УДК 621.3.015.4

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

© 2003 В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк

Воронежский государственный университет

Рассмотрен диссипативный колебательный контур с периодически изменяющимися во времени элементами (индуктивность, емкость, активные сопротивления), которые предполагаются положительными, период их изменения считается одним и тем же. Предлагается метод анализа устойчивости контура путем построения функции Ляпунова, вид которой отличается от обычно принятого (квадратичной формы).

Совершенствование и анализ колебательных систем радиофизики составляет значительную долю ее содержания. В настоящее время ее элементная база неуклонно расширяется. Это связано с прогрессом в области синтеза несуществующих в природе материалов, свойства которых можно задавать заранее. В дальнейшем в связи с развитием цивилизации общества, совершенствованием технологий и автоматизации труда следует ожидать стремительного расширения элементной базы радиофизики, большого разнообразия радиофизических колебательных систем, особенно нелинейных или линейных с переменными параметрами. Предъявляются повышенные требования к анализу процессов в колебательных системах, степень математизации соответствующих задач повышается, многое зависит от удачного выбора адекватного математического аппарата и его конкретизации. Традиционной задачей анализа радиофизических колебательных систем является анализ их устойчивости. Как известно, схемы резонансных усилителей и автогенераторов близки друг к другу, поэтому одни в другие могут легко преобразовываться, что доставляет много дополнительного труда проектировщикам. Задачи об устойчивости являются сложными, в численном варианте они требуют большого объема вычислений, но часто не удается получить исходных данных для численных задач. В таких случаях применяются общие методы анализа устойчивости, среди которых особой популярностью пользуется второй метод Ляпунова. Традиционно второй метод Ляпунова применяется в механике, машиностроении, астрономии, теории автоматического регулирования, но в радиофизике он менее востребован в силу каких-то причин исторического характера. Центральная проблема второго метода Ляпунова заключается в том, что требуется построить функцию Ляпунова, обладающую вполне определенными свойствами. Как построить такую функцию, неизвестно, метод не дает рекомендаций. Обычно принято функцию Ляпунова выбирать в виде квадратичной формы, хотя теоретически не отрицается существование функций Ляпунова иного вида. Рассмотрим контур, представленный на рис. 1.

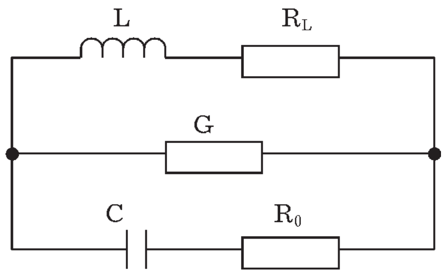

Рис. 1. Диссипативный колебательный контур

Эта схема точнее отображает реальный контур, чем схема последовательного или параллельного контура. В реальных системах диссипация распределена по всем элементам, поэтому представление диссипации в виде сосредоточенных активных сопротивлений является приближенным. Диссипация вызывается разными причинами, что требует соответствующего схемного учета. Например, в реальном конденсаторе бывают потери в заполняющем диэлектрике и в металлических пластинах и проводах. Эквивалентной цепью реального конденсатора является емкость и два сопротивления: последовательное (потери в металле) и параллельное (потери в диэлектрике). То же справедливо и относительно эквивалентной цепи реальной катушки индуктивности. Эти соображения отражены в представленной здесь схеме. Предположим, далее, что все элементы контура (L, C, R_L, R_C, G) являются положительными и изменяются во времени по непрерывно-дифференцируемым законам с общим периодом T. На практике часто возникает ситуация, когда большей информации об изменении элементов контура извлечь не удается. Например, типичная реализация периодически изменяющейся емкости проиллюстрирована на рис. 2.

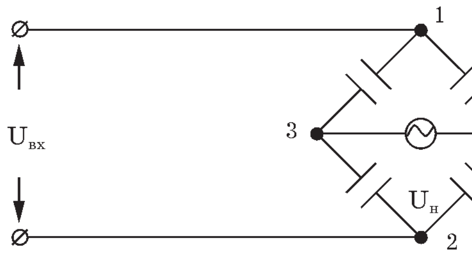

Рис. 2. Конденсатор с быстро изменяющейся емкостью в виде всегда уравновешенного мостика из 4-х одинаковых сегнетоконденсаторов

Здесь четыре одинаковых сегнетоконденсатора соединены по схеме четырехплечего мостика. В одну из диагоналей включено большое синусоидальное напряжение накачки. Здесь используется то обстоятельство, что диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков заполнения зависит от приложенного напряжения, а значит все четыре емкости будут изменяться одинаково, синхронно с изменением напряжения накачки. При этом мостик всегда будет уравновешен. В силу известной теоремы о независимости диагоналей уравновешенного мостика напряжение накачки не приведет к изменению напряжения на другой диагонали, клеммы которой 1, 2 используются для подключения данной батареи в цепь. Легко видеть, что эквивалентная емкость батареи всегда равна емкости одного конденсатора C, так как имеем параллельное соединение двух одинаковых ветвей, в каждой из которых два одинаковых конденсатора соединены последовательно. В нашей схеме такая батарея представлена емкостью C, активным сопротивлением R_C и частью активной проводимости G. Эти элементы будут изменяться во времени с периодом T, равным периоду напряжения накачки. В случае, если сегнетоэлектрик заполнения имеет симметричную петлю гистерезиса (что на практике встречается редко), то период изменения элементов цепи вдвое меньше периода напряжения накачки. Можно заметить, что точнее охарактеризовать функции изменения во времени элементов цепи не удается. Синусоидальное изменение напряжения накачки может привести к разным изменениям емкости и диссипации в зависимости от свойств заполняющего сегнетоэлектрика, а также формы и размеров конденсаторов.

Процесс в контуре подчиняется определенному математическому уравнению. Для его получения нужно воспользоваться первым и вторым законами Кирхгофа, что даст нам возможность получить систему двух уравнений относительно напряжений и токов. Всегда можно найти две определяющие функции процесса, через которые выражаются все напряжения и токи контура. В результате получается система двух уравнений с двумя неизвестными, которая при известных исходных допущениях допускает однозначное решение. Следуя традиции, в качестве определяющих функций выбираем заряд q конденсатора и магнитный поток Φ, сцепляющийся с катушкой индуктивности. Тогда получается линейная система двух дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами —

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{G}{1+GR_C}\frac{q}{C} - \frac{1}{1+GR_C}\frac{\mathbf{\Phi}}{L} \\ \frac{d\mathbf{\Phi}}{dt} &= \frac{1}{1+GR_C}\frac{q}{C} - \left(\frac{R_L}{1+GR_C} + R_C\right)\frac{\mathbf{\Phi}}{L} \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Недостаток этой системы заключается в том, что искомые переменные и коэффициенты при них имеют разные размерности. Кроме того, если выразить все величины в определенной системе единиц, то некоторые из них бывают очень малыми, другие, наоборот, — очень большими. Все это затрудняет те сложные математические преобразования, которые требуются при решении задачи об устойчивости по Ляпунову. Поэтому целесообразно перейти к безразмерным переменным.

Введем размерные масштабные делители, q_M, $\mathbf{\Phi}_M$, и t_M — постоянные положительные числа с размерностями, соответственно, заряда, магнитного потока и времени. Это даст нам возможность перейти к безразмерным переменным $x_1 = q / q_M$, $x_2 = \mathbf{\Phi} / \mathbf{\Phi}_M$ и $\tau = t / t_M$, в которых система (1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -\frac{t_M G}{C(1+GR_C)}x_1 - \frac{t_M r}{L(1+GR_C)}x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{t_M}{rC(1+GR_C)}x_1 - t_M\left(\frac{R_L}{1+GR_C} + R_C\right)\frac{1}{L}x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Здесь $r = \mathbf{\Phi}_M / q_M$ — нормирующее сопротивление. В этой системе переменные и коэффициенты при них безразмерные, размерность функций при дифференцировании и интегрировании не меняется. Кроме того, существует два параметра t_M и r, которые можно выбирать произвольно, это увеличивает гибкость анализа.

Система (2) может быть записана в векторном виде, и тогда она считается одним векторным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\mathbf{x} = colon(x_1, x_2)$ — вектор-столбец второго порядка, $\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau + T)$ — периодическая матрица порядка (2,2) с элементами

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{t_M G}{C(1+GR_C)},\ a_{12} = -\frac{t_M r}{L(1+GR_C)}, \\ a_{21} &= \frac{t_M}{rC(1+GR_C)},\ a_{22} = -t_M\left(\frac{R_L}{1+GR_C} + R_C\right)\frac{1}{L}. \end{aligned} \tag{4}$$

Как видно, это линейное однородное, векторное дифференциальное уравнение первого порядка. Область применимости — пространство второго порядка (плоскость). Это уравнение описывает свободный процесс в рассматриваемом контуре. В частном случае постоянной матрицы, как видно, свободный процесс — экспоненциально затухающий во времени. На языке теории устойчивости Ляпунова такой контур — асимптотически устойчив. В более частном случае отсутствия диссипации $(R_C = 0, R_L = 0, G = 0)$ свободный процесс не является ни затухающим, ни возрастающим, он представляет собой периодическую функцию времени. В таком случае он устойчив (не асимптотически) по Ляпунову. При постоянной матрице и наших ограничениях свободный процесс не может быть безгранично возрастающим, т.е. контур не может быть неустойчивым по Ляпунову. В частном случае линейной системы типа (3) устойчивость по Ляпунову эквивалентна ограниченности свободного процесса, а неустойчивость — неограниченности. Для нелинейных систем — такого однозначного соответствия не существует.

В случае периодической матрицы в (3) свободные процессы более разнообразны. Они могут быть безгранично возрастающими, тогда контур неустойчив (такого не может быть при постоянной матрице и положительных элементах контура). Физика такого явления известна и достаточно хорошо изучена. Оно носит название «накачка энергии в контур периодически изменяющимися во времени реактивностями». Однако реальное проявление такого явления бывает сложным и с трудом поддается анализу. Возможны также случаи ограниченных и безгранично убывающих свободных процессов. Адекватным математическим аппаратом здесь являются обыкновенные дифференциальные уравнения с периодически зависящими от аргумента коэффициентами [1]. Частным случаем их является наше векторное дифференциальное уравнение (3). Это уравнение может быть преобразовано к скалярному дифференциальному уравнению второго порядка, а последнее — к уравнению Хилла, которому посвящено необозримое число публикаций. Тем не менее, *необходимого и достаточного* условия устойчивости уравнения Хилла получить не удалось. Получено несколько необходимых и, раздельно, достаточных условий устойчивости, которые в своей совокупности, сколько бы их ни было, не могут заменить необходимого и достаточного условия устойчивости. Поэтому сейчас получение новых достаточных условий устойчивости уравнения Хилла признано актуальным. То же относится и к другим обыкновенным, линейным, дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами, а также к описываемым такими уравнениями реальным системам.

В нашем случае выражения как функций времени элементов матрицы в (3) неизвестны, известны лишь их знаки и факт их периодичности при одном и том же периоде *T*. В таких случаях незаменимым для исследования устойчивости является второй метод Ляпунова [2], не требующий знания решения системы (которое в нашем случае принципиально не может быть получено из-за неизвестности коэффициентов). Этот метод требует построения определенно-положительной функции Ляпунова $V(\mathbf{x}) > 0$ ($V = 0$ только при $\mathbf{x} = 0$) такой, что ее полная производная $\frac{dV}{d\tau} \le 0$ в силу системы (3) является знакоотрицательной (она может быть либо отрицательной, либо равной нулю). Доказано, что если такая функция существует, то система (3) устойчива. Если окажется, что при этом $\frac{dV}{d\tau} < 0$ определенно отрицательная, то система (3) асимптотически устойчива. Это утверждение составляет содержание центральной теоремы второго метода Ляпунова. Открытой является проблема отыскания функции Ляпунова. Обычно для линейных систем строят функцию Ляпунова в виде квадратичной формы с определенным образом подобранными коэффициентами. Попытаемся нарушить установившуюся ограничительную традицию.

Применительно к системе (3) зададим функцию Ляпунова в виде

$$V(\mathbf{x}) = e^{(\mathbf{x},\mathbf{x})} - 1 \tag{5}$$

где $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ — скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на себя. Первое слагаемое в (5) — экспонента с положительным показателем, она больше единицы за исключением случая $\mathbf{x} = 0$, когда она равна единице. Следовательно, функция V является определенно положительной, что и требуется в центральной теореме Ляпунова.

Найдем полную производную этой функции по аргументу

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau}. \tag{6}$$

Здесь

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}[e^{(x_1^2+x_2^2)} - 1] = 2x_1 e^{(x_1^2+x_2^2)} = 2x_1 e^{(\mathbf{x},\mathbf{x})}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 2x_2 e^{(\mathbf{x},\mathbf{x})}.$$

Подставляя в (6) эти выражения, а также $\frac{dx_1}{d\tau}$ и $\frac{dx_2}{d\tau}$ взятые из (2), получим

$$\frac{dV}{d\tau} = \left[-\frac{G}{C(1+GR_C)}x_1^2 - \frac{1}{L}\left(\frac{R_L}{1+GR_C} + R_C\right)x_2^2 - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{r}{L} - \frac{1}{rC}\right)\frac{x_1 x_2}{1+GR_C}\right] 2t_M e^{(\mathbf{x},\mathbf{x})}. \tag{7}$$

Из этого выражения очевидно, что оно является знакоотрицательным, если

$$\frac{r}{L} - \frac{1}{rC} = 0. \tag{8}$$

Это равенство может быть выполнено подбором константы r только в том случае, если $L(\tau)$ и $C(\tau)$ изменяются во времени синхронно, т.е.

$$\rho = \sqrt{\frac{L(\tau)}{C(\tau)}} = const, \tag{9}$$

где ρ — характеристическое сопротивление контура. Это не исчерпывает критерия устойчивости, поэтому продолжим анализ дальше.

Выражение в квадратных скобках (7) представляет собой квадратичную форму, которую всегда можно представить в виде скалярного произведения $(\mathbf{Bx},\mathbf{x})$, где $\mathbf{B}$ — симметричная матрица. В нашем случае эта матрица имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} -\frac{G}{C(1+GR_C)} & -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L} - \frac{1}{rC}\right)\frac{1}{1+GR_C} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L} - \frac{1}{rC}\right)\frac{1}{1+GR_C} & -\frac{1}{L}\left(\frac{R_L}{1+GR_C} + R_C\right) \end{matrix} \right\|.$$

Легко заметить, что это симметризированная матрица нашей системы, т.е.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_t),$$

где индекс t означает транспонирование.

Итак, наша задача свелась к тому, чтобы упомянутая квадратичная форма была знакоотрицательной, т.е.

$$(\mathbf{Bx},\mathbf{x}) \le 0. \tag{11}$$

Это выражение является достаточным условием устойчивости контура (рис. 1). Если неравенство строгое

$$(\mathbf{Bx},\mathbf{x})<0, \qquad (12)$$

то имеем достаточное условие асимптотической устойчивости этого контура. В физических задачах именно последнее представляет основной интерес. Матрица $\mathbf{B}$ подчиняется условию (12), т.е обладает тем свойством, что построенная на ее основе квадратичная форма всегда отрицательна (за исключением случая $\mathbf{x}=0$), носит название определенно отрицательной матрицы.

Известен эффективный (необходимый и достаточный) критерий определенной отрицательности матрицы: ее главные миноры нечетного порядка должны быть отрицательными, а четного — положительными [3].

В нашем случае квадратная матрица $\mathbf{B}$ — второго порядка, главных миноров у нее два: $a_{11}<0$ — минор первого порядка, $\det\mathbf{B}$ — минор второго порядка. Таким образом, достаточным условием устойчивости контура является неравенство

$$\det\mathbf{B}>0. \qquad (13)$$

Определитель левой части может быть по выражению (10) легко представлен в развернутом виде. Тогда неравенство (13) может быть дано в удобном для применения виде

$$\left(\frac{\rho}{r}-\frac{r}{\rho}\right)^2<4G\left[R_L+R_C\left(1+GR_C\right)\right]. \qquad (14)$$

Константа r здесь подбирается произвольно, неравенство должно выполняться при каком-нибудь $r>0$. По смыслу неравенство означает, что характеристическое сопротивление $\rho=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ контура должно изменяться в безразмерном времени τ с небольшим размахом ($\rho_{\max}-\rho_{\min}$), так что неравенство (14) выполняется при любом τ. Если положить $t_M=1$, то $\tau=t$ и получается неравенство (14) в реальном времени.

Пример. Пусть задан контур (рис. 1), у которого все пять параметров изменяются по закону

$$P=P_0[1+m_p\cos(\Omega t+\varphi_p)],$$

где вместо P нужно подставить L,C,G,R_L,R_C. Полагая все $m_p=0$, получим усредненный контур с постоянными параметрами. Обычно у реактивностей m_p близко к величине, обратной добротности контура, т.е. имеет порядок нескольких сотых долей. У диссипативных параметров m_p играет менее значительную роль, чем у реактивностей. Будем полагать, что все $m_p\ll 1$. Зададим среднее значение параметров следующим образом: $C_0=10^{-10}$ Ф, $L_0=4\cdot 10^{-2}$ Гн, $R_{C0}=25$ Ом, $R_{L0}=25$ Ом, $G_0=10^{-5}$ Сим. Пока m_p и φ_p фиксировать не будем. Дадим приближенный анализ устойчивости, причем степень приближения такова, что имеет силу приближенная формула $(1+\alpha)^n\simeq 1+n\alpha$, где $\alpha\ll 1$, в нашем случае $\alpha=m_p\cos(\Omega t+\varphi_p)$. В неравенстве (14) будем отбрасывать величины второго порядка малости. Имеем

$$\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sqrt{\frac{1+m_L\cos(\Omega t+\varphi_L)}{1+m_C\cos(\Omega t+\varphi_C)}}\simeq$$

$$\simeq\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left[1+\frac{m_L}{2}\cos(\Omega t+\varphi_L)-\frac{m_C}{2}\cos(\Omega t+\varphi_C)\right].$$

Выберем $r=\sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$, тогда

$$\frac{\rho}{r}-\frac{r}{\rho}\simeq m_L\cos(\Omega t+\varphi_L)-m_G\cos(\Omega t+\varphi_C).$$

Неравенство (14) представим в виде $\left|\dfrac{\rho}{r}-\dfrac{r}{\rho}\right|<$ $<2\sqrt{G\left[R_L+R_C(1+GR_C)\right]}$.

Для удобства оценки левую часть неравенства заменим мажорантой $\left|\dfrac{\rho}{r}-\dfrac{r}{\rho}\right|\le m_L+m_C$.

В правой части в связи с m_p<<1 можно заменить зависимые от времени значения элементов контура их средними значениями отбросив бесконечно малые второго порядка:

$$2\sqrt{G\left[R_L+R_C(1+GR_C)\right]}\simeq 2\sqrt{G_0(R_{L0}+R_{C0})}.$$

Итак, получается $m_L+m_C<2\sqrt{G_0(R_{L0}+R_{C0})}$.
При наших численных значениях имеем $m_L+m_C<0{,}045$.
Это условие гарантирует асимптотическую устойчивость рассматриваемого конкретного контура. Оказалось, что в диссипативных элементах при наших ограничениях параметры m_p и φ_p несущественны.

Последние неравенства согласуются с существующими физическими представлениями. Именно, m_L и m_C определяют размах изменения во времени реактивностей контура. При определенных условиях изменения реактивностей осуществляют накачку электромагнитной энергии в контур. В диссипативных элементах, наоборот, электромагнитная энергия теряется, т.е. переходит в тепловую энергию. Поэтому для устойчивости контура коэффициенты модуляции реактивностей m_L, m_C должны быть достаточно малыми. Наше неравенство дает явное соотношение между ними.

ЛИТЕРАРУРА

1. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 718 с.

2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

3. *Рублев А.Н.* Линейная алгебра. — М.: Высшая школа, 1968. — 384 с.