УДК 517.988.8

КОЭРЦИТИВНАЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2002 В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Линейные параболические уравнения, заданные в вариационной форме, решаются приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера. Установлены коэрцитивные энергетические оценки погрешности приближенных решений. Эти оценки ориентированы на применение проекционных подпространств типа конечных элементов и дают как сходимость приближенных решений к точному, так и указывают на скорость этой сходимости по временной и пространственным переменным.

Рассмотрим тройку гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения предполагаются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$, где $T < \infty$, на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных форм $l(t,u,v)$. Предположим, что для всех $u, v \in V$ функция $t \to l(t,u,v)$ измерима на $[0,T]$ и выполнены оценки:

$$\begin{gathered} \left|l(t,u,v)\right| \le M_1 \|u\|_V \|v\|_V , \\ \operatorname{Re} l(t,u,u) + \lambda \|u\|_H^2 \ge \delta \|u\|_V^2 , \end{gathered} \tag{1}$$

где $\lambda \ge 0$, $\delta > 0$. Форма $l(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}(t): V \to V'$ такой, что $l(t,u,v) = (\mathcal{L}(t)u, v)$ и $\|\mathcal{L}(t)\|_{V \to V'} \le M_1$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением в H.

В пространстве V' рассмотрим задачу Коши

$$u'(t) + \mathcal{L}(t)u(t) = f(t),\ u(0) = u^0. \tag{2}$$

Производные функций понимаются в обобщенном смысле.

Примеры модельных параболических задач, сводящихся к (2), можно найти, например, в [1, 2]. Отметим, что задача (2) является абстрактным аналогом начально-краевых задач для параболических уравнений как с краевыми условиями Дирихле, так и Неймана, а также и смешанными краевыми условиями. Кроме того, можно рассматривать задачи произвольного $2m\,(m \ge 1)$ порядка по пространственным переменным.

Предположим, что в задаче (2) $u^0 \in V$, функция $f \in L_2(0,T;H)$, а решение $u(t)$ такое, что $u'(\cdot), \mathcal{L}(\cdot)u(\cdot) \in L_2(0,T;H)$, $u(\cdot) \in C([0,T],V)$, почти всюду на $[0,T]$ удовлетворяется уравнение и начальное условие (2). Пусть также справедлива оценка

$$\begin{gathered} \max_{0 \le t \le T} \left\|u(t)\right\|_V^2 + \int_0^T \left(\left\|u'(t)\right\|_H^2 + \left\|\mathcal{L}(t)u(t)\right\|_H^2 \right) dt \le \\ \le M\{\left\|u^0\right\|_V^2 + \int_0^T \left\|f(t)\right\|_H^2 \, dt\} = MR(u^0, f). \end{gathered} \tag{3}$$

В таком случае задача (2) называется коэрцитивно разрешимой в пространстве $L_2(0,T;H)$. Описание таких задач можно найти, например, в [3, 4, 5]. Заметим, что для обоснования такой разрешимости задачи (2) приходится требовать достаточно высокую гладкость по времени формы $l(t,u,v)$. Здесь для $u, v \in V$ и $t, s \in [0,T]$ предполагается

$$\begin{gathered} \left|l(t,u,v) - l(s,u,v)\right| \le M_2 \left|t-s\right|^\gamma \|u\|_V \|v\|_V , \\ 1/2 < \gamma \le 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Задачу (2) решаем приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера.

Опишем некоторые факты, связанные с проекционными подпространствами. Через V_h, где h — положительный параметр, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup\left|(u_h, v_h)\right|$, где точная верхняя граница берется по $v_h \in V_h$ с $\|v_h\|_V = 1$. Нетрудно видеть, что $\|u_h\|_{V_h'} \le \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортопроектор в пространстве H на V_h. В [6] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_h : V' \to V_h'$ и для $u \in V'$ справедлива оценка $\|\bar{P}_h u\|_{V_h'} \le \|u\|_{V'}$. Отметим также для $u_h \in V_h$ оценку $\|u_h\|_{V'} \le \|P_h\|_{V\to V} \|u_h\|_{V_h'}$ и для $u \in V'$ оценку $\|\bar{P}_h u\|_{V'} \le \|P_h\|_{V\to V} \|u\|_{V'}$ [7]. Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо важное соотношение $(\bar{P}_h u, v) = (u, P_h v)$ [8].

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$, где N натуральное число, разбиение отрезка $[0,T]$. В подпространстве V_h рассмотрим разностную задачу

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau_k^{-1} + \bar{P}_h \mathcal{L}(t_k)\, u_k^h = f_h^k \ (k = \overline{1,N}), \quad (5)$$

где $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным, и

$$f_h^k = \frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h f(t)\, dt.$$

Обозначим $\tau = \max \tau_k$. Легко показать, что задача (5), по крайней мере для $0 < \tau \le \lambda^{-1}$, имеет единственное решение.

Для получения оценок погрешностей в случае $\lambda \ne 0$ в (1) сделаем еще одно естественное предположение о шагах по времени. Пусть существует $b \ge 1$ такое, что $\tau N \le bT$.

Обратим внимание, что в условиях слабой разрешимости задачи (2) энергетическая сходимость проекционно-разностного метода, аналогичного (5), была получена в работе [9] при условии согласования шагов по времени и пространству. В условиях коэрцитивной разрешимости и без согласования шагов по времени и пространству энергетическая сходимость проекционно-разностного метода рассматривалась в [10] для параболического уравнения второго порядка с краевыми условиями Дирихле.

Лемма 1. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (2), а u_k^h — решение задачи (5). Тогда для $z_k^h = P_h u(t_k) - u_k^h$ (при $\lambda > 0$, по крайней мере, для таких τ, что $2\lambda\tau < 1$) справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\|z_k^h\|_V^2 \tau_k + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau_k^{-1}\|_{V'_h}^2 \tau_k\right) + \max_{1\le k\le N}\|z_k^h\|_H^2 \le M\{\|P_h u^0 - u_0^h\|_H^2 + \int_0^T \|(I-P_h)u(t)\|_V^2\, dt + \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h[u(t_k) - u(t)]\|_V^2\, dt + M_2 \tau^{2\gamma}\int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt\}. \quad (6)$$

Доказательство. Из (2) и (5) следует тождество

$$(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau_k^{-1} + \bar{P}_h \mathcal{L}(t_k)\, z_k^h = \frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\bar{P}_h \mathcal{L}(t_k) P_h u(t_k) - \bar{P}_h \mathcal{L}(t) u(t)\right] dt = \varphi_h^k. \quad (7)$$

Как и в сходной ситуации в [9], из (7) получается оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\|z_k^h\|_V^2 \tau_k + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau_k^{-1}\|_{V'_h}^2 \tau_k\right) + \max_{1\le k\le N}\|z_k^h\|_H^2 \le M\{\|z_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\|\varphi_h^k\|_{V_h'}^2 \tau_k\}. \quad (8)$$

Представим φ_h^k в виде

$$\varphi_h^k = \frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\bar{P}_h\mathcal{L}(t_k)[P_h u(t_k) - P_h u(t)]\, dt + \frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\bar{P}_h\mathcal{L}(t_k)(P_h - I)u(t)\, dt + \frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\bar{P}_h[\mathcal{L}(t_k) - \mathcal{L}(t)]u(t)\, dt.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\|\varphi_h^k\|_{V_h'}^2 \tau_k \le M_1^2 \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k) - u(t)]\|_V^2\, dt + M_1\int_0^T \|(P_h - I)u(t)\|_V^2\, dt + \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[\mathcal{L}(t_k) - \mathcal{L}(t)]u(t)\|_{V'}^2\, dt. \quad (9)$$

Далее получим из (4) для $u \in V$

$$\|[\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(s)]u\|_{V'} = \sup_{v\in V}\frac{|([\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(s)]u, v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v\in V}\frac{|l(t,u,v) - l(s,u,v)|}{\|v\|_V} \le M_2 |t-s|^\gamma \|u\|_V.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[\mathcal{L}(t_k) - \mathcal{L}(t)]u(t)\|_{V'}^2 dt \le M_2 \tau^{2\gamma}\int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt. \quad (10)$$

В результате, из (8)—(10) следует (6).

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (2). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k) - u(t)\|_V^2\, dt \le \tau M R(u^0, f), \quad (11)$$

где $R(u^0, f)$ определена в (3).

Доказательство. Напомним, что в условии (1) параметр $\lambda \ge 0$. В случае $\lambda > 0$ задачу (2) запишем в эквивалентном виде

$$u'(t)+\mathcal{L}_\lambda(t)u(t)=f_\lambda(t),\ u(0)=u^0, \qquad (12)$$

где $\mathcal{L}_\lambda(t)=\mathcal{L}(t)+\lambda I$, $f_\lambda(t)=f(t)+\lambda u(t)$. Заметим, что $f_\lambda\in L_2(0,T;H)$. Для оператора $\mathcal{L}_\lambda(t)$ соответствующая форма для $u,v\in V$ имеет вид

$$l_\lambda(t,u,v)=(\mathcal{L}_\lambda(t)u,v)=l(t,u,v)+\lambda(u,v).$$

Форма $l_\lambda(t,u,v)$ удовлетворяет условиям:

$$\left|l_\lambda(t,u,v)\right|\le(M_1+c\lambda)\,\|u\|_V\,\|v\|_V\,,$$

$$\operatorname{Re} l_\lambda(t,u,u)\ge\delta\,\|u\|_V^2\,,$$

$$\left|l_\lambda(t,u,v)-l_\lambda(s,u,v)\right|\le M_2\,|t-s|^\gamma\,\|u\|_V\,\|v\|_V$$

$$(1/2<\gamma\le 1),$$

из которых следует (см., напр., [11]), что оператор $\mathcal{L}_\lambda(t)$ порождает семейство эволюционных операторов $U_\lambda(t,s)$ $(0\le s\le t\le T)$ класса C^1 таких, что решение задачи (12) представимо в виде

$$u(t)=U_\lambda(t,0)u^0+\int_0^t U_\lambda(t,s)f_\lambda(s)\,ds.$$

Отсюда для $t\in[t_{k-1},t_k]$ следует тождество

$$u(t_k)-u(t)=\int_t^{t_k}U_\lambda(t_k,s)f_\lambda(s)\,ds+[U_\lambda(t_k,t)-I]u(t),$$

которое приводит к оценке

$$\|u(t_k)-u(t)\|_V^2\le 2\left\|\int_t^{t_k}U_\lambda(t_k,s)f_\lambda(s)\,ds\right\|_V^2+$$

$$+2\left\|[U_\lambda(t_k,t)-I]u(t)\right\|_V^2.$$

Из непрерывного вложения $V\subset H$ и оценки (3) на промежутке $[t,t_k]$ следует оценка

$$\left\|\int_t^{t_k}U_\lambda(t_k,s)f_\lambda(s)\,ds\right\|_V^2\le M\int_t^{t_k}\|f_\lambda(s)\|_H^2\,ds\le$$

$$\le 2M\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|f(t)\|_H^2\,dt+\lambda^2c\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)\|_V^2\,dt\Big).$$

В [11] для $v\in D[\mathcal{L}_\lambda(t)]=D[\mathcal{L}(t)]=\{v\in V\,|\,\mathcal{L}(t)v\in H\}$ установлена оценка

$$\left\|[U_\lambda(t_k,t)-I]v\right\|_V\le c_1(t_k-t)^{1/2}\left\|\mathcal{L}_\lambda(t)v\right\|_H.$$

В таком случае почти при всех $t\in[t_{k-1},t_k]$ получим

$$\left\|[U_\lambda(t_k,t)-I]u(t)\right\|_V^2\le c_1^2\tau\left\|\mathcal{L}_\lambda(t)u(t)\right\|_H^2\le$$

$$\le 2c_1^2\tau\big(\|\mathcal{L}(t)u(t)\|_H^2+\lambda^2c\,\|u(t)\|_V^2\big).$$

В результате приходим к оценке

$$\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt\le$$

$$\le M\tau\left\{\int_0^T\|f(t)\|_H^2\,dt+\int_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt+\int_0^T\|\mathcal{L}(t)u(t)\|_H^2\,dt\right\}.$$

Осталось воспользоваться оценкой (3).

Теорема. *Пусть задача (2) коэрцитивно разрешима в пространстве $L_2(0,T;H)$ и выполняется условие (4). Пусть $u(t)$ − решение задачи (2), а u_k^h − решение задачи (5). Пусть последовательность подпространств $\{V_h\}$ такова, что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда справедливы (при $\lambda>0$, по крайней мере, для таких τ, что $2\lambda\tau<1$) следующие оценки погрешности:*

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2\le M\{\left\|P_hu^0-u_0^h\right\|_H^2+$$

$$+\max_{0\le t\le T}\left\|(I-P_h)u(t)\right\|_H^2+ \qquad (13)$$

$$+\int_0^T\left\|(I-P_h)u(t)\right\|_V^2\,dt+\tau R(u^0,f)\},$$

$$\sum_{k=1}^N\{\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2\tau_k+\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau_k}\Big)dt\right\|_H^2\}\le$$

$$\le M\{\left\|P_hu^0-u_0^h\right\|_H^2+\int_0^T\left\|(I-P_h)u(t)\right\|_V^2\,dt+\tau R(u^0,f)\}, \qquad (14)$$

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau_k}\right\|_{V'}^2\tau_k\le$$

$$\le M\{\left\|P_hu^0-u_0^h\right\|_H^2+\int_0^T\left\|(I-P_h)u(t)\right\|_V^2\,dt+ \qquad (15)$$

$$+\int_0^T\left\|(I-P_h)u'(t)\right\|_{V'}^2\,dt+\tau R(u^0,f)\},$$

где $R(u^0,f)$ определена в (3).

Доказательство. Воспользуемся оценкой (6), в которой $\tau^{2\gamma}\le\tau$, так как $2\gamma\ge 1$ и $0<\tau\le 1$. Затем воспользуемся оценками (11) и (3). Таким образом, получим оценку (13).

Из оценки

$$\sum_{k=1}^N\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2\tau_k\le$$

$$2\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t_k)-u(t)\right\|_V^2\,dt+2\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2\,dt$$

и тождества

$$u(t)-u_k^h=(I-P_h)u(t)+P_h[u(t)-u(t_k)]+z_k^h$$

следует оценка для первого слагаемого в левой части (14). Оценка в (14) второго слагаемого получается из (6), (3) и оценки

$$\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau_k}\Big)dt\right\|_H^2\le$$

$$\le 2\tau\int_0^T\left\|(I-P_h)u'(t)\right\|_H^2\,dt+2\sum_{k=1}^N\left\|z_k^h-z_{k-1}^h\right\|_H^2.$$

Аналогично, с учетом оценки

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau_k}\right\|_{V'}^2\tau_k\le$$

$$2\int_0^T\|(I-P_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt+2\sum_{k=1}^{N}\|(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau_k^{-1}\|_{V'}^2\,\tau_k,$$

получается и оценка (15).

Из оценок (13)—(15) получается сходимость погрешности приближенных решений к нулю. Для этого достаточно дополнительно предположить, что последовательность подпространств $\{V_h\}$, предельно плотна в пространстве V, то есть $\|(I-Q_h)v\|_V\to 0$ при $h\to 0$ для любого $v\in V$, где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h.

Для получения оценок погрешности с порядком скорости сходимости не только по времени, но и по пространству, предположим, что подпространства V_h удовлетворяют некоторым условиям, типичным для подпространств типа конечных элементов. Пусть существует гильбертово пространство $E\subset V$ такое, что пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ (см., напр., [1]) и

$$\|(I-Q_h)u\|_V\le c_1 h\,\|u\|_E\ (u\in E). \tag{16}$$

Реализацию пространства E, а также пространств V, H и V', в приложениях можно найти, например, в [8, 12, 13]. Кроме того, пусть

$$\|u_h\|_V\le c_2h^{-1}\,\|u_h\|_H\ (u_h\in V_h). \tag{17}$$

Условие (17) в приложениях означает равномерное разбиение области пространственных переменных на конечные элементы.

Предположим также, что для операторов $\mathcal{L}(t)$ в (2) существуют $\alpha>0$ и $\beta\ge 0$ такие, что для $t\in[0,T]$ и $u\in D[\mathcal{L}(t)]$

$$\|u\|_E\le\alpha\,\|\mathcal{L}(t)u\|_H+\beta\,\|u\|_H\,. \tag{18}$$

Условие (18) типично для эллиптических операторов (см., напр., [3]).

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы. Пусть также выполнены предположения (16)—(18). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\{\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\,\tau_k+$$

$$+\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau_k})\,dt\right\|_H^2+$$

$$+\left\|\frac{1}{\tau_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau_k}\right\|_{V'}^2\tau_k\}\le$$

$$\le M\{\|P_hu^0-u_0^h\|_H^2+(\tau+h^2)R(u^0,f)\}, \tag{19}$$

где $R(u^0,f)$ *определена в (3).*

Доказательство. Заметим [12], что из (16) следует оценка

$$\|(I-Q_h)u\|_H\le c_1h\,\|(I-Q_h)u\|_V\ (u\in V). \tag{20}$$

Тогда из (20) и (3) получим

$$\max_{0\le t\le T}\|(I-P_h)u(t)\|_H^2\le\max_{0\le t\le T}\|(I-Q_h)u(t)\|_H^2\le$$

$$\le c_1^2h^2\max_{0\le t\le t}\|u(t)\|_V^2\le h^2MR(u^0,f).$$

Из (16) и (20) следует для $u\in V$

$$\|P_hu\|_V\le\|P_hu-Q_hu\|_V+\|Q_hu\|_V\le$$

$$\le c_2h^{-1}\,\|P_h(I-Q_h)u\|_H+\|u\|_V\le(c_2c_1+1)\,\|u\|_V\,. \tag{21}$$

В таком случае, для $u\in V$ выполнено

$$\|(I-P_h)u\|_V=\|(I-P_h)(u-Q_hu)\|_V\le$$

$$\le(1+\|P_h\|_{V\to V})\,\|(I-Q_h)u\|_V\le \tag{22}$$

$$\le(2+c_1c_2)\,\|(I-Q_h)u\|_V\,.$$

Из (22), (16), (18) и (3) следует оценка

$$\int_0^T\|(I-P_h)u(t)\|_V^2\,dt\le c\int_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt\le$$

$$\le cc_1^2h^2\int_0^T\|u(t)\|_E^2\,dt\le$$

$$\le cc_1^2h^2\int_0^T(\alpha\,\|\mathcal{L}(t)u(t)\|_H+\beta\,\|u(t)\|_H)^2dt\le$$

$$\le h^2MR(u^0,f).$$

В результате установлены необходимые оценки соответствующих слагаемых в правых частях (13) и (14).

Заметим теперь, что в условиях выполнения (16)

$$\|(I-P_h)u\|_{V'}\le c_1h\,\|(I-P_h)u\|_H\ (u\in H). \tag{23}$$

Действительно,

$$\|(I-P_h)u\|_{V'}=\sup_{v\in V,\|v\|=1}\|((I-P_h)u,v)\|\le$$

$$\le\|(I-P_h)u\|_H\sup_{v\in V,\|v\|_V=1}\|(I-P_h)v\|_H\le$$

$$\le\|(I-P_h)u\|_H\sup_{v\in V,\|v\|_V=1}\|(I-Q_h)v\|_H\,.$$

Остается воспользоваться оценкой (20).

Оценки (23) и (3) позволяют получить

$$\int_0^T \|(I-P_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt \le c_2^2 h^2 \int_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt \le$$
$$\le h^2 MR(u^0,f).$$

Таким образом, установлена нужная оценка и для третьего слагаемого в правой части (15), то есть оценка (19) доказана полностью.

Обратим внимание, что в [10] оценка, подобная (19), была установлена только для первых двух слагаемых в левой части.

Заметим также, что в случае, когда форма $l(t,u,v)$ или ее главная часть симметричны по $u,v\in V$, то в [13] коэрцитивные энергетические оценки погрешности установлены без предположения (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

3. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

4. *Соболевский П.Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // ДАН СССР. — 1964. — Т. 157, № 1. — С. 52—55.

5. *Смагин В.В.* Обобщенная разрешимость вариационных задач параболического типа // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 2001. — № 6. — С. 131—139.

6. *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. ур-ния. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269—1277.

7. *Смагин В.В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1997. — № 2. — С. 63—67.

8. *Смагин В.В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143—160.

9. *Смагин В.В.* Энергетическая сходимость погрешности проекционно-разностного метода для слабо разрешимых параболических уравнений // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1999. — № 4. — С. 114—119.

10. *Злотник А.А.* Оценка скорости сходимости в $V_2(Q_T)$ проекционно-разностных схем для параболических уравнений. Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1980. — № 1. — С. 27—35.

11. *Fujie Y., Tanabe H.* On some parabolic equations of evolutions in Hilbert spase // Osaka J. Math. — 1973. — № 10. — P. 115—130.

12. *Смагин В.В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 115—123.

13. *Смагин В.В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционно-разностного метода для абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Сибирский матем. ж. — 1996. — Т. 37, № 2. — С. 406—418.