ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 2

УДК 517.984

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2002 Е. Л. Ульянова*, А. Н. Шелковой

Воронежский государственный университет
Курский государственный медицинский университет

Для дифференциальных операторов второго порядка с нелокальными краевыми условиями и однородными краевыми условиями методом подобных операторов доказана равносходимость спектральных разложений.

В комплексном гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим дифференциальный оператор, задаваемый дифференциальным выражением вида

$$(\mathcal{L}x) = -\ddot{x} + \sum_{k=1}^{N} a_k \dot{x}(t_k), \tag{1}$$

где a_k — функции из $L_2[0,1]$

$$t_k \in [0,1],\, k = \overline{1,N},$$

и краевыми условиями

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{2}$$

В частности, такого класса $(N = 2)$ оператор возникает при переходе к сопряженному при исследовании оператора, действующего в $L_2[0,1]$, задаваемого выражением

$$Ly = -\ddot{y} \tag{3}$$

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = \int_0^1 a_0(t)y(t)dt,\ y(1) = \int_0^1 a_1(t)y(t)dt, \tag{4}$$

где $\dot{a}_0, \dot{a}_1 \in L_2[0,1]$.

Для исследования рассматриваемого класса используется вариант метода подобных операторов, позволяющий получить оценку сходимости спектральных разложений оператора с относительно конечномерным возмущением.

Приведем основные определения и теоремы.

Пусть H — бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 1. 2 оператора $A_i : D(A_i) \subset H \to H,\ i = 1,2,$ называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\,H$ (т. е. $U^{-1} \in End\,H$, $End\,H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H), такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и выполняется равенство $A_1Ux = UA_2x,\quad x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования подобия оператора A_1 в A_2.

Определение 2. Линейный оператор $C : D(C) \subset H \to H$ называется подчиненным оператору $A : D(A) \subset H \to H$, если выполнены следующие 2 условия:

1) $D(C) \supseteq D(A)$;

2) существует постоянная $M > 0$, такая, что

$$\|Cx\| \le M(\|Ax\| + \|x\|),\ \forall\, x \in D(A).$$

Определение 3. Тройка $(\mathcal{U}, J, \Gamma)$, $J : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\Gamma : \mathcal{U} \to End\,H$, называется допустимой для оператора A, а $\mathcal{U}$ — допустимым пространством возмущений, если:

1) $\mathcal{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в банахово пространство $\mathcal{L}_A(H)$ линейных операторов, подчиненных оператору A;

2) J, Γ — трансформаторы (т. е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов);

3) $(\Gamma X)x \in D(A)\ \forall\, x \in D(A)$ и имеет место равенство:

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX,\ X \in \mathcal{U}$$

(равенство понимается как равенство элементов из $\mathcal{U}$);

4) $X\Gamma Y, (\Gamma Y)X \in \mathcal{U}\ \forall\ X, Y$ и существуют постоянные $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, такие, что $\|\Gamma\| \le \gamma_1$ и $max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \le \gamma_2 \|X\|_* \|Y\|_*$;

* Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00189.

5) выполнены условия:

а) $Im\Gamma X \subset D(A)$ и $A\Gamma X \in End\,H$ или б) $\forall X \in \mathcal{U}$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует число $\nu_\varepsilon \in \rho(A)$ ($\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A), такое, что $\|XR(\nu_\varepsilon, A)\|_\infty < \varepsilon$, где $\|X\|_\infty = \sup\limits_{x \le 1}\|Xx\|$ — норма оператора в $End\,H$; $R(\nu_\varepsilon, A)$ — резольвента оператора A.

Здесь $Im\,\Gamma X$ — образ оператора ΓX. Непрерывность вложения банахова пространства $\mathcal{U}$ в $L_A(H)$ означает, что существует постоянная $M_0 > 0$, такая, что $\|B\|_A \le M_0 \|B\|_* \ \forall B \in \mathcal{U}$. Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ — нормальный оператор (см., например, [4]) (частный случай нормального — самосопряженный оператор), спектр которого представим в виде:

$$\sigma(A) = \overline{\cup \sigma_j},\ j \ge 1,$$

где σ_j — взаимно непересекающиеся компактные множества, и существуют последовательность $\nu_k \in \rho(A)$, такая, что

$$dist\,(\sigma(A), \nu_k) \longrightarrow \infty \text{ при } k \to \infty,$$

и $const\,\mathcal{K}$ такая, что

$$\frac{\nu_k}{dist\,(\sigma(A), \nu_k)} \le \mathcal{K};$$

P_j, $j \ge 1$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_j, $A_j = AP_j$, $j = 1, 2, \dots, A_j \in End\,H$, $|\sigma_j| = \sup\limits_{\lambda \in \sigma_j} |\lambda|$. В качестве пространства возмущений $\mathcal{U}$ рассматриваются операторы $B : D(A) \subset H \to H$, допускающие представление

$$B = B_0 A,\ B_0 \in \sigma_2(H)$$

(здесь $\sigma_2(H)$ — идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H, с нормой $\|\cdot\|_2$), причем существуют 2 ненулевые последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty, \{\beta_i\}_1^\infty$, такие, что имеет место оценка

$$\|P_j B_0 P_i\|_2 \le const\,\alpha_j \beta_i,\ i, j = 1, 2, \dots.$$

Наименьшая из констант, удовлетворяющая этому неравенству, определяет норму в $\mathcal{U}$. Пусть n — некоторое натуральное число, положим $\Delta_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \sigma_k$, $P(\Delta_n, A)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_n.

$$|\sigma_k| = \sup_{\lambda \in \sigma_k} |\lambda|,\ Q_1 = P(\Delta_n, A) = P_1 + P_2 + \dots + P_n,$$

$$Q_2 = I - Q_1.$$

Трансформаторы $J_n : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и $\Gamma_n : \mathcal{U} \to \sigma_2(H)$ определяются следующим образом

$$J_n X = Q_1 X Q_1 + Q_2 X Q_2.$$

$$\Gamma_n X = \Gamma_n^1 X + \Gamma_n^2 X,$$

где

$$\Gamma_n^1 X = \sum_{m \ge n+1} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k),\ \Gamma_n^2 X = = \sum_{m=1}^{n} \sum_{m \ge n+1} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k).$$

На операторных блоках $P_m X_0 P_k A$ трансформатор Γ_n определяется как решение уравнения

$$AP_m Y_{omk} - Y_{omk} A P_k = P_m X_0 P_k,$$

удовлетворяющее условию

$$P_m Y_{omk} P_k = Y_{0mk},$$

где либо $\{k \ge n+1, m \le n\}$, либо $\{k \le n, m \ge n+1\}$. Для всех остальных значений m и k $\Gamma_n(P_m X_0 P_k A) = 0$.

Теорема 1. Пусть n — натуральное число, такое, что

$$\gamma_1(n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{m \ge n+1} \frac{|\sigma_k|^2 \beta_k^2 \alpha_m^2 + \beta_m^2 \alpha_k^2 |\sigma_m|^2}{(dist\,(\sigma_m, \sigma_k))^2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max\left\{ \max_{j \le n} \left\{ \sum_{k \ge n+1} \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{dist\,(\sigma_j, \sigma_k)}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \sup_{j \ge n+1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{dist\,(\sigma_j,, \sigma_k)} \right\} \right\} < \infty,$$

причем выполнено условие

$$2 \max\{\gamma_1(n), \gamma_2(n)\} + \gamma_1(n) + \gamma_2(n) < 1,$$

тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n)$, где $X^*(n) \in \mathcal{U}$ имеет вид:

$$X^*(n) = X_{11}^*(n) + X_{12}^*(n) + X_{21}^*(n) + X_{22}^*(n), \quad (5)$$

где $X_{ij}^*(n) = Q_i X^*(n) Q_j, i, j = 1, 2,$ есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} X_{ii} = B_{ij} \Gamma X_{ji} + B_{ii} \quad (i = 1, j = 2) \vee (i = 2, j = 1) \\ X_{ij} = F_{ij}(X_{ij}), \end{cases} \quad (6)$$

где оператор $F_{ij} : \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ij}$ задается формулой

$$F_{ij}(X) = B_{ii} \Gamma X - (\Gamma X) B_{jj} - (\Gamma X)(B_{ji} \Gamma X) + B_{ij},$$

$B_{ij} = Q_i B Q_j$, $i, j = 1, 2,$ — блоки оператора $B \in \mathcal{U}$, являющегося возмущением оператора A, допустимое пространство возмущений $\mathcal{U}$ является прямой суммой четырех замкнутых подпространств вида

$$U_{ij} = \{Q_i X Q_j,\ X \in U\},\ i, j = 1, 2.$$

Оператор преобразования подобия имеет вид $I + \Gamma_n X^*(n)$.

Теорема 2. Пусть операторы A и $B \in \mathcal{U}$ таковы, что $\gamma_1(n) \to 0, \gamma_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, начиная с некоторого n_0, оператор $A-B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n), n \geq n_0$, где $X^*(n)$ представимо в виде (5) и $\| P(\Delta_n, A) - P(\tilde{\Delta}_n, A - B) \| \to 0$ при $n \to \infty$, где

$$\tilde{\Delta}_n = \sigma((A - J_n X^*(n)) \mid P(\Delta_n, A)H) \subset \sigma(A - B),$$

$P(\tilde{\Delta}_n, A - B)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\tilde{\Delta}_n$ оператора $A - B$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда для любого фиксированного $x \in H$

$$\left\| (I - P(\tilde{\Delta}_n, A - B))x - \sum_{i \geq n+1} P_i x \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Перейдем к исследованию спектральных свойств оператора $\mathcal{L} : D(A) \subset L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, задаваемого выражением (1). Представим его в виде

$$\mathcal{L}x = Ax - Bx,$$

где A порождается дифференциальным выражением $Ax = -\ddot{x}$ и краевыми условиями (2),

$$Bx = \sum_{i=1}^{2} a_i(t)\dot{x}(t_i),\ t_1 = 0,\ t_2 = 1. \tag{7}$$

Спектр оператора A представим в виде

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma_j, \text{ где } \sigma_j = \{\lambda_j = \pi^2 j^2\},\ j = 1, 2, \ldots,$$

λ_j — простые собственные значения оператора A, а собственные функции $e_j(t) = \sqrt{2}\sin \pi j t$ образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$. Положим $\Delta_1(n) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, P_n = P(\Delta_1(n), A), |\sigma_j| = |\lambda_j|, P_j = P\{\lambda_j, A\}$ — проектор Рисса, $j = 1, 2, \ldots$.

Теорема 3. Оператор $B : D(A) \subset L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, задаваемый соотношением (7), представим в виде

$$B = B_0 A,$$

где $B_0 \in \sigma_2(L_2[0;1])$ ($\sigma_2(L_2[0;1])$ — идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$), причем имеет место оценка

$$\left\| P_i B_0 P_j \right\| \leq \alpha_i \beta_j,\ i, j = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где

$$\alpha_i = 2\pi(|\int_0^1 a_0(t)\sin \pi i t\, dt| + |\int_0^1 a_1(t)\sin \pi i t\, dt|),\quad 1 = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

$$\beta_j = \frac{1}{\pi^2 j},\ j = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

(Доказательство приведено в работе [7]).

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Для любого натурального n

$$\gamma_1(n) = \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{k \geq n+1} \frac{|\lambda_k|^2 \beta_k^2 \alpha_m^2 + \beta_m^2 \alpha_k^2 |\lambda_m|^2}{|\lambda_m - \lambda_k|^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{11}$$

и кроме того $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_1(n) = 0$.

Доказательство. Выпишем выражения для величин, входящих в правую часть соотношения (11)

$$\alpha_n = 2\pi(|a_{0n}^{\sin}| + |a_{1n}^{\sin}|);$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi^2 n},\ n \in N;$$

$$a_{0n}^{\sin} = \int_0^1 a_0(t)\sin \pi n t\, dt;\ a_{1n}^{\sin} = \int_0^1 a_1(t)\sin \pi n t\, dt;$$

$$\lambda_n = \pi^2 n^2.$$

Подставляя значения величин $\lambda_k, \beta_k, \alpha_k$ в выражение для вычисления $\gamma_1(n)$, получаем

$$\gamma_1^2(n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \geq n+1} \frac{\pi^4 k^4 \dfrac{1}{\pi^4 k^2} \cdot 4\pi^2 \left(|a_{0m}^{\sin}| + |a_{1m}^{\sin}|\right)^2 + \pi^4 \cdot \dfrac{m^4}{m^2 \pi^4} \cdot 4\pi^2 \left(|a_{0k}^{\sin}| + |a_{1k}^{\sin}|\right)^2}{\pi^4 |m^2 - k^2|^2} =$$

$$= 4\pi^2 \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \geq n+1} \frac{k^2 \left(|a_{0m}^{\sin}| + |a_{1m}^{\sin}|\right)^2 + m^2 \left(|a_{0k}^{\sin}| + |a_{1k}^{\sin}|\right)^2}{|m^2 - k^2|^2} =$$

$$= 4\pi^2 \left[\sum_{k \geq n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{k^2 \left(|a_{0m}^{\sin}| + |a_{1m}^{\sin}|\right)^2}{(m+k)^2 |m-k|^2} + \sum_{k \geq n+1} \sum_{m=1}^{n} m^2 \frac{\left(|a_{0k}^{\sin}| + |a_{1k}^{\sin}|\right)^2}{(m+k)^2 |m-k|^2} \right].$$

Рассмотрим второе слагаемое в полученном выражении

$$\sum_{k\ge n+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{m^2\left(\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|\right)^2}{(m+k)^2|m-k|^2}=$$

$$=\sum_{k\ge n+1}\left(\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|\right)^2\sum_{m=1}^{n}\frac{m^2}{(m+k)^2|m-k|^2}\le$$

$$\le\sum_{k\ge n+1}\left(\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|\right)^2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(m-k)^2}.$$

$\left|a_{0k}^{\sin}\right|\to 0, \left|a_{1k}^{\sin}\right|\to 0$ при $k\to\infty$ как коэффициенты Фурье по синусам. Покажем, что сумма $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(m-k)^2}$ равномерно ограничена при всех $k\ge n+1$. Действительно

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(k-m)^2}=\sum_{l=k-1}^{k-n}\frac{1}{l^2}=\sum_{l=k-n}^{k-1}\frac{1}{l^2}<\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}<\infty.$$

Следовательно

$$\sum_{k\ge n+1}\left(\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|\right)^2\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(k-m)^2}\le$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\cdot\sum_{k\ge n+1}\left(\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|\right)^2.$$

Отсюда, поскольку $a_{jk}^{\sin}$ — есть коэффициенты Фурье, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\ge n+1}\left(\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|\right)^2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(k-m)^2}=0.$$

Рассмотрим теперь слагаемое $\sum_{k\ge n+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{k^2\left(\left|a_{0m}^{\sin}\right|+\left|a_{1m}^{\sin}\right|\right)^2}{(m+k)^2\,|m-k|^2}$. Этот ряд мажорируется рядом

$$\sum_{k\ge n+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{\left(\left|a_{0m}^{\sin}\right|+\left|a_{1m}^{\sin}\right|\right)^2}{(m-k)^2}.$$

Поскольку ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\left|a_{0m}^{\sin}\right|+\left|a_{1m}^{\sin}\right|\right)^2}{(m-k)^2}$ можно рассматривать как свертку двух функций на группе целых чисел $\mathbb{Z}$, каждая из которых принадлежит $l_1(\mathbb{Z})$, то и сама свертка будет функцией из $l_1(\mathbb{Z})$, а следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\ge n+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{\left(\left|a_{0m}^{\sin}\right|+\left|a_{1m}^{\sin}\right|\right)^2}{(m-k)^2}=0$$

как остаток сходящегося ряда. Это и означает стремление к 0 величины $\gamma_1(n)$. Теорема доказана.

Теорема 5. Для любого натурального n,

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\max\left\{\sum_{j\le n}\frac{|\lambda_k|\alpha_k\beta_k}{|\lambda_j-\lambda_k|}\right\};\right.$$

$$\left.\sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|\alpha_k\beta_k}{|\lambda_j-\lambda_k|}\right\}\right\}<\infty, \tag{12}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_2(n)=0.$$

Доказательство.

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\max_{j\le n}\left\{\sum_{k\ge n+1}\frac{\pi^2k^2\cdot 2\pi(|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|)\cdot\frac{1}{\pi^2k}}{|\pi^2j^2-\pi^2k^2|}\right\};\right.$$

$$\left.\sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2\cdot 2\pi(|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|)\cdot\frac{1}{\pi^2k}}{|\pi^2j^2-\pi^2k^2|}\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\left\{\max_{j\le n}\sum_{k\ge n+1}\frac{2\pi k(|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|)}{\pi^2|j^2-k^2|}\right\};\right.$$

$$\left.\sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi k(|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|)}{\pi^2|j^2-k^2|}\right\}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\max\left\{\max_{j\le n}\left\{\sum_{k\ge n+1}\frac{k(|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|)}{|j-k|(j+k)}\right\};\right.$$

$$\left.\sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k(|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|)}{|j-k|(j+k)}\right\}\right\}\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\max\left\{\max_{j\le n}\left\{\sum_{k\ge n+1}\frac{|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|}{|j-k|}\right\};\right.$$

$$\left.\sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|}{|j-k|}\right\}\right\}.$$

Как свертка двух функций, одна из которых принадлежит $l_1(\mathbb{Z})$ (функция $r(k)=|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|_1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_{0k}^{\sin}|+|a_{1k}^{\sin}|}{|j-k|}\to 0$ при $j\to\infty$. Поэтому $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ N:\forall\ j\ge N$

$$\forall\ n\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|}{|j-k|}<\varepsilon.$$

т. е. $\lim_{n\to\infty}\sup_{j\ge n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|a_{0k}^{\sin}\right|+\left|a_{1k}^{\sin}\right|}{|j-k|}=0$.

Теорема доказана.

На основе проведенных выше теорем 4 и 5 сформулируем утверждение, справедливое для рассматриваемого оператора (1).

Теорема 6. Пусть функции $\dot{a}_0, \dot{a}_1 \in L_2[0,1]$. Тогда, начиная с некоторого натурального n_0, оператор $A-B$ подобен оператору $A-J_nX^*(n), n \ge n_0$, где $X^*(n)$ представим в виде суммы решений системы (6) и $\|P(\Delta_1(n),A)-P(\tilde{\Delta}_1(n),A-B)\| \to 0$ и при $n \to \infty$.

Учитывая, что норма в последнем выражении берется в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, получим окончательную оценку

$$\left(\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 x(s)\tilde{e}_j(s)ds\right)\tilde{e}_j(t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 x(s)\sin\pi js\,ds\right)\sin\pi jt\right]^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

для любого фиксированного x из $L_2[0,1]$ при $n \to \infty$, где $\tilde{e}_j$ собственные (и, возможно, присоединенные) функции оператора $A-B$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. — 164 с.

2. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Изв. РАН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58. — № 4. — С. 3—32.

3. *Баскаков А.Г., Кацаран Т.К.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 8 — С. 1424—1433.

4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. — М.: Мир, 1974. Т. 3. — 661 с.

5. *Ульянова Е.Л.* Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дисс... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1998. — 100 с.

6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

7. *Шелковой А.Н.* Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями // Вестник факультета прикладной математики и механики. — Вып. 2. — Воронеж. 2000. С. 226—335.

8. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 504 с.