ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 1

УДК 517.983

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ*

© 2003 А. В. Глушак

Воронежский государственный университет

Устанавливается условие существования 2π-периодических решений для абстрактного дифференциального уравнения с ограниченным оператором, содержащего дробную производную Вейля.

Существование периодических решений дифференциального уравнения в банаховом пространстве E

$$v'(t) = Av(t) + f(t), t \in R$$

с ограниченным оператором A исследовано в [1, гл. 2, § 4, п. 4], где доказано, что если спектр $\sigma(A)$ оператора A не содержит точек мнимой оси

$$\frac{2m\pi i}{T}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то рассматриваемое уравнение при любой непрерывной T-периодической функции $f(t)$ имеет единственное T-периодическое решение

$$v(t) = \int_0^T \Gamma(t-s) f(s) ds,$$

где периодическая функция Грина $\Gamma(t)$ имеет вид

$$\Gamma(t) = e^{At}\left(I - e^{AT}\right)^{-1}, 0 < t < T.$$

В настоящей работе исследуем вопрос о существовании 2π-периодических решений для уравнения, содержащего дробную производную.

В банаховом пространстве E рассмотрим дифференциальное уравнение с ограниченным оператором A следующего вида

$$D^{(\alpha)} v(t) = Av(t) + f(t), t \in R, \qquad (1)$$

где для $0 < \alpha < 1 D^{(\alpha)} v(t) = (I^{(1-\alpha)} v(t))'$, а дробный интеграл Вейля $I^{(\alpha)}$ (см. [2, с. 263]) определен на функциях с нулевым средним значением по периоду, т. е. на функциях, для которых

$$\int_0^{2\pi} v(t) dt = 0,$$

следующим образом

$$I^{(\alpha)} v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t-s) \Psi_\alpha(s) ds,$$

$$\Psi_\alpha(t) = \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} \frac{1}{(im)^\alpha} e^{imt}, (im)^\alpha =$$

$$= |m|^\alpha \exp\left(\frac{i\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} m\right).$$

Предположим вначале, что функция $f(t)$ представима рядом Фурье с $f_0 = 0$, т.е.

$$f(t) = \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} f_m e^{imt}. \qquad (2)$$

Будем искать периодическое решение уравнения (1) также в виде суммы ряда Фурье

$$v(t) = \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} v_m e^{imt}. \qquad (3)$$

Подставляя разложения (2), (3) в уравнение (1) и сравнивая коэффициенты при функциях $\exp(imt)$, получим систему уравнений

$$\left((im)^\alpha I - A\right) v_m = f_m, m = \pm 1, \pm 2, \dots \qquad (4)$$

Предположим сначала, что точки вида $(im)^\alpha, m = \pm 1, \pm 2, \dots$ принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и тем самым определен оператор $R\left((im)^\alpha\right) = \left((im)^\alpha I - A\right)^{-1}$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

Тогда из (3), (4) следует

$$v(t) = \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} R\left((im)^\alpha\right) f_m e^{imt} =$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 01-01-00408.

$$= \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} R\left((im)^{\alpha}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ims} f(s) ds e^{imt} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} R\left((im)^{\alpha}\right) e^{im(t-s)} f(s) ds = \tag{5}$$
$$= \int_0^{2\pi} \Gamma_{\alpha}(t-s) f(s) ds,$$

где, стоящая под знаком интеграла в (5) функция $\Gamma_{\alpha}(t)$, с учетом равенства

$$R(\lambda) - \frac{1}{\lambda} I = \frac{1}{\lambda} AR(\lambda), \lambda \neq 0,$$

может быть записана в виде

$$\Gamma_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} R\left((im)^{\alpha}\right) e^{imt} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \Psi_{\alpha}(t) I + \frac{1}{2\pi} \Psi_{2\alpha}(t) A + \cdots + \frac{1}{2\pi} \Psi_{n\alpha}(t) A^{n-1} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} A^n \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} \frac{1}{(im)^{n\alpha}} R\left((im)^{\alpha}\right) e^{imt}. \tag{6}$$

Число n в равенстве (6) следует выбрать так, чтобы ряд сходился абсолютно и равномерно по t , и чтобы его можно было дифференцировать. Для этого достаточно добиться неравенства $(n-1)\alpha > 1$.

Вычислим далее

$$I^{(1-\alpha)} \Gamma_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \Psi_1(t) I +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \Psi_{1+\alpha}(t) A + \cdots + \frac{1}{2\pi} \Psi_{1+(n-1)\alpha}(t) A^{n-1} + \tag{7}$$
$$+ \frac{1}{2\pi} A^n \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} \frac{1}{(im)^{1+(n-1)\alpha}} R\left((im)^{\alpha}\right) e^{imt},$$

и т. к. $\Psi_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi}$ при $0 < t < 2\pi$, то

$$D^{(\alpha)} \Gamma_{\alpha}(t) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi} I + \frac{1}{2\pi} \Psi_{\alpha}(t) A + \cdots + \frac{1}{2\pi} \Psi_{(n-1)\alpha}(t) A^{n-1} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} A^n \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} \frac{1}{(im)^{(n-1)\alpha}} R\left((im)^{\alpha}\right) e^{imt} = \tag{8}$$
$$= A\Gamma_{\alpha}(t) - \frac{1}{2\pi} I.$$

Из равенства (7) следует также, что

$$I^{(1-\alpha)} \Gamma_{\alpha}(+0) - I^{(1-\alpha)} \Gamma_{\alpha}(-0) = I. \tag{9}$$

Функцию $\Gamma_{\alpha}(t)$, удовлетворяющую равенствам (8) и (9), назовем модифицированной периодической функцией Грина уравнения (1). Используя эту функцию, получаем следующий результат.

Теорема 1. Если спектр $\sigma(A)$ оператора A не содержит точек вида

$$(im)^{\alpha}, m = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то уравнение (1) при любой непрерывной 2π -периодической функции $f(t)$ с нулевым средним значением по периоду имеет единственное непрерывное 2π -периодическое решение, которое задается формулой

$$v(t) = \int_0^{2\pi} \Gamma_{\alpha}(t-s) f(s) ds. \tag{10}$$

Доказательство. Проверим, что функция $v(t)$, очевидно, 2π -периодическая, является решением уравнения (1). Перепишем (10) в виде

$$v(t) = \int_0^t \Gamma_{\alpha}(t-s) f(s) ds + \int_t^{2\pi} \Gamma_{\alpha}(t-s) f(s) ds$$

и, учитывая (8), (9), вычислим дробную производную $D^{(\alpha)} v(t)$. Для $0 < t < 2\pi$ получим

$$D^{(\alpha)} v(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t I^{(1-\alpha)} \Gamma_{\alpha}(t-s) f(s) ds +$$
$$+ \frac{d}{dt} \int_t^{2\pi} I^{(1-\alpha)} \Gamma_{\alpha}(t-s) f(s) ds = I^{(1-\alpha)} \Gamma_{\alpha}(+0) f(t) +$$
$$+ \int_0^t \left(A\Gamma_{\alpha}(t-s) - \frac{1}{2\pi} I \right) f(s) ds - I^{(1-\alpha)} \Gamma_{\alpha}(-0) f(t) +$$
$$+ \int_t^{2\pi} \left(A\Gamma_{\alpha}(t-s) - \frac{1}{2\pi} I \right) f(s) ds =$$
$$= f(t) + A \int_0^{2\pi} \Gamma_{\alpha}(t-s) f(s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds = f(t) + Av(t).$$

Установим далее единственность найденного решения. Предположим противное, пусть однородное уравнение

$$D^{(\alpha)} v(t) = Av(t), t \in R, \tag{11}$$

имеет ненулевое непрерывное 2π -периодическое решение с нулевым средним значением по периоду. Умножим равенство (11) на

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-imt}, m = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

и проинтегрируем по интервалу $(0, 2\pi)$.

После очевидных преобразований будем иметь

$$
\begin{aligned}
A\int_0^{2\pi} w(t)v(t)dt &= \int_0^{2\pi} w(t)D^{(\alpha)}v(t)dt = -\int_0^{2\pi} w'(t)I^{(1-\alpha)}v(t)dt = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(w'(t)\int_0^{2\pi} v(t-\tau)\Psi_{1-\alpha}(\tau)d\tau\right)dt = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(w'(t)\int_{t-2\pi}^{t} v(s)\Psi_{1-\alpha}(t-s)ds\right)dt = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(v(s)\int_s^{2\pi} w'(t)\Psi_{1-\alpha}(t-s)dt\right)ds - \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(v(s)\int_0^{s} w'(t)\Psi_{1-\alpha}(t-s)dt\right)ds = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(v(s)\int_0^{2\pi} w'(t)\Psi_{1-\alpha}(t-s)dt\right)ds = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(v(s)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\frac{-im}{(ik)^{1-\alpha}}e^{ik(t-s)-imt}dt\right)ds = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(im)^{\alpha}e^{-ims}v(s)ds = (im)^{\alpha}\int_0^{2\pi} w(s)v(s)ds.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Поскольку по условию числа $(im)^{\alpha}$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ не принадлежат $\sigma(A)$, то равенство (12) возможно лишь в случае

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}v(t)dt = 0, m = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13}$$

Кроме того, по предположению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)dt = 0. \tag{14}$$

Таким образом, из (13), (14) следует, что все коэффициенты Фурье непрерывной функции $v(t)$ равны нулю, поэтому по теореме Фейера [3, с. 322] $v(t) \equiv 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Откажемся теперь от условия существования обратного оператора $\left((im)^{\alpha}I - A\right)^{-1}$, $m = \pm 1, \pm 2 \ldots$ Пусть $M(\alpha)$ – множество тех индексов m, что $(im)^{\alpha} \in \sigma(A)$. Т. к. спектр $\sigma(A)$ представляет собою ограниченное множество, то множество $M(\alpha)$ конечно.

Теорема 2. Для того, чтобы уравнение (1) при любой непрерывной 2π-периодической функции $f(t)$ с нулевым средним значением по периоду имело 2π-периодическое решение, достаточно, чтобы каждое из уравнений

$$\left((im)^{\alpha}I - A\right)v_m = f_m, m \in M(\alpha) \tag{15}$$

имело хотя бы одно решение $v_m \in E$.

Доказательство. Пусть $v_m^0, m \in M(\alpha)$ — какое-нибудь решение уравнений (15). Положим

$$v(t) = u(t) + \sum_{m\in M(\alpha)} v_m^0 e^{imt}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), мы получим для $u(t)$ уравнение

$$D^{(\alpha)}u(t) = Au(t) + g(t), t \in R, \tag{16}$$

где

$$g(t) = f(t) - \sum_{m\in M(\alpha)} f_m e^{imt}$$

— функция, у которой равны нулю коэффициенты Фурье для индексов из $M(\alpha)$, т. е.

$$g_m = 0, m \in M(\alpha). \tag{17}$$

Теперь решение уравнения (16) при условии (17) можно получить подобно тому, как это было сделано в теореме 1.

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_{\alpha}(t) = \sum_{m=-\infty, m\notin M(\alpha)}^{\infty} \frac{1}{(im)^{\alpha}} e^{imt},$$

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_{\alpha}(t) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty, m\notin M(\alpha)}^{\infty} R\left((im)^{\alpha}\right)e^{imt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_{j\alpha}(t)A^j + \\
&+ \frac{1}{2\pi}A^n \sum_{m=-\infty, m\notin M(\alpha)}^{\infty} \frac{1}{(im)^{n\alpha}} R\left((im)^{\alpha}\right)e^{imt}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$u(t) = \int_0^{2\pi} \Upsilon_{\alpha}(t-s)g(s)ds,$$

и, следовательно, решением уравнения (1) будет служить 2π-периодическая функция

$$v(t) = \int_0^{2\pi} \Upsilon_{\alpha}(t-s)g(s)ds + \sum_{m\in M(\alpha)} v_m^0 e^{imt}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука. 1970.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.

3. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. Физматгиз. 1960.