УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНО СОГЛАСОВАННОЙ НОРМЕ И РАДИУСЕ ГЕЛЬФАНДА

© 2002 Ю. В. Трубников, В. В. Юргелас

Витебский государственный университет, Беларусь
Воронежский государственный университет

Введено понятие спектрально согласованной векторной нормы (с нормой линейного ограниченного оператора). Приведен пример нормы, спектрально согласованной с классом линейных операторов. Аналог спектрального радиуса для нелинейного оператора, действующего в произвольном метрическом пространстве, назван радиусом Гельфанда. В частности, установлена связь между существованием у данного нелинейного оператора радиуса Гельфанда и его липшиц-непрерывностью в некоторой метрике, эквивалентной исходной.

1. Спектральный радиус. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное (вещественное или комплексное) банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$, норма элемента (оператора) $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ в котором стандартным образом индуцирована векторной нормой, то есть

$$|\!|\!| A |\!|\!| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|,\ A\in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}).$$

Согласно известной теореме И. М. Гельфанда [1] для каждого $A\in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ существует не зависящий от выбора эквивалентной нормы в $\mathfrak{X}$, предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\!|\!| A^n |\!|\!|} \equiv \operatorname{spr}(A), \tag{1}$$

именуемый *спектральным радиусом* оператора A, причем всегда

$$\operatorname{spr}(A) \le |\!|\!| A |\!|\!| . \tag{2}$$

Кроме того, $\operatorname{spr}(A) = \inf |\!|\!| A^n |\!|\!|^{1/n}$, $n\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$, хотя последовательность $(|\!|\!| A^n |\!|\!|^{1/n})$, в общем случае, не является релаксационной для функционала $|\!|\!|\cdot|\!|\!|: \mathfrak{L}(\mathfrak{X})\to\mathbb{R}_+(=[0,\infty))$ (соответствующий контрпример см. в [1]). Это обстоятельство затрудняет при практическом вычислении спектрального радиуса прямое использование формулы (1) (см. по этому поводу, например, [2]).

Непосредственно из (1) следует, что функционал $\operatorname{spr}: \mathfrak{L}(\mathfrak{X})\to\mathbb{R}_+$ абсолютно однороден, то есть $\operatorname{spr}(\alpha A) = |\alpha| \operatorname{spr}(A)$ для любого числа α, и полуаддитивен, то есть $\operatorname{spr}(A+B)\le \operatorname{spr}(A)+\operatorname{spr}(B)$, при дополнительном условии коммутируемости операторов A и B.

Если через $\sigma(A)$ обозначить спектр ограниченного оператора A (всегда непустой), то при выполнении условия

$$\operatorname{spr}(A) < |\lambda| \quad (\lambda\in\sigma(A)) \tag{3}$$

для резольвенты $\mathcal{R}(\lambda;A)\equiv(\lambda I-A)^{-1}$ оператора A имеет место представление в виде сходящегося (по норме $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$) операторного ряда К. Неймана

$$\mathcal{R}(\lambda;A) = \sum_{k\in N_0}\lambda^{-k-1}A^k, \quad \mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

В свою очередь, это означает, что при выполнении условия (3) линейное уравнение

$$\lambda x = Ax + f, \tag{4}$$

в котором $f\in\mathfrak{X}$ — заданный элемент, однозначно разрешимо в $\mathfrak{X}$ и его решение x_* допускает представление $x_*=\mathcal{R}(\lambda;A)f$.

Этот же результат получается, если $|\!|\!| A |\!|\!| < |\lambda|$. Поскольку $\operatorname{spr}(A)$ является более точной числовой характеристикой оператора A, нежели $|\!|\!| A |\!|\!|$, но сложнее вычислимой, то естественно попытаться построить в $\mathfrak{X}$ такую векторную норму, эквивалентную исходной, относительно которой величина нормы оператора была бы сколь угодно близка к величине его спектрального радиуса. Видимо, впервые такая попытка была предпринята М. А. Красносельским в [3] (см. также [4]). В случае конечномерного $\mathfrak{X}$ эта задача имеет красивое решение в терминах так называемой модифицированной жордановой формы матрицы исходного оператора [5] (в [6] имеется еще одно решение этой задачи, основанное на классической теореме Шура об унитарной триангуляции матриц). Ниже предлагается более простой способ построения такой нормы по сравнению с предложенным в [3, 4].

2. Спектрально согласованная норма. Для заданных $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ и $\varepsilon > 0$ назовем норму $\|\cdot\|_\varepsilon$ в $\mathfrak{X}$ *спектрально согласованной* с A, если для индуцированной ею операторной нормы $|\cdot|_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\operatorname{spr}(A) \le | A_\varepsilon | \le \operatorname{spr}(A) + \varepsilon. \tag{5}$$

Функционал

$$\varphi(x) \equiv \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varphi_k(x)$$

назовем *верхним функционалом* семейства вещественных функционалов (φ_k), $\varphi_k : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Верхний функционал семейства*

$$\varphi_k(x) \equiv \frac{\|A^k x\|}{(\operatorname{spr}(A) + \varepsilon)^k}, \, k \in \mathbb{N}_0 \tag{6}$$

является нормой в $\mathfrak{X}$, *спектрально согласованной с* A *и эквивалентной исходной норме* $\|\cdot\|$.

Доказательство. Обозначим через $\|x\|_\varepsilon$ верхний функционал семейства (6), очевидно, являющийся нормой на $\mathfrak{X}$. Эквивалентность $\|\cdot\|_\varepsilon$ и $\|\cdot\|$ вытекает из неравенства

$$\|x\| \le \|x\|_\varepsilon \le \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{| A^k |}{(\operatorname{spr}(A) + \varepsilon)^k} \|x\|, \, x \in \mathfrak{X}.$$

Покажем теперь, что операторная норма $|\cdot|_\varepsilon$, индуцированная $\|\cdot\|_\varepsilon$ удовлетворяет (5). В самом деле, левая часть неравенства (5) выполняется, поскольку в любой эквивалентной норме имеет место (2), так что $\operatorname{spr}(A) \le | A |_\varepsilon$. Докажем справедливость правой части:

$$\|Ax\|_\varepsilon = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varphi_k(Ax) = (\operatorname{spr}(A) + \varepsilon) \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varphi_{k+1}(x) \le$$
$$\le (\operatorname{spr}(A) + \varepsilon) \|x\|_\varepsilon, \, x \in X.$$

Одна и та же норма может быть спектрально согласованной не с одним, а с целым множеством операторов из $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ (подчеркнем важность этого обстоятельства в вопросах сходимости итерационных процессов).

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{K} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ − *компактное множество попарно коммутирующих операторов. Тогда в* $\mathfrak{X}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая норма* $\|\cdot\|_\varepsilon$, *эквивалентная* $\|\cdot\|$, *что*

$$| A |_\varepsilon \le \operatorname{spr}(A) + \varepsilon \quad \forall A \in \mathcal{K}. \tag{7}$$

Доказательство. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, выделим в $\mathcal{K}$ конечную выделим в $\varepsilon / 3$-сеть $\mathcal{N} = \{A_1, A_2, \ldots A_m\}$. Согласно определению это означает, что для любого оператора $A \in \mathcal{K}$ найдется такой оператор $A_j \in \mathcal{N}$, что будет выполнено неравенство

$$| A_j - A | \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Рассмотрим далее, «многомерное» семейство функционалов

$$\varphi_k(x) \equiv \frac{\|A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_m^{k_m} x\|}{(\operatorname{spr}(A_1) + \frac{\varepsilon}{3})^{k_1} \cdots (\operatorname{spr}(A_m) + \frac{\varepsilon}{3})^{k_m}},$$
$$x \in \mathfrak{X},$$

где k — мультииндекс: $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $k_j \in \mathbb{N}_0$, $1 \le j \le m$, и его верхний функционал обозначим через $\|x\|_\varepsilon$:

$$\|x\|_\varepsilon = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varphi_k(x), \, \mathbb{N}_0^m = \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0 \ \ (m \text{ раз})$$

(здесь supremum берется по всем неотрицательным целым k_j, $1 \le j \le m$,).

Оценим теперь величину $\|Ax\|_\varepsilon$ для произвольного A из $\mathcal{K}$ С учетом (8) получаем

$$| Ax |_\varepsilon = \sup_{k \in N_0^m} \varphi_k(Ax) \le | A - A_j | \sup_{k \in N_0^m} \varphi_k(x) + \sup_{k \in N_0^m} \varphi_k(A_j x) \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3} \|x\|_\varepsilon + (\operatorname{spr}(A_j) + \frac{\varepsilon}{3}) \sup_{k \in N_0^m} \varphi_k(x) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{3} \|x\|_\varepsilon + (\operatorname{spr}(A_j) - \operatorname{spr}(A) + \operatorname{spr}(A) + \frac{\varepsilon}{3}) \|x\|_\varepsilon \le$$
$$\le \frac{2\varepsilon}{3} \|x\|_\varepsilon + | \operatorname{spr}(A_j) - \operatorname{spr}(A) | \, \|x\|_\varepsilon + \operatorname{spr}(A) \|x\|_\varepsilon \le$$
$$\le (\operatorname{spr}(A) + \frac{2\varepsilon}{3} + | A_j - A |) \|x\|_\varepsilon \le (\operatorname{spr}(A) + \varepsilon) \|x\|_\varepsilon .$$

Итак, выполнено (7) и теорема доказана.

Приведем пример нормы, спектрально согласованной с конкретным классом операторов. Пусть $\mathfrak{X} = C(\Omega)$ — банахово пространство непрерывных комплекснозначных функций, определенных на ограниченном замкнутом множестве Ω конечномерного эвклидова пространства, с чебышевской нормой: $\|x\| = \sup | x(t) |$, $t \in \Omega$. Рассмотрим класс линейных интегральных операторов $A : C(\Omega) \to C(\Omega)$ вида

$$(Ax)(t) = \int_\Omega f(t) g(s) x(s) ds,$$

где $f, g, x \in C(\Omega)$.

Лемма 2. *Для каждой пары* $f, g \in C(\Omega)$ *имеет место представление*

$$\|x\|_\varepsilon = \max\{\|x\|; \frac{\|f\|}{(\operatorname{spr} A + \varepsilon)} \,|\int_\Omega g(s)x(s)\,ds\,|\},$$

в котором

$$\operatorname{spr} A = |\int_\Omega g(s)f(s)\,ds\,|.$$

3. Аналог спектрального радиуса для нелинейного оператора. Формула (1) позволяет естественным образом перенести понятие спектрального радиуса на случай операторов, вообще говоря, нелинейных, действующих в произвольном метрическом пространстве.

Итак, пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — метрическое пространство, $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ — нелинейный оператор, $F^n(x) \equiv F(F\ldots(F(x))\ldots)$ (n символов F). Если пространство $\mathfrak{X}$ и оператор F таковы, что существует конечный

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\neq y} \left(\frac{\rho(F^n(x),F^n(y))}{\rho(x,y)} \right)^{\frac{1}{n}} \equiv \operatorname{rg}(F), \qquad (10)$$

то неотрицательное число $\operatorname{rg}(F)$ назовем *радиусом Гельфанда* оператора F.

Ясно, что в случае линейного F и нормированного $\mathfrak{X} : \operatorname{rg}(F) = \operatorname{spr}(F)$.

Оказывается, что существование конечного радиуса Гельфанда нелинейного оператора является достаточным условием его липшиц-непрерывности в некоторой метрике, эквивалентной исходной.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{X}, \rho)$ *— полное метрическое пространство, оператор* $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ *непрерывен и* $\operatorname{rg}(F) : 0 < \operatorname{rg}(F) < +\infty$ *— его радиус Гельфанда.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *в* $\mathfrak{X}$ *можно построить метрику* ρ_ε, *топологически эквивалентную метрике* ρ *и такую, что*

$$\rho_\varepsilon(F(x), F(y)) \le (\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)\rho_\varepsilon(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{X}. \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу определения радиуса Гельфанда можно подобрать такой номер $n = n(\varepsilon)$, что будет иметь место неравенство

$$\rho(F^n(x), F^n(y)) \le (\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)^n \rho(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{X}. \qquad (12)$$

Построим теперь новую метрику ρ_ε, положив для любых $x, y \in \mathfrak{X}$

$$\rho(x, y) = \sum_{0\le k\le n-1} \frac{\rho(F^k(x), F^k(y))}{(\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)^k} \qquad (13)$$

(здесь $F^0 = F$). Эквивалентность этой метрики исходной следует, с одной стороны, из очевидного неравенства $\rho(x, y) \le \rho_\varepsilon(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{X}$, а с другой стороны — из того, что согласно (13) и непрерывности оператора F любая последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{X}$, сходящаяся к элементу x_0 по метрике ρ, будет сходиться к x_0 и по метрике ρ_ε.

Установим неравенство (11). Согласно (13) и (12)

$$\rho_\varepsilon(F(x), F(y)) = \sum_{0\le k\le n} \frac{\rho(F^{k+1}(x), F^{k+1}(y))}{(\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)^k} =$$
$$= (\operatorname{rg}(F) + \varepsilon) \sum_{0\le k\le n} \frac{\rho(F^k(x), F^k(y))}{(\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)^k} =$$
$$= (\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)(\rho_\varepsilon(x, y) - \rho(x, y)) +$$
$$+ \frac{\rho(F^n(x), F^n(y))}{(\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)^{n-1}} \le (\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)\rho_\varepsilon(x, y),$$

что и доказывает (11).

Следствие. *Если некоторая степень* F^j *оператора* F *является сжимающим оператором в пространстве* $(\mathfrak{X}, \rho)$, *то уравнение*

$$x = F(x)$$

однозначно разрешимо.

Доказательство. В самом деле, если для некоторого $\alpha \in (0,1)$ и любых $x, y \in \mathfrak{X}$

$$\rho(F^j(x), F^j(y)) \le \alpha\rho(x, y),$$

то

$$\operatorname{rg}(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\neq y} \left(\frac{\rho(F^{jn}(x), F^{jn}(y))}{\rho(x, y)} \right)^{\frac{1}{nj}} \le$$
$$\le \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{\alpha^n \rho(x, y)}{\rho(x, y)} \right)^{\frac{1}{nj}} = \alpha^{\frac{1}{j}},$$

а, значит, оператор F является сжимающим в пространстве $(\mathfrak{X}, \rho_\varepsilon)$, поскольку, взяв ε из условия $\alpha < (1 - \varepsilon)^j$, из (11) получим:

$$\rho_\varepsilon(F(x), F(y)) \le (\operatorname{rg}(F) + \varepsilon)\rho_\varepsilon(x, y) <$$
$$< (\alpha^{\frac{1}{j}} + \varepsilon)\rho_\varepsilon(x, y).$$

Рассмотрим квазилинейный вариант уравнения (4):

$$\lambda x = F(x) + f, \qquad (14)$$

в котором $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный параметр, $f \in \mathfrak{X}$ — заданный элемент, $F(\theta) = \theta$. Следуя

[4], назовем *резольвентой нелинейного оператора* F оператор $\mathcal{R}$, ставящий при каждом λ в соответствие элементу f из $\mathfrak{X}$ единственное решение $x_* = x_*(\lambda; F; f)$ уравнения (14), если оно существует. Таким образом, $x_* = \mathcal{R}(\lambda; F; f)f$ и $\lambda\mathcal{R}(\lambda; F)f = F(\mathcal{R}(\lambda; F)f) + f$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, метрика ρ_ε функционально однородна в том смысле, что для некоторой функции $\chi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, принимающей положительные значения при $|\lambda| > 0$, любых $x, y \in \mathfrak{X}$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\rho_\varepsilon(\lambda x, \lambda y) = \chi(|\lambda|)\rho_\varepsilon(x, y). \tag{15}$$

Если, наконец,

$$\chi\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) < \frac{1}{\mathrm{rg}(F)+\varepsilon}, \tag{16}$$

то

1) $\mathfrak{D}(\mathcal{R}) = \mathfrak{X}$;

2) *имеет место тождество*

$$\begin{gathered}\mathcal{R}(\mu; F)f - \mathcal{R}(\lambda; F)f = \mathcal{R}(\mu; F)(\lambda\mathcal{R}(\lambda; F)f - \\ -F(\mathcal{R}(\lambda; F)f)) - \mathcal{R}(\lambda; F)(\mu\mathcal{R}(\mu; F)f - \\ -F(\mathcal{R}(\mu; F)f)).\end{gathered} \tag{17}$$

Доказательство. Утверждение 1) теоремы следует из того, что при выполнении условия (16) оператор $(1/\lambda)(F(\cdot) + f) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ является сжимающим в пространстве $(\mathfrak{X}, \rho_\varepsilon)$.

Далее, так как $\mathcal{R}(\lambda; F)f$ и $\mathcal{R}(\mu; F)f$ являются решениями уравнения (14), то верны равенства

$$f = \lambda\mathcal{R}(\lambda; F)f - F(\mathcal{R}(\lambda; F)f),$$
$$f = \mu\mathcal{R}(\mu; F)f - F(\mathcal{R}(\mu; F)f).$$

Применяя к обеим частям первого равенства оператор $\mathcal{R}(\mu; F)$, а второго – $\mathcal{R}(\lambda; F)$, и вычитая почленно полученные равенства, получим (17).

Отметим, что (17) является нелинейным аналогом известного тождества Гильберта для резольвент линейных операторов.

4. Спектральный радиус оператора Фредгольма. В продолжение рассмотренного выше примера установим удобную формулу для вычисления спектрального радиуса линейного интегрального оператора Фредгольма с вырожденным ядром

$$(Ax)(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i(t)g_i(s)x(s)\,ds,$$

где Ω — ограниченное множество эвклидова конечномерного пространства, $f_i, g_i \in \mathbb{C}(\Omega)$ — заданные функции, $x \in C(\Omega)$, так что A действует в $C(\Omega)$.

Далее, введем в рассмотрение квадратную $n \times n$ матрицу $\Gamma = (\omega_{ij})$, элементами которой являются числа

$$\omega_{ij} \equiv \int_\Omega g_i(s)f_j(s)\,ds,$$

а также векторы $d = (d_1, \ldots, d_n)^T$ с компонентами

$$d_k \equiv \int_\Omega g_k(s)x(s)\,ds,\ 1 \le k \le n$$

и $f(t) \equiv (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$. Наконец, через $\langle a, b\rangle$ обозначим эвклидово скалярное произведение векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$: $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$.

Лемма 3. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо представление*

$$(A^m x)(t) = \langle f(t), \Gamma^{m-1}d\rangle. \tag{18}$$

Доказательство проведем индукцией по m. При $m = 1$ равенство в (18) очевидно. Если через $\omega_{ij}^{(m-1)}$ обозначить элементы матрицы Γ^{m-1}, а через $(\Gamma^{m-1}d)_k$ – k-ую компоненту вектора $\Gamma^{m-1}d$, то, сделав шаг индукции, получим

$$\begin{gathered}(A^{m+1}x)(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i(t)g_i(s)\sum_{k=1}^n f_k(s)(\Gamma^{m-1}d)_k ds = \\ = \sum_{i=1}^n f_i(t)\sum_{k=1}^n \int_\Omega g_i(s)f_k(s)\,ds(\Gamma^{m-1}d)_k = \\ = \sum_{i=1}^n f_i(t)\sum_{k=1}^n \omega_{ik}(\Gamma^{m-1}d)_k = \sum_{i=1}^n f_i(t)(\Gamma^m d)_k = \\ = \langle f(t), \Gamma^m d\rangle,\end{gathered}$$

что и доказывает (18).

Равенство (18) приводит к следующему результату.

Теорема 4. *Если системы комплекснозначных функций $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ и $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ являются линейно независимыми, то имеет место равенство*

$$\mathrm{spr}A = \mathrm{spr}\Gamma.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01–01–00408.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

2. *Коротков Н.А.* Один итерационный процесс для вычисления спектрального радиуса матриц // Проблемы системотехники и АСУ. — Л., 1983. — С. 85—91.

3. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962. — 394 с.

4. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975. — 560 с.

6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.