УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2002 А. С. Загорский, В. В. Хатько

Воронежский государственный университет

Рассматриваются общие понятия теории линейных отношений. Даются определения инвариантного подпространства и сужения линейного отношения. Затрагиваются некоторые вопросы спектральной теории линейных отношений на конечномерных пространствах.

1. Введение

Статья посвящена изучению некоторых вопросов теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) на конечномерных линейных пространствах. Вводятся понятия инвариантности, сужения и прямой суммы линейных отношений. Также рассматриваются вопросы спектральной теории. Оцениваются размерности основных подпространств в теории линейных отношений. Также мы старались проводить как можно больше параллелей с теорией линейных операторов, что делает изложение более наглядным.

Приведем некоторые используемые ниже понятия из теории линейных отношений.

Пусть X и Y — комплексные линейные пространства. Любое линейное подпространство $A \subset X \times Y$ называется *линейным отношением* между линейными пространствами X и Y. Если оно замкнуто в $X \times Y$, то линейное отношение называется *замкнутым* (если размерности пространств $dimX$ и $dimY$ конечны, то оно всегда замкнуто).

Множество замкнутых линейных отношений из X в Y обозначим $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X,X)$. Множество линейных замкнутых операторов $LO(X,Y)$, считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то $LO(X) = LO(X,X)$ и $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Итак, $EndX \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Под записью $M \subset N$ условимся в дальнейшем понимать не обязательно строгое включение множества M в множество N; иначе будем делать специальную оговорку.

Определение 1.1. Подпространство $D(A) = \{x \in X \mid \exists y \in Y, (x,y) \in A\}$ называется *областью определения* линейного отношения $A \subset X \times Y$.

Определение 1.2. *Ядро* отношения есть $Ker\,A = \{x \in D(A) \mid (x,0) \in A\}$.

Определение 1.3. Через Ax, $x \in D(A)$, обозначим множество $\{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$. Заметим, что Ax является линейным подпространством только, если $x \in KerA$.

Определение 1.4. *Область значений*

$$ImA = \{y \in Y \mid \exists x \in D(A), (x,y) \in A\} = \bigcup_{x \in D(A)} Ax.$$

Определение 1.5. *Суммой* двух линейных отношений $A, B \subset X \times Y$ называется линейное отношение из $X \times Y$ вида $A + B = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in D(A) \cap D(B), y \in Ax + Bx\}$. $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$. Под $Ax + Bx$ понимается алгебраическая сумма двух множеств Ax и Bx.

Отметим, что для всех $x \in D(A)$ множество Ax представимо в виде $Ax = y + A0$ для любого вектора y из Ax.

Определение 1.6. *Произведением* двух линейных отношений $A \subset X \times Y$ и $B \subset Y \times Z$, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $BA = \{(x,z) \in X \times Z \mid$ существует вектор y из $D(B)$ такой, что $(x,y) \in A, (y,z) \in B\}$.

Определение 1.7. *Обратным* к линейному отношению $A \subset X \times Y$ называется линейное отношение $A^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in A\} \subset Y \times X$.

Каждое линейное отношение $A \subset X \times Y$ является графиком многозначного отображения $\widetilde{A} : D(A) \subset X \to 2^Y$, где $\widetilde{A}x = Ax \in 2^Y$. В дальнейшем они отождествляются.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 01-01-00408.

Определение 1.8. Отношение $A \in LR(X,Y)$ называется *инъективным*, если $KerA = \{0\}$, и *сюръективным*, если $ImA = Y$.

Заметим, что для любых векторов $x, y \in D(A)$ возможны только два случая:

1) $Ax = Ay$;

2) $Ax \cap Ay = \varnothing$.

Из условия $KerA = \{0\}$ следует, что $Ax \cap Ay = \varnothing$ для всех $x \neq y$ из $D(A)$.

Условимся начало и конец доказательство отмечать знаками ◀ ▶.

2. Понятия инвариантных подпространств и сужения линейных отношений.

В данном разделе вводятся некоторые понятия, важные в спектральной теории линейных отношений.

Определение 2.1. Пусть $A \in LR(X)$. Замкнутое линейное подпространство $X_0 \subset X$ назовем *инвариантным* относительно отношения A, если для всех векторов $x \in X_0 \cap D(A)$ выполненяется условие $Ax \cap X_0 \neq \varnothing$.

Определение 2.2. Пусть $A \in LR(X), X_0 \subset X, X_0$ — инвариантное относительно A подпространство. *Сужением отношения A на X_0* назовем подпространство из $X_0 \times X_0$ вида $A \cap X_0 \times X_0$. Сужение A_0 отношения A на инвариантное подпространство X_0 обозначим символом $A \mid X_0$.

Отметим, что областью определения сужения A_0 является подпространство $D(A_0) = D(A) \cap X_0$ и $A_0 x = Ax \cap X_0$ для всех $x \in D(A_0)$.

В статье [1] использовалось другое, видимо, не эквивалентное введенному определение инвариантного подпространства. Наше определение близко к классическому определению для линейных операторов. В случае $A \in EndX, dimX < \infty$ оба определения совпадают и эквивалентны определению инвариантного подпространства для ограниченных операторов.

Определение 2.3. Пусть X_0, X_1 — инвариантные подпространства относительно отношения $A \in LR(X)$ и выполнены следующие условия: $X = X_0 \oplus X_1$, $D(A) = (D(A) \cap X_0) \oplus (D(A) \cap X_1), A0 = (A0 \cap X_0) \oplus (A0 \cap X_1)$. В этом случае будем говорить, что отношение A является *прямой суммой отношений* $A_0 = A \mid X_0$ *и* $A_1 = A \mid X_1$ и записывать $A = A_0 \oplus A_1$. При этом множество Ax для любого $x \in D(A)$ определяется формулой

$$Ax = A_0 x_0 + A_1 x_1, x = x_0 + x_1,$$

$x_0 \in D(A_0), x_1 \in D(A_1)$ и Ax — алгебраическая сумма двух множеств $A_0 x_0$ и $A_1 x_1$.

Определение 2.4. Будем говорить, что отношение $A \in LR(X)$ обладает свойством *стабилизации степеней*, если существует натуральное число m такое, что

$$A^{m-1}0 \subset A^m 0 = A^{m+1}0, D(A^{m-1}) \supset D(A^m) = D(A^{m+1}),$$

где включения являются строгими. Число m называется *порядком* стабилизации степеней отношения A.

В дальнейшем число m будем обозначать m_A.

Лемма 2.1. *Пусть $A \in LR(X)$ обладает свойством стабилизации степеней, $m = m_A$ и $X_0 = D(A^m), X_\infty = A^m 0$ являются замкнутыми подпространствами (если X — конечномерно, подпространства X_0 и X_∞ всегда замкнуты). Тогда X_0, X_∞ — инвариантны относительно A.*

◀ 1) Докажем инвариантность X_0. По определению $D(A^m) = D(A^{m+1}) = \{x \in D(A) : Ax \cap D(A^m) \neq \varnothing\}$, откуда следует, что $Ax \cap D(A^m) \neq \varnothing$ для любого $x \in D(A^m) \cap D(A)$. Таким образом, $D(A^m)$ — инвариантное подпространство относительно A.

2) Осталось доказать инвариантность X_∞. Поскольку $A(A^m 0 \cap D(A)) = A^{m+1}0 = A^m 0$, то $Ax \cap A^m 0 \neq \varnothing$ для любого $x \in A^m 0 \cap D(A)$. Следовательно, $A^m 0$ — инвариантное подпространство относительно A. ▶

Предположим, что выполнено $X = X_0 \oplus X_\infty$ (в третьей части данной работы мы подробнее рассмотрим это свойство). Тогда эта лемма позволяет разложить линейное отношение A в прямую сумму $A = A_0 \oplus A_\infty$, где A_0 — сужение A на X_0, A_∞ — сужение A на X_∞, причем данные сужения имеют важные свойства, сформулированные в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть $A \in LR(X)$ обладает свойством стабилизации степеней, $m = m_A$, $X_0 = D(A^m), X_\infty = A^m 0$ — замкнутые подпространства, $X = X_0 \oplus X_\infty$, $A = A_0 \oplus A_\infty$, где $A_0 = A \mid X_0, A_\infty = A \mid X_\infty$. Тогда $A_0 \in EndX_0, A_\infty^{-1} \in EndX_\infty$ — нильпотентный оператор с индексом нильпотентности m, т.е. $(A_\infty^{-1})^m = 0$ и $(A_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$.*

◀ Покажем, что $A_0 \in EndX_0$. Для этого достаточно показать, что $A_0 \in LO(X_0)$, т.е. $A_0 0 = \{0\}$. Пусть $y \in A_0 0$. Заметим, что по определению сужения из этого следует, что $y \in X_0$. С другой стороны, $y \in A0 \subset X_\infty$. Поскольку $X_0 \cap X_\infty = \{0\}$, то $y = 0$. Что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что $A_\infty^{-1} \in EndX_\infty$ и является нильпотентным оператором. Очевидно, что $ImA_\infty = X_\infty$. Осталось показать, что он однозначный, т.е. $A_\infty^{-1}0 = \{0\}$ или, что эквивалентно, $KerA_\infty = \{0\}$. Предположим противное, что существует $x \neq 0, x \in A^m 0 \cap D(A)$, что $A_\infty x = A_\infty 0 = A0$. Тогда $Ax = A0$ и так как $0 \in A0$, то $x \in D(A^m)$. Получаем, что $x \in D(A^m) \cap A^m 0 = 0$. Получили противоречие, и, следовательно, $KerA_\infty = 0$.

Докажем, что A_∞^{-1} — нильпотентный оператор. Для этого сначала покажем, что $A_\infty^k = A^k \mid X_\infty$. Пусть $x \in X_\infty \cap D(A)$, тогда $A^k x = (A_0 \oplus A_\infty)^k x = (A_0 \oplus A_\infty)^{k-1}(A_0 0 + A_\infty x) = (A_0 \oplus A_\infty)^{k-1} A_\infty x = \ldots = A_\infty^k x$. Следовательно, $D(A_\infty^m) \subset D(A^m) \cap X_\infty = \{0\}$, т.е. $(A_\infty^m)^{-1} = (A_\infty^{-1})^m = 0$. Получаем, что $A_\infty^{-1} \in EndX_\infty$ и $(A_\infty^{-1})^m = 0$. Следовательно, A_∞^{-1} — нильпотентный оператор. Покажем, что $(A_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$, т.е. $D(A_\infty^{m-1}) \neq \{0\}$. Предположим противное. Тогда: $A^m 0 = A_\infty^m 0 = A_\infty^{m-1}(A_\infty 0 \cap D(A_\infty^{m-1})) = A_\infty^{m-1} 0 = A^{m-1} 0 \cap A^m 0 = A^{m-1} 0$, т.е. $A^m 0 = A^{m-1} 0$, а это невозможно по определению стабилизации степеней. Таким образом, $(A_\infty^{-1})^m = 0$, $(A_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$, и, следовательно, m — индекс нильпотентности оператора A_∞^{-1}. ▶

Для линейных операторов, действующих в конечномерном пространстве, выполняется следующее равенство $dimD(A) = dimImA + dimKerA$ (см. [2]). Для линейных отношений на конечномерном пространстве справедлива следующая

Теорема 2.2. *Для любого линейного отношения* $A \in LR(X)$ *имеет место равенство* $dimD(A) = dimImA + dimKerA - dimA0$.

◀ Имеет место включение $KerA \subset D(A)$, и, следовательно, мы можем подобрать такое подпространство $M \subset D(A)$, что $D(A) = KerA \oplus M$. Очевидно, что $ImA = A(M)$. Покажем, что $dimImA = dimM + dimA0$.

Для этого нужно доказать следующее: если $e_1,\ldots,e_k$ — набор линейно независимых векторов из M, где $k = dim\,M$, то любые векторы $y_1,\ldots,y_k$, $y_{k+1},\ldots,y_m$ такие, что $y_1 \in Ae_1,\ldots,y_k \in Ae_k$, а $y_{k+1},\ldots,y_m$ — какой-нибудь базис в $A0$, линейно независимы.

Пусть $a_1 y_1 + \ldots + a_m y_m = 0$. Заметим, что это возможно только тогда, когда $a_1 y_1 + \ldots + a_k y_k = 0$ и $a_{k+1} y_{k+1} + \ldots + a_m y_m = 0$, так как $a_1 y_1 + \ldots + a_k y_k \notin A0$. Отсюда сразу следует, что $a_{k+1} = \ldots = a_m = 0$. Пусть $a_{l+1} = \ldots = a_k = 0$ или $l = k$, если все $a_i, i = \overline{1,k}$ не равны нулю. Тогда из равенства $a_1 y_1 + \ldots + a_l y_l = 0$ следует, что $a_1 Ae_1 + \ldots + a_l Ae_l = A0$, т.е. $A(a_1 e_1 + \ldots + a_l e_l) = A0$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{l} a_i e_i \in KerA \cap M = \{0\}$. Таким образом, из линейной независимости $e_i, i = \overline{1,k}$ следует, что $a_i = 0, i = \overline{1,k}$. Следовательно, $a_1 = \ldots = a_m = 0$, т.е. $y_1,\ldots,y_m$ линейно независимы.

Итак, $dimImA = dimM + dimA0$ и $dimM = dimD(A) - dimKerA$, следовательно $dimD(A) = dimImA + dimKerA - dimA0$. ▶

Из нее сразу вытекают следующие результаты.

Следствие 2.1. *Если* $X = D(A^m) \oplus A^m 0$, *где* $m = m_A$, *то* $dimX = dimImA^m + dimKerA^m$.

Следствие 2.2. *Если* $D(A) = X$ *и* $KerA = 0$, *то* $A \in EndX$ *и является обратимым оператором в пространстве* $EndX$.

3. Конечность спектра и спектральное разложение линейного отношения

В этой части рассматриваются вопросы, связанные со спектром линейного отношения и строится его спектральное разложение (аналог спектрального разложения линейных операторов).

Определение 3.1. *Резольвентным множеством* отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\rho(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(A - \lambda I)^{-1} \in EndX$.

Определение 3.2. Отображение $R(\cdot, A) : \rho(A) \to EndX, R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$ называется *резольвентой* отношения A.

Определение 3.3. *Спектром* линейного отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* линейного отношения A, если $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Любой ненулевой вектор x из $Ker(A - \lambda I)$ называется собственным вектором отношения A, отвечающим собственному значению λ.

Заметим, что $KerR(\lambda_0, A) = A0, ImR(\lambda_0, A) = D(A)$ для всех $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Во избежание проблем, связанных с возможной пустотой спектра отношения, используется следующее

Определение 3.4. *Расширенным спектром* отношения $A \in LR(X)$ называется подмножество $\widetilde{\sigma}(A)$ из расширенной комплексной плоскости $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(A)$, если:

1) $A0 = \{0\}$, то есть $A \in LO(X)$;

2) $R(\cdot, A)$ допускает аналитическое расширение в точку ∞;

3) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} R(\lambda, A) = 0$.

В противном случае $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$. Множество $\widetilde{\rho}(A) = \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\sigma}(A)$ называют *расширенным резольвентным множеством* линейного отношения A.

В оставшейся части статьи линейное пространство X конечномерно.

Спектр и резольвентное множество линейного отношения характеризуют следующие леммы, доказательство которых можно найти в статье [1].

Лемма 3.1. *Пусть* $A \in LR(X)$. *Тогда* $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$ *эквивалентно* $A \in EndX$.

Лемма 3.2. *Для линейного отношения* $A \in LR(X)$ *справедливо равенство* $\widetilde{\sigma}(A) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \widetilde{\sigma}(A^{-1})\}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $A \in LR(X)$ *и* $X = X_0 \oplus X_\infty$, *где* $X_0 = D(A^m), X_\infty = A^m 0$, *где* $m = m_A$. *Тогда* $A = A_0 \oplus A_\infty, A_0 = A \mid X_0, A_\infty = A \mid X_\infty$ *и* $\sigma(A) = \sigma(A_0)$.

◀ Докажем сначала, что имеет место разложение $A = A_0 \oplus A_\infty$. Тот факт, что X_0 и X_∞ — инвариантные относительно A подпространства, был доказан в Лемме 2.1. Осталось показать, что $D(A) = (D(A) \cap X_0) \oplus (D(A) \cap X_\infty)$ и $A0 = (A0 \cap X_0) \oplus (A0 \cap X_\infty)$. Это сразу вытекает из следующих включений: $X_0 \subset D(A), A0 \subset X_\infty$.

Перейдем к доказательству равенства $\sigma(A) = \sigma(A_0)$. Представим спектр A в виде двух множеств $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A)$, где $\sigma_d(A)$ — *дискретный спектр*, т.е. содержит такие λ, что $A - \lambda I$ не является инъективным, а $\sigma_c(A)$ — *непрерывный спектр*, т.е. содержит λ, при которых $A - \lambda I$ не является сюръективным.

Очевидно, что $\sigma_d(A) = \sigma(A_0)$.

Рассмотрим $\sigma_c(A)$. Так как $A - \lambda I$ не сюръективен, то $Im(A - \lambda I) \neq X$. Так как $A = A_0 \oplus A_\infty$, следовательно, $A - \lambda I = (A_0 - \lambda I) \oplus (A_\infty - \lambda I)$ и $Im(A - \lambda I) = Im(A_0 - \lambda I) \oplus Im(A_\infty - \lambda I)$. Поскольку $A_\infty^{-1} \in EndX_\infty$, то $Im(A_\infty - \lambda I) = X_\infty$. Следовательно, $Im(A_0 - \lambda I) \neq X_0$, т.е. $Ker(A_0 - \lambda I) \neq \{0\}$. Итак, $\sigma(A) = \sigma_c(A) = \sigma_d(A) = \sigma(A_0)$, что и требовалось доказать.▶

Во всех следствиях будем считать, что выполнены условия теоремы.

Следствие 3.1. $\sigma(A) = \sigma_d(A)$ *для любого* $A \in LR(X)$.

Следствие 3.2. *Собственные векторы линейного отношения* A, *соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Следствие 3.3. *Расширенный спектр линейного отношения* $A \in LR(X)$ *представим в виде*

$$\tilde{\sigma}(a) = \sigma(A_0) \cup \tilde{\sigma}(A_\infty),$$

где

$$\tilde{\sigma}(A_\infty) = \begin{cases} \varnothing, & A0 = \{0\}, \\ \infty, & A0 \neq \{0\}. \end{cases}$$

Теорема 3.2. *Для линейного отношения* $A \in LR(X)$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $D(A^m) \oplus A^m 0 = X$ где $m = m_A$;

2) $|\widetilde{\sigma}(A)| \leq dimX$;

3) $\rho(A) \neq \varnothing$ (или $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$).

1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что $|\sigma(A)| = n = dimX$. Тогда $D(A^m) = X$ и $A \in EndX$. Поэтому $|\widetilde{\sigma}(A)| = |\sigma(A)| = n$. Если же $|\sigma(A)| < n$, то $|\widetilde{\sigma}(A)| \leq n$.

2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Тогда $B = R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} \in EndX$. В [2, § 31, лемма 1] доказано существование такого k, что $ImB^k \oplus KerB^k = X$, и, следовательно, $D(B^{-k}) \oplus B^{-k} 0 = X$. Так как

$$B^{-k} 0 = ((A - \lambda I)^{-1})^{-k} 0 = A^k 0,$$

$$D(B^{-k}) = D((A - \lambda I)^k) = D(A^k),$$

то $D(A^k) \oplus A^k 0 = X$.

Осталось доказать, что разложение справедливо при $k = m$.

Так как $D(A^k) \cap A^k 0 = 0$, то $A^{2k} = A^k (A^k 0 \cap D(A^k)) = A$, то $k \geq m$. Тогда $A^k 0 = A^m 0$ и $D(A^k) = D(A^m)$. Что и требовалось доказать.

Теорема 3.3. (Спектральное разложение). *Если для отношения* $A \in LR(X)$ *выполнено одно из условий теоремы 3.2, то имеет место следующее спектральное разложение:*

$$A = \sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \lambda_i P_i + Q \oplus A_\infty,$$

где $P_i \in EndX$ *— проекторы на корневые подпространства оператора* A_0, Q *— нильпотентный оператор из* $EndX_0$, A_∞^{-1} *— нильпотентный оператор из* $EndX_\infty$, $\tilde{\sigma}(A_\infty) = \{\infty\}$.

Данная теорема является прямым следствием теоремы 2.1., теоремы 3.1. и разложения для случая $A \in EndX$, которое можно найти в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. // Математический сборник. 2002 Т. 193, 11, С. 3—35.

2. *Баскаков А.Г.* Лекции по алгебре. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2001.

3. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.