&3\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

6) $\nu = 3, \tau = 1$ —

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&3\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

7) $\nu = 3, \tau = 2$ —

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть $\hat{W}$ — полином, полученный из W тейлоровским разложением по ξ до четвертого порядка. Из асимптотических формул для ветвей бифурцирующих экстремалей [4] следует, что локальная геометрия каустики (вблизи нуля) и структура bif-раскладов не изменяется при переходе от W к $\hat{W}$. Замена $r_j = \sqrt{\xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими орбитами $\hat{W}$ и критическими точками функции $\tilde{W} : \mathbf{R}_+^3 \times \mathbf{R}^q \longrightarrow \mathbf{R}$ (на координатном угле $\mathbf{R}_+^3$). Замена $|\alpha(\delta)|\, r_j^2 = \eta_j (\eta_j \ge 0\ \forall j)$ сводит изучение рассматриваемых bif-раскладов к описанию допустимых раскладов критических точек функции $U(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sum_{j,k=1}^{3} \tilde{a}_{jk} \eta_j \eta_k$ на следующих плоских областях в $\mathbf{R}^3$: $\{\eta : \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \eta_j \ge 0\ \forall j\}$; $\{\eta : \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = = 1, \eta_j \ge 0\ \forall j\}$; $\{\eta : \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = -1, \eta_j \ge 0\ \forall j\}$.

Выразив η_3 через η_1 и η_2 (в силу уравнений плоскостей, несущих симплексы) и подставив эти выражения в U, получим задачу описания bif-раскладов многочленов второй степени на стандартных двумерных симплексах в $\mathbf{R}^2$. После приведения через аффинное преобразование координат многочлена второй степени к канонической форме $\hat{U}(\zeta_1, \zeta_2) = const \pm \zeta_1^2 \pm \zeta_2^2$ получим двойственную задачу описания bif-раскладов критических точек $\hat{U}$ на подвижных симплексах. Вследствие изначальной положительной определенности квартичной части W на $\mathbf{R}^6$ функция $\hat{U}$ также является положительно определенной (после всех замен) на рассматриваемых подвижных симплексах. Описание bif-раскладов $\hat{U}$ на допустимых подвижных симплексах производится через описание bif-раскладов на соответствующих симплексах для квадратичных форм $U_0(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$, $U_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1^2 - \zeta_2^2$, $U_2(\zeta_1, \zeta_2) = -\zeta_1^2 - \zeta_2^2$ (нижний индекс j в U_j совпадает со значением τ). Допускаются лишь те симплексы, на которых область отрицательной определенности U_j ограничена. Количество критических торов размерности $(j+1)$ равно количеству критических точек, лежащих на грани размерности j соответствующего симплекса.

На симплексах удобно использовать следующие правила: если линия уровня U_j касается ребра снаружи и ее градиент направлен внутрь, то в точке касания расположена точка минимума, если наружу — точка максимума, если линия уровня U_j касается ребра изнутри симплекса, то место касания — седловая точка; если линия уровня проходит через вершину симплекса, не рассекая угол, и градиент направлен внутрь, то в этой вершине находится точка минимума, если наружу - точка максимума, если линия уровня проходит через вершину симплекса, рассекая угол, то в данной вершине расположена седловая точка. Случай прохождения линии уровня через вершину и одновременной перпендикулярности градиента одной из сторон симплекса является вырожденным (параметр принадлежит каустике).

Исходя из указанных правил, а также геометрических свойств касания прямой с окружностями и гиперболами (линиями уровня U_0, U_2 и U_1 соответственно) можно построить характерные сечения каустики, определяющие области, каждой из которых соответствует свой bif-расклад. Перебирая связные компоненты дополнений к этим сечениям и пользуясь описанными выше правилами, легко перечислить все допустимые bif-расклады U_0, U_1, U_2 на всех допустимых симплексах, что дает в итоге полное описание допустимых bif-раскладов для V в виде указанных в теореме списков матриц.

3. Случай трехкратного вырождения вдоль максимальной грани

Предварительно заметим, что деформация

$$\eta_1^4 + (\eta_2 + c\eta_1)^2 + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \\ + \lambda_3\eta_1^2 + \lambda_4\eta_1\eta_2 + \lambda_5\eta_1^2\eta_2 \tag{3.24}$$

является версальной для особенности $\eta_1^4 + (\eta_2 + c\eta_1)^2$ в вершине угла $\eta_1 \ge 0$, $\eta_2 \ge 0$. Коразмерность (угловая) особенности в данном случае равна шести («угловой» идеал здесь порожден полиномами $2\eta_1^4 + c\eta_1\eta_2 + c^2\eta_1^2$, $\eta_2^2 + c\eta_1\eta_2 + c^2\eta_1^2, c \ne 0$).

Далее предполагается, что $c > 1$.

Наложение условия симметрии четности приводит к «отбрасыванию» в развертке (3.24) нечетных слагаемых, в итоге получаем

$$W(\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \eta_1^4 + (\eta_2 + c\eta_1)^2 - 2\varepsilon_1\eta_1^2,$$
$$\eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0.$$

Вариации управляющих параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ приводят к изменению типа нулевой особой точки, но не приводят к рождению ненулевых критических точек в положительном координатном угле. При этом можно наблюдать интересный феномен: вершина угла при наличии симметрии четности является морсовской (при $\varepsilon_1 \neq 0$), несмотря на то, что особенность рассматриваемой функции имеет в этой точке единичную коразмерность.

При нарушении симметрии нормальная форма ключевой функции принимает следующий вид:

$$\eta_1^4 + (\eta_2 + c\eta_1)^2 - 2\varepsilon_1\eta_1^2 + 2\varepsilon_2\eta_1^2\eta_2 +$$
$$+2\varepsilon_3\eta_1\eta_2 + 2\varepsilon_4\eta_1 + 2\varepsilon_5\eta_2.$$

Положив $a = c^2 - 2\varepsilon_1, b = c + \varepsilon_3$, запишем ключевую функцию $W(\eta, a, b, \varepsilon)$ в виде:

$$\eta_1^4 + \eta_2^2 + a\eta_1^2 + 2b\eta_1\eta_2 + 2\varepsilon_2\eta_1^2\eta_2 + 2\varepsilon_4\eta_1 + 2\varepsilon_5\eta_2 =$$
$$= \eta_1^4 + (a - b^2)\eta_1^2 + (\eta_2 + b\eta_1)^2 + 2\varepsilon_2\eta_1^2\eta_2 + 2\varepsilon_4\eta_1 + 2\varepsilon_5\eta_2 =$$
$$= \eta_1^4 - \varepsilon\eta_1^2 + (\eta_2 + b\eta_1)^2 + 2\varepsilon_2\eta_1^2\eta_2 + 2\varepsilon_4\eta_1 + 2\varepsilon_5\eta_2,$$

где

$$\varepsilon := b^2 - a = 2\varepsilon_1 + 2c\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2.$$

Замечание 3.1. При $c = 0$ особенность главной части W восьмикратна в нуле, при $c \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ — шестикратна, а при $\varepsilon \neq 0$ кратность нуля становится равной четырем.

Каустика Σ является объединением компонент, каждая из которых «отвечает» за вырождение и характер вырождения критических точек на соответствующих гранях угла:

$$\Sigma = \Sigma_{0,0} \bigcup \Sigma_{1,0}^{int} \bigcup \Sigma_{1,0}^{ext} \bigcup \Sigma_{0,1}^{int} \bigcup \Sigma_{0,1}^{ext} \bigcup \Sigma_{1,1}.$$

Здесь $\Sigma_{i,j}$ — компонента, отвечающая за вырождение на $(i+j)-$ мерной грани; Σ^{int} и Σ^{ext} — компоненты, отвечающие за вырождение внутри заданной грани и, соответственно, по нормали к ней.

Компонента $\Sigma_{0,0}$, отвечающая за вырождение в вершине угла $(0,0)$, дает вклад в общую каустику в виде пары плоскостей $\{\varepsilon_4 = 0\}$ и $\{\varepsilon_5 = 0\}$.

Лист $\Sigma_{0,1}$ равен $\Sigma_{0,1}^{ext}$ ($\Sigma_{0,1}^{int}$ — пустое множество).

$$\frac{\partial W}{\partial \eta_2}\Big|_{\eta_1=0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1 = 0, \\ 2(\eta_2 + \varepsilon_5) = 0, \end{cases}$$

Лист $\Sigma_{0,1}^{ext}$ представляет собой полуплоскость $\varepsilon_4 - b\varepsilon_5 = 0, \varepsilon_5 < 0$.

Лист $\Sigma_{1,0}$, равный $\Sigma_{1,0}^{ext}$ ($\Sigma_{1,0}^{int}$ — пустое множество), является кубическим параболическим цилиндр: $2\varepsilon_5^3 + b^3((b - \frac{\varepsilon}{b})\varepsilon_5 - \varepsilon_4) = 0), \varepsilon_5 < 0$.

Таким образом, все нерегулярности на гранях реализуются лишь за счет внешнего вырождения (вырождения по нормали).

Теорема 3.1 ([20]) *Компонента $\Sigma_{1,1}$ (отвечающая за вырождение внутри угла) — гладкое подмногообразие единичной коразмерности в пространстве параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) \in \mathbf{R}^5$, являющееся прообразом каустики краевой особенности B_4: $\tilde{\eta}_1^4 + \lambda_3\tilde{\eta}_1^3 + \lambda_2\tilde{\eta}_1^2 + \lambda_1\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_1 > 0$ (см. [3], [2]), рассмотренной с дополнительным ограничением $p(\tilde{\eta}_1) := \varepsilon_2\tilde{\eta}_1^2 + b\tilde{\eta}_1 + \varepsilon_5 < 0$, относительно алгебраической субмерсии, заданной соотношением*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\varepsilon_4 - b\varepsilon_5 + \varepsilon_2^2\tilde{\delta} + \tilde{\delta} \cdot o(\varepsilon_2^4)) \\ -\varepsilon - 2\varepsilon_2\varepsilon_5 - \varepsilon_2^2(\varepsilon + 2\varepsilon_2\varepsilon_5) - o(\varepsilon_2^4)(\varepsilon + 2\varepsilon_2\varepsilon_5) \\ -2b\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2^3 + o(\varepsilon_3^5) \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Доказательство. Описание $\Sigma_{1,1}$ удобно проводить, рассмотрев ключевую функцию в виде

$$W(\eta, a, b, \varepsilon) = \eta_1^4 + a\eta_1^2 + 2\varepsilon_4\eta_1 +$$
$$+\eta_2^2 + 2\eta_2(\varepsilon_2\eta_1^2 + b\eta_1 + \varepsilon_5) =$$
$$= \eta_1^4 + a\eta_1^2 + 2\varepsilon_4\eta_1 + (\eta_2 + p(\eta_1))^2 - p^2(\eta_1) =$$
$$= \eta_1^4 + q(\eta_1) + (\eta_2 + p(\eta_1))^2 - p^2(\eta_1),$$

где

$$p(\eta_1) = \varepsilon_2\eta_1^2 + b\eta_1 + \varepsilon_5, q(\eta_1) = a\eta_1^2 + 2\varepsilon_4\eta_1,$$
$$\eta_1 > 0, \ \eta_2 > 0.$$

Сделав гладкую замену переменных

$$\tilde{\eta}_1 = \eta_1, \ \tilde{\eta}_2 = \eta_2 + p(\eta_1), \tag{3.26}$$

получим функцию

$$\tilde{W}(\tilde{\eta}, a, b, \varepsilon) =$$
$$= (1 - \varepsilon_2^2)\tilde{\eta}_1^4 + \tilde{\eta}_2^2 - 2b\varepsilon_2\tilde{\eta}_1^3 - (\varepsilon + 2\varepsilon_2\varepsilon_5)\tilde{\eta}_1^2 + 2\tilde{\delta}\tilde{\eta}_1,$$

рассматриваемую на множестве $\tilde{\eta}_1 > 0$, $\tilde{\eta}_2 > p(\eta_1)$. Редуцирующий переход от функции $\tilde{W}$ к функции $\tilde{\tilde{W}}(\tilde{\eta}_1, a, b, \varepsilon) = \inf\limits_{\tilde{\eta}_2} \tilde{W}(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, a, b, \varepsilon) =$

$$= (1 - \varepsilon_2^2)\tilde{\eta}_1^4 - 2b\varepsilon_2\tilde{\eta}_1^3 - (\varepsilon + 2\varepsilon_2\varepsilon_5)\tilde{\eta}_1^2 + 2\tilde{\delta}\tilde{\eta}_1 \quad (3.27)$$

при $\tilde{\eta}_1 > 0, p(\tilde{\eta}_1) = \varepsilon_2\tilde{\eta}_1^2 + b\tilde{\eta}_1 + \varepsilon_5 < 0$ позволяет свести рассуждения к случаю одномерной особенности.

Рассмотрим сначала более простую версию теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *При* $\varepsilon_2 = 0$ *лист* $\Sigma_{1,1}$ *является прообразом каустики обычной (одномерной) сборки, рассмотренной на области* $0 < \eta_1 < -\frac{\varepsilon_5}{b}$.

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что при $\varepsilon_2 = 0$ получаем (см. (3.26), (3.27)) $\tilde{W} = \eta_1^4 - \varepsilon\eta_1^2 + 2\tilde{\delta}\eta_1$. Из этого представления нетрудно усмотреть, что соответствующим образом подобранное трехмерное сечение каустики Σ (при $\varepsilon_2 = 0$) представлено на рис. 3.1.

Двумерные сечения бифуркационной диаграммы (после добавления секущих плоскостей $h := \varepsilon_5 + b\varepsilon_4 = const$, ортогональных плоскостям $\varepsilon_4 - b\varepsilon_5 = const$) изображены на рис. 3.2.

Соответствующая диаграмма перестроек bif-раскладов представлена на рис. 3.3.

Доказательство более общей теоремы 3.1 нетрудно осуществить, если предварительно применить преобразование Чирнгауза

$$\tilde{\eta}_1 = \hat{\eta}_1 + \frac{b\varepsilon_2(1 + \varepsilon_2^2 + o(\varepsilon_2^4))}{2},$$

после которого получим функцию

$$\hat{W}(\hat{\eta}_1, a, b, \tilde{\varepsilon}) = \hat{\eta}_1^4 + l(\tilde{\varepsilon})\hat{\eta}_1^2 + m(\tilde{\varepsilon})\hat{\eta}_1 + k(\tilde{\varepsilon}),$$

на множестве, заданном соотношениями

$$\hat{\eta}_1 > -\frac{b\varepsilon_2(1 + \varepsilon_2^2)}{2},$$

$$4\varepsilon_2\hat{\eta}_1^2 + 4b\hat{\eta}_1(\varepsilon_2^4 + \varepsilon_2^2 + 1) +$$

$$+ b^2\varepsilon_2(1 + \varepsilon_2^2)(\varepsilon_2^4 + \varepsilon_2^2 + 2) + 4\varepsilon_5 < 0,$$

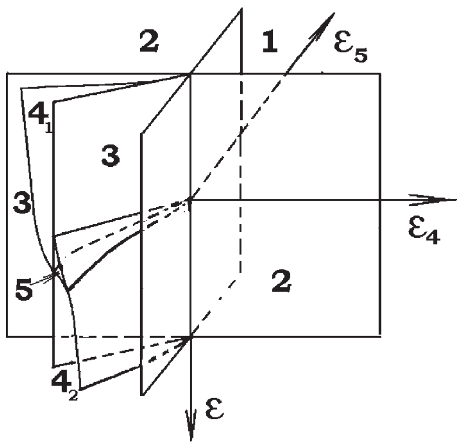

Рис. 3.1

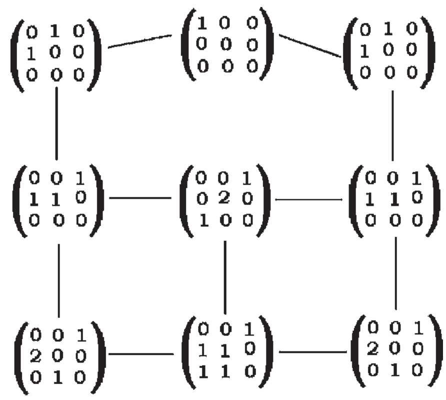

Рис. 3.3

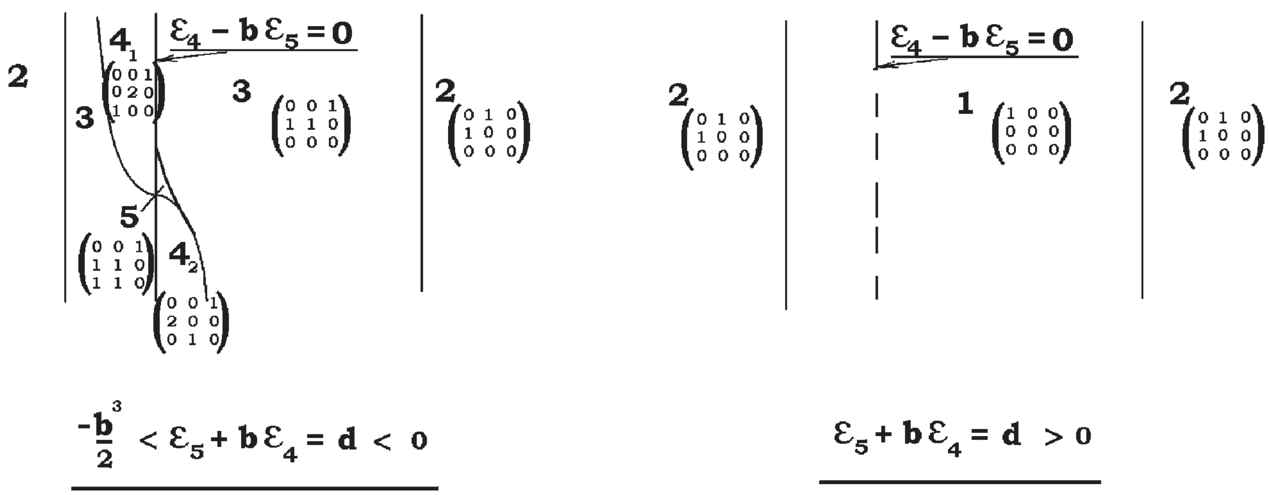

Рис. 3.2

где

$$\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5),$$

$$l(\tilde{\varepsilon}) = -\frac{3}{2} b^2 \varepsilon_2^2 (1 + \varepsilon_2^2 + o(\varepsilon_2^4))^2 +$$
$$+(1 + \varepsilon_2^2 + o(\varepsilon_2^4))(\varepsilon - 2\varepsilon_2\varepsilon_5) =$$
$$= -\varepsilon - \varepsilon\varepsilon_2^2 - \frac{3}{2} b^2 \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_5 + o(\varepsilon_2^3) + o(\varepsilon_2^2) o(\varepsilon_5),$$

$$m(\tilde{\varepsilon}) = -b^3 \varepsilon_2^3 (1 + \varepsilon_2^2)^3 - b\varepsilon_2 (1 + \varepsilon_2^2)^2 (\varepsilon + 2\varepsilon_2\varepsilon_5) +$$
$$+2\tilde{\delta}(1 + \varepsilon_2^2) + o(\varepsilon_2^4),$$

$$k(\tilde{\varepsilon}) = -\frac{3}{16} b^4 \varepsilon_2^4 (1 + \varepsilon_2^2)^4 - b^2 \varepsilon_2^2 (1 + \varepsilon_2^2)^3 (\varepsilon + 2\varepsilon_2\varepsilon_5) +$$
$$+b\varepsilon_2 \tilde{\delta} (1 + \varepsilon_2^2)^2 + o(\varepsilon_2^4).$$

Параметризация $\Sigma_{1,1}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \varepsilon + \varepsilon_2\varepsilon_5 = 6t^2, \\ 2(\varepsilon_4 - b\varepsilon_5) - b\varepsilon\varepsilon_2 = 8t^3, \end{cases}$$

где

$$t > -\frac{b\varepsilon_2}{2}, \; 4\varepsilon_2 t^2 + 4bt + 2b\varepsilon_2 + 4\varepsilon_5 < 0.$$

Замечание 3.2. Нетрудно увидеть, что при $\varepsilon_2 \neq 0$ дополнительно появляется ячейка, соответствующая максимальному bif-раскладу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характерное трехмерное сечение каустики Σ (при $\varepsilon_2 \neq 0$) приведено на рис. 3.4.

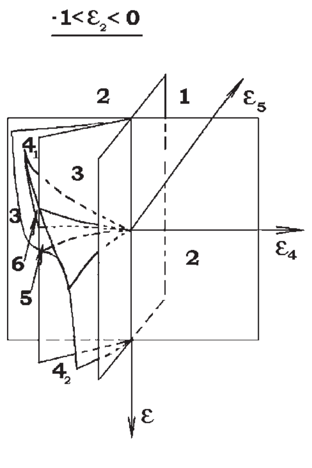

Рис. 3.4

В предельном случае $c = 0$, которому будет посвящена отдельная публикация, количество bif-раскладов существенно возрастает.

4. Исключительный случай

В случае ортогональности градиентов ограничителей первой моде нарушается одно из основных условие: второй дифференциал вырождается на касательном к $p^{-1}(\xi)$ пространстве. Поэтому возникает необходимость привлечения дополнительного ключевого параметра. В результате получаем угловую особенность [18] $\xi_1^4 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \xi_2 \geq 0, \xi_3 \geq 0$.

Локальное (угловое) кольцо особенности $\hat{Q}(W)$, равное фактору $\mathcal{E}_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)/\hat{\mathfrak{N}}$, где

$$\hat{\mathfrak{N}} = \left\{ \frac{\partial W_0}{\partial \xi_1}, \xi_2 \frac{\partial W_0}{\partial \xi_2}, \xi_3 \frac{\partial W_0}{\partial \xi_3} \right\}$$

— «угловой» якобиев идеал функции W в кольце ростков гладких функций в нуле $\mathcal{E}_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, в данном случае 12-мерно (коразмерность данной (угловой) особенности равна 11), а ограниченная мономиальная миниверсальная деформация имеет следующий вид:

$$\xi_1^4 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3 + \lambda_4\xi_1^2 +$$
$$+\lambda_5\xi_1\xi_2 + \lambda_6\xi_1^2\xi_2 + \lambda_7\xi_1\xi_3 + \lambda_8\xi_1^2\xi_3 +$$
$$+\lambda_9\xi_2\xi_3 + \lambda_{10}\xi_1\xi_2\xi_3 + \lambda_{11}\xi_1^2\xi_2\xi_3.$$

Так как ключевая функция симметрична по первой переменной, ($W(-\xi_1, \xi_2, \xi_3, \lambda) = W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \lambda)$), то в этой деформации нужно отбросить «несимметричные» слагаемые (т.е. положить $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_7 = \lambda_{10} = 0$).

Ограничимся рассмотрением функции $\hat{W} = W(\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 0, 0, 0, 0)$.

Теорема 4.1. *Фредгольмов функционал с генотипом (в нуле) $\eta_1^4 + \eta_2^2 + \eta_3^2, \eta_2 \geq 0, \eta_3 \geq 0$ (с симметрией четности по первой переменной), имеет bif-расклады, описываемые следующими матрицами:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство легко осуществляется простым перебором экстремалей на всех гранях угла.

5. Бифуркации равновесных форм эйлерова стержня с двумя ограничителями

Рассмотрим задачу о формах упругого равновесия плоского однородного продольно сжатого стержня с жестко закрепленными концами (один из концов прикреплен к подвижной платформе) и подчиненного двум связям в виде нелинейных интегральных неравенств

$$g_1(x) = \int_0^1 \sin x(t)dt \ge 0,$$
$$g_2(x) = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x(t)dt \ge 0 \qquad (5.28)$$

(интегральные ограничители).

«Общие» (некраевые) равновесные состояния описываются уравнением

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0,$$

при краевых условиях

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Здесь $x = x(t)$ — угловая функция, t — параметр длины средней линии стержня, $\lambda \in \mathbf{R}$ — параметр нагрузки. Пусть $\tilde{e}_1(t) = \sqrt{2}\sin \pi t$ — первая мода прогиба.

Заметим, что $g_1(x) = K(1), g_2(x) = -K(\frac{1}{2})$, где

$$K(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin x(t)dt$$

— функция отклонения стержня от вертикали в точке, соответствующей $t = \alpha$. Функции $g_k(t)$ симметричны относительно инволюций $J_1 : x(t) \mapsto -x(t)$ (симметрия четности) и $J_2 : x(t) \mapsto x(1-t)$ (отражательная симметрия):

$$g_1(J_1 x) = -g_1(x),\ \ g_2(J_1 x) = -g_2(x),$$

$$g_1(J_2 x) = g_1(x),$$

$$g_2(J_2 x) = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin x(t)dt = -(g_1(x) + g_2(x)).$$

Введем тройку пространств

$$E = \{x(t) \in W_2^2([0,1],\mathbf{R}) : x(0) = x(1) = 0\},$$
$$F = H = L_2([0,1],\mathbf{R}).$$

Отображение $f : E \to F$, где $f(x,\lambda) = \ddot{x} + \lambda \sin x$, является градиентом функционала энергии стержня

$$V(x,\lambda) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2(t)}{2} + \lambda(\cos x(t) - 1)\right)dt. \qquad (5.29)$$

Для изучения всех бифурцирующих из нуля равновесных состояний при $\lambda < 4\pi^2$ необходимо рассмотреть две «угловые» моды, одна из которых совпадает с первым собственным вектором производной отображения f в нуле: $e_1 = \tilde{e}_1$, а вторая равна функции

$$e_2 = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\pi(4-\pi)}}(1 - \cos \pi t - \sin \pi t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ -\sqrt{\dfrac{1}{\pi(4-\pi)}}(1 + \cos \pi t - \sin \pi t), & \dfrac{1}{2} < t \le 1. \end{cases} \qquad (5.30)$$

(данная пара функций является ортонормированной в метрике $\langle x, y\rangle_1 = \langle \bar{A}x, y\rangle_H$, $\bar{A} = A + P$, $A := -\frac{d^2}{dt^2} - \pi^2 I,\ P(u+v) := u,\ u \in Ker\ A,\ v \perp Ker\ A$). Вторая мода, определенная с учетом соотношений

$$g_1(x) = \langle 1, x\rangle_H + o(\langle x\rangle_H^2),$$
$$g_2(x) = \left\langle -\theta(\frac{1}{2} - x), x \right\rangle_H + o(\langle x\rangle_H^2),$$
$$\left\langle grad\ g_1(x), grad\ g_2(x)\right\rangle_H = -\frac{1}{2} \ne 0$$

(здесь θ — «ступенька»: $\theta(x) = 1$ при $x \ge 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$), параллельна прообразу функции $g(x) = \theta(x - \frac{1}{2}) - \theta(\frac{1}{2} - x)$ относительно оператора $\bar{A}$.

Обратимся к ключевой функции

$$W(\xi,\lambda) := \inf_{g_1(x)=\xi_1, g_2(x)=\xi_2} V(x,\lambda), \qquad (5.31)$$

гладко эквивалентной функции

$$V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + u(\xi_1,\xi_2,\lambda),\lambda),$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2,\ u(\xi_1, \xi_2, \pi^2) = o(|\xi|^2),$$
$$u \in E_0 := E \bigcap Lin(e_1, e_2)^\perp$$

(в метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$). Исходная задача сведется к экстремальной задаче на плоскости:

$$W(\xi, \lambda) \to \inf,\ \xi_1 \geq 0,\ \xi_2 \geq c\xi_1,$$

где $c \geq 1$ (точность значения c здесь не играет важную роль).

Теорема 5.1. *Для ключевой функции (5.31) имеет место следующее представление:*

$$\frac{\pi^2}{16}\xi_1^4 + \xi_2^2 - \frac{\delta}{2}\xi_1^2 + o(\xi_1^4, \xi_2^2) + \\ +O(\delta)O(\xi_1^4, \xi_2^2) + o(\delta)O(\xi_1^2), \tag{5.32}$$

$$\delta = \lambda - \pi^2.$$

Доказательство. Так как, по построению,

$$\frac{1}{2}\langle A(\lambda)x, x\rangle = -\frac{\delta}{2}\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots$$
$$(A(\lambda)x := -\frac{d^2}{dt^2} - \lambda I),$$

где многоточие означает совокупность слагаемых с асимптотикой

$$o(\xi_1^4, \xi_2^2) + O(\delta)O(\xi_1^4, \xi_2^2) + o(\delta)O(\xi_1^2),$$

и

$$\frac{1}{4!}\int_0^1 ((\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2)^4 = \frac{\xi_1^4}{16} + \ldots,$$

то автоматически получаем представление (5.32).

Замена переменных

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1,\ \tilde{\xi}_2 = \xi_2 - c\xi_1$$

с последующим масштабированием

$$\eta_1 = \nu_1 \xi_1,\ \eta_2 = \nu_2 \tilde{\xi}_2$$

приведет к функции с главной частью

$$\eta_1^4 + (\eta_2 + \frac{4}{\sqrt{4-\pi}}\eta_1)^2 - \frac{2\delta}{\pi}\eta_1^2. \tag{5.33}$$

Причем система ограничений в новых координатах приобретет следующую форму:

$$\eta_1 \geq 0,\ \eta_2 \geq 0. \tag{5.34}$$

Угловая коразмерность особенности, определяемая как коразмерность фактор-кольца

$$\hat{Q}(W) = E_0(\eta_1, \eta_2) / \left\langle \eta_1 \frac{\partial W_0}{\partial \eta_1}, \eta_2 \frac{\partial W_0}{\partial \eta_2} \right\rangle,$$

в данном случае равна шести (напоминаем, что $E_0(\eta_1, \eta_2)$ — кольцо ростков гладких функций в нуле, $\left\langle \eta_1 \frac{\partial W_0}{\partial \eta_1}, \eta_2 \frac{\partial W_0}{\partial \eta_2} \right\rangle$ — «угловой» идеал, порожденный ростками первых производных). В данном случае «угловой» идеал порожден полиномами

$$2\eta_1^4 + c\eta_1\eta_2 + c^2\eta_1^2,\ c\eta_1\eta_2 + \eta_2^2,\ c = \frac{4}{\sqrt{4-\pi}}.$$

Базис в $\hat{Q}(W)$ определяется в соответствии со стандартной алгебраической технологией [3].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Деформация*

$$\eta_1^4 + (\eta_2 + c\eta_1)^2 + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \\ +\lambda_3\eta_1^2 + \lambda_4\eta_1\eta_2 + \lambda_5\eta_1^2\eta_2 \\ (= \eta_1^4 + \eta_2^2 + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \\ +(c^2 + \lambda_3)\eta_1^2 + (2c + \lambda_4)\eta_1\eta_2 + \lambda_5\eta_1^2\eta_2).$$

функции (5.33) при ограничениях (5.34) является версальной для особенности (угловой) $\eta_1^4 + (\eta_2 + c\eta_1)^2$ *в нуле.*

Подход к анализу таких задач описан выше в разделе 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Siersma D.* Singularities of functions on boundaries, corners, etc.// Quart. J. Math. Oxford Ser. 1981. 32, 125. P. 119—127.

2. *Арнольд В. И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. УМН. 1978. Т. 33, вып. 5(203). С. 91—105.

3. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука. 1982. 304 с. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука. — 1984. — 336 с.

4. *Сапронов Ю.И.* Полурегулярные угловые особенности гладких функций// Матем. сборник. 1989. Т. 180, № 10. С. 1299—1310.

5. Гнездилов А.В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией// Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34, вып. 1. С. 83—86.

6. *Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М.* Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления// ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 3. — С. 530—533.

7. *Бобылев Н.А., Красносельский М.А.* О бифуркации экстремалей вариационных задач// ДАН СССР. — 1990. — Т. 314, № 2. — С. 265—268.

8. *Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. − М.: Магистр, 1998. — 658 с.

9. *Сапронов Ю.И.* Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 100—132.

10. *Сапронов Ю.И., Швырева О.В.* Бифуркации экстремалей гладких функционалов с симметриями и ограничениями в форме интегральных и терминальных неравенств// Третий международный симпозиум по классической и небесной механике. Тез. докл., Великие Луки. 1998. С. 141.

11. *Данилова О.Ю., Сапронов Ю.И., Швырёва О.В.* Моды бифуркации в угловых критических точках// Труды математического факультета (новая серия) Воронеж: ВорГУ. 2002. — Вып. № 7. — С. 33—39.

12. *Данилова О.Ю.* Симметричные бифуркации экстремалей вблизи края банахова многообразия // Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 45—69.

13. *Данилова О.Ю.* Двухмодовые бифуркации решений уравнения Кармана при наличии интегрального полуограничения// Труды математического факультета. — Воронеж: Изд. ВГУ, 1999. − 122 с. — (Новая серия; № 4 (20)). — С. 41—50.

14. *Данилова О.Ю.* Редукции функционалов к возмущенным двумерным сборкам при наличии полуограничения// Сб. тр. молодых ученых матем. факультета ВГУ. — Воронеж: Изд-во ВГПУ, 2001. — С. 55—61.

15. *Данилова О.Ю.* Бифуркации экстремалей при наложении симметричных и краевых особенностей// Тр. матем. факультета ВГУ. — Воронеж: Изд-во ВГПУ, 2001. № 6 (новая серия). — С. 44—53.

16. *Данилова О.Ю.* Симметричные бифуркации экстремалей вблизи края банахова многообразия // Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 45—69.

17. *Швырева О.В.* О краевых и угловых особенностях функционалов действия// Сб. тр. молодых ученых математического факультета ВГУ / Воронеж: Изд-во ВГПУ. 2001. — С. 144—149.

18. *Швырева О.В.* О бифуркациях экстремалей из вершины симплектического угла// Тр. матем. факультета ВГУ. № 5 (новая серия). Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 207—216.

19. *Швырева О.В.* Каустики и bif-расклады для краевой экстремали с трехкратным вырождением вдоль края// Тр. матем. факультета (новая серия) Воронеж: ВГУ. 2002. Вып. 7. — С. 149—160.

20. *Швырева О.В.* Бифуркации равновесных форм эйлерова стержня при наличии двух полуограничений// Математические модели и операторные уравнения. Воронеж: ВГУ. 2003. Т. 2. — С. 147—159. (http://www.main.vsu.ru/~matfak/events/mm02/index.html).

21. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М., ВИНИТИ. 1985. — С. 1—304.

22. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. — 296 с.

23. *Poénaru V.* Singularités C^∞ en Présence de Symétrie / V. Poénaru// Lecture Notes in Mathematics. N.-Y.: Springer-Verlag, 1976. V. 510, Chapter II. — P. 61—89.