УДК 517.9+530.1

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА-ПЕТВИАШВИЛИ

© 2002 Ю. В. Засорин, М. В. Придущенко

Воронежский государственный университет
ФГУП Воронежский НИИ связи

Строятся точные решения задачи Коши для пространственного уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Доказывается наличие эффекта фокусировки решений однородных уравнений.

Введение

Уравнение

$$L^{\pm}u_{\pm} = f(t,\vec{r}), \quad \vec{r} = (x,y,z) \in R^3,$$

$$L^{\pm} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^4}{\partial x^4} \pm \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^z}{\partial z^2} \right) \tag{1}$$

является аналогом хорошо известного уравнения Кадомцева-Петвиашвили (см. [1—4]) (последнее отличается от уравнения (1) отсутствием члена $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$; правая часть $f(t,\vec{r})$ имеет вид источника или слабо нелинейна относительно решения u, знаки «$+$» или «$-$» соответствуют средам с положительной или отрицательной дисперсией), которое было выведено первоначально в работе [1] для описания эволюции слабо нелинейных длинных волн в диспергирующих средах с учетом слабого влияния поперечной координаты y, и, в последствии, независимо — в работе [2] для исследования ионно-акустических волн в плазме. Несмотря на огромный интерес к уравнению Кадомцева-Петвиашвили в 70—80 гг. (см. обзоры в работах [3, 4]), удалось получить лишь некоторые частные решения солитонного типа для специально подобранных правых частей f. При этом важнейший случай линеаризованного уравнения Кадомцева-Петвиашвили остался практически неизученным. Наконец, при описании волновых процессов в плазме двумерная модель является слишком идеализированной, и необходимо рассматривать трехмерную модель (1). Настоящая работа и призвана восполнить существующие пробелы.

§ 1. Основной результат

Пусть R^3 есть евклидово пространство векторов $\vec{r} = (x,y,z)$ (или $\vec{\rho} = (\xi,\eta,\zeta)$), $R^4 = \{(t,\vec{r}) : t \in R, \vec{r} \in R^3\}$, $R^4_+ = \{(t,\vec{r}) \in R^4 : t > 0\}$. Через $S'(R^n)$, $n = 3,4$, будем, как обычно, обозначать пространства Шварца распределений умеренного роста с линейной формой $\langle;\rangle_n$, а через $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$ — подпространство $S'(R^4)$ распределений $h(t,\vec{r})$, таких что $supp(h) \subset \bar{R}^4_+$.

Определение 1. *Фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (1) будем называть распределение $E_{\pm}(t,\vec{r}) \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$, такое что:*

$$L^{\pm}E_{\pm}(t,\vec{r}) = 0, \ \ (t,\vec{r}) \in R^4_+, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial E_{\pm}}{\partial x} \right|_{t=+0} = \delta(\vec{r}), \tag{3}$$

$$E(t,\vec{r}) = o(1), \ \ \vec{r} \to \infty, \tag{4}$$

где $\delta(\cdot)$ означает «δ-функцию» Дирака.

Лемма 1. Фундаментальное решение Коши $E_{\pm}(t,\vec{r})$ для уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} E_{\pm}(t,\vec{r}) = \pm \frac{\theta(t)}{4 \cdot 3^{1/3} \pi \cdot t^{4/3}} \cdot Ai(\omega_{\pm}), \\ \omega_{\pm} = (3t)^{-1/3}(x \mp r^2/4t), \ r = \sqrt{y^2 + z^2}; \end{gathered} \tag{5}$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $Ai(\cdot)$ — функция Эйри 1-го рода (см. [5]).

Доказательство может быть осуществлено по схеме, предложенной в работе [6] для нестационарного вязкого трансзвукового уравнения (получающегося из уравнения (1) заменой члена $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ на $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$).

Непосредственный анализ формулы (5) позволяет установить ряд простых, но важных свойств фундаментального решения Коши $E_{\pm}(t,\vec{r})$ (в частности, уточнить формулу (3)), а именно:

$$L^{\pm}E_{\pm}(t,\vec{r}) = \delta(t)\otimes\delta(\vec{r}),\ \ (t,\vec{r})\in R^4;$$
$$E_{\pm}\,|_{t=+0} = \pm\theta(\pm x)\otimes\delta(y,z). \qquad (6)$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1):

$$L^{\pm}u_{\pm} = f(t,\vec{r}),\ \ (t,\vec{r})\in R_+^4;$$
$$u_{\pm}\,|_{t=+0} = F(\vec{r}),\ \ \vec{r}\in R^3; \qquad (7)$$
$$u_{\pm}(t,\vec{r}) = o(1),\ \ \vec{r}\to\infty;$$

где $u, f\in \mathring{S}'(\bar{R}_+^4)$, $F\in S'(R^3)$.

Теорема 1. *Решение* $u_{\pm}\in S'(R^3)$ *задачи Коши (7) — единственно.*

Доказательство немедленно следует из работы [7], если применить к распределению $u_{\pm}$ преобразование Лапласа по переменной t.

Наконец, из свойств (2)—(4), (6) непосредственно следует справедливость следующего утверждения:

Теорема 2. Решение $u_{\pm}\in \mathring{S}'(\bar{R}_+^4)$ задачи (7) может быть представлено в следующем виде:

$$u_{\pm}(t,\vec{r}) = \left\langle F(\tau); \frac{\partial E_{\pm}}{\partial x}(t,\vec{r}-\vec{\rho})\right\rangle_3 +$$
$$+\left\langle f(\tau,\vec{\rho}); E_{\pm}(t-\tau,\vec{r}-\vec{\rho})\right\rangle_4. \qquad (8)$$

Замечание 1. Несложно видеть, что формула (8) позволяет легко конструировать (методом отражения) и решения начально-краевых задач для уравнения (1) в областях вида $\{\pm z>0\}$.

§ 2. Геометрические свойства решений: фокусировка волн

Отметим, что продолжение нулем на область $\{t<0\}$ распределения $E_{\pm}(t,\vec{r})$ (см. формулу (5)) не является единственно возможным. Рассмотрим распределение $V_{\pm}\in S'(R^4)\cap$ $\cap C^{\infty}(R^4\setminus\{t=0,\vec{r}=0\})$:

$$V_{\pm}(t,\vec{r}) = \frac{sign(t)}{4\cdot 3^{1/3}\pi\cdot t^{4/3}}\cdot Ai(\omega_{\pm}). \qquad (9)$$

Непосредственный анализ равенства (9) (с учетом формул (5), (6)) позволяет установить, что:

$$V_{\pm}\,|_{t=+0} = \pm\theta(\pm x)\otimes\delta(y,z),$$
$$V_{\pm}\,|_{t=-0} = \pm\theta(\mp x)\otimes\delta(y,z), \qquad (10)$$

откуда следует, что:

$$L^{\pm}V_{\pm}(t,\vec{r}) = 0,\ \ (t,\vec{r})\in R^4. \qquad (11)$$

Определение 2. *Будем говорить, что решения уравнения (1) способны к фокусировке, если для задачи Коши (7) (при условии* $f=0$*) найдется такое* $F\in S'(R^3)\cap C^{\infty}(R^3)$, *что* $sing\,supp\,(u_{\pm})\cap R_+^4 = \{t=t',\vec{r}=\vec{r}'\}$ *для любой заранее заданной точки* $(t',\vec{r}')\in R_+^4$.

Теорема 3. *Решения уравнения (1) способны к фокусировке.*

Доказательство: Положим в задаче Коши (7) $f=0$ и

$$F(\vec{r}) = \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x}(\vec{r}-\vec{r}',-t')\in C^{\infty}(R^3), \qquad (12)$$

где распределение $V_{\pm}$ определено равенством (9). В силу Теоремы 1 и равенств (9), (10) единственным решением задачи Коши (7) будет распределение

$$u_{\pm}(t,\vec{r}) = \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x}(t-t',\vec{r}-\vec{r}'), \qquad (13)$$

имеющее единственную особую точку $(t,\vec{r})=(t',\vec{r}')$, причем, в силу равенств (10):

$$u_{\pm}\,|_{t=t'} = 2\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \qquad (14)$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Беря в равенстве (12) распределение F в виде суперпозиций производных различных порядков от $V_{\pm}$ в различных точках $(t',\vec{r}')$, можно тем самым конструировать волновые фронты решений $u_{\pm}$ самой разнообразной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 192, № 4. — С. 753—756.

2. *Kako M., Rowlands G.* Two-dimensional stability of ion acoustic solitons // Plasma Physics. — 1976. — Vol. 18. — P. 165—170.

3. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988. — 308 с.

4. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.

5. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Наука, 1978. — 406 с.

6. *Засорин Ю.В.* Точные решения некоторых внешних задач, описываемых нестационарными вязкими трансзвуковыми уравнениями // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. — 1994. — Т. 34, № 10. — С. 1476—1488.

7. *Засорин Ю.В.* О поведении на бесконечности решений некоторых классов дифференциальных уравнений и теоремы единственности // Корректные задачи для неклассич. уравнений мат. физ.: Сб. научн. тр. ИМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1984. — С. 74—80.