УДК 517.98

АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА КОШИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2002 Ю. Т. Сильченко

Воронежский государственный университет

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение первого порядка в банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной. По операторным коэффициентам уравнения строится некоторая бесконечно дифференцируемая полугруппа линейных ограниченных операторов. С ее помощью устанавливается однозначная разрешимость соответствующей задачи Коши.

1. Пусть E — банахово пространство, $L(E)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из E в E и A, B — линейные операторы с областями определения D и D_B соответственно, причем $D \subset D_B$. Введем в рассмотрение B-резольвентное множество $\rho_B(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda B - A)^{-1} \in L(E)\}$. На этом множестве определена операторная функция $R(\lambda) = (\lambda B - A)^{-1}$ — обобщенная резольвента оператора A ([1—3]). В отличие от указанных работ [1—3] множество D не предполагается плотным в E. Далее будем предполагать, что полуплоскость $Re\lambda \geq 0$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ содержится в B-резольвентном множестве:

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq 0\} \subset \rho_B(A) \tag{1}$$

и в этой полуплоскости выполнена оценка

$$\left\| B(\lambda B - A)^{-1} \right\| \leq M(1 + |\lambda|)^{-r}. \tag{2}$$

В частности, это означает существование ограниченного обратного оператора A^{-1}.

Оценка (2) позволяет строить некоторую обобщенную полугруппу линейных ограниченных операторов и рассмотреть задачу Коши

$$Bv' - Av = 0,\ 0 < t \leq 1, \tag{3}$$

$$Bv(0) = BA^{-1}v_0. \tag{4}$$

Под решением этой задачи будем понимать функцию $v = v(t)$ со значениями в E, непрерывную при $t \geq 0$, дифференцируемую при $t > 0$, причем $v(t) \in D, v'(t) \in D_B$, функции $Bv'(t), Av'(t)$ непрерывны при $t > 0$ и выполнены соотношения (3)—(4). Интерес представляет случай, когда $KerB \neq \{0\}$, т.е. задача допускает вырождение.

Работа выполнена при содействии РФФИ, проект 01-01-00408.

При исследовании задачи (3)—(4) обычно используются два подхода. Первый основан на спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов (см., например, [4—10]). Второй использует дифференциальные включения вида $u' \in Gu$, где $G = AB^{-1}$ (или $G = B^{-1}A$) — многозначный оператор. Такой прием используется в монографии [5] и статьях [6, 11].

В данной работе задача (3)—(4) исследуется с помощью бесконечно дифференцируемой полугруппы, построенной лишь с использованием оценки (2) и имеющей особенность в нуле. Это позволяет освободиться от ряда дополнительных условий, таких, как условия на поведение норм операторов $(\lambda B - A^{-1})B, (\lambda B - A)^{-1}$. Не предполагается рефлексивность пространства E. Кроме того, множества D и D_B не обязательно плотны в E.

2. Покажем, что обобщенная резольвента $R(\lambda)$ существует также в области Σ, ограниченной слева параболой Γ:

$$\sigma = w - c(1 + \tau^2)^{\frac{r}{2}},\ w > c > 0.$$

Из условий (1)—(2) следует, что оператор $R(\lambda)$ определен при $Re\lambda \geq w > 0$ и выполнена оценка

$$\left\| B(\lambda B - A)^{-1} \right\| \leq M|\lambda|)^{-r}. \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть в условии (5) $r \in (0,1]$. Тогда в области Σ существует обобщенная резольвента $R(\lambda)$ и в этой области выполнена оценка (5) с некоторой константой $M > 0$ (может быть, отличной от исходной).

Доказательство. Пусть $\lambda = w - z + i\tau (z > 0)$. Рассмотрим равенство

$$\lambda B - A = [I - zB((w + i\tau)B - A)^{-1}][(w + i\tau)B - A]. \tag{6}$$

Положим $z = \frac{1}{2M}(1+\tau^2)^{r/2}$. Без нарушения общности можно считать, что $w \geq 1$, тогда

$$\left\| zB((w+i\tau)B - A)^{-1} \right\| \leq \frac{(1+\tau^2)^{r/2} \cdot M}{2M(w^2+\tau^2)^{r/2}} \leq \frac{1}{2}$$

и в (6) оператор в первых квадратных скобках непрерывно обратим. Поэтому, если $w + i\tau \in \rho_B(A)$, то $\lambda \in \rho_B(A)$ и

$$\left\| B(\lambda B - A)^{-1} \right\| \leq 2 \left\| B[(w+i\tau)B - A]^{-1} \right\| \leq M|\lambda|^{-r},$$

поскольку $|\lambda| \leq |z| + |w + i\tau| = \frac{1}{2M}(1+\tau^2)^{r/2} + (w^2+\tau^2)^{1/2} \leq c_1(w^2+\tau^2)^{1/2}$ (M — некоторая новая константа). Последняя оценка имеет место в области Σ, ограниченной параболой $\Gamma: \lambda = w - \frac{1}{2M}(1+\tau^2)^{r/2} + i\tau$ или

$$\sigma = w - c(1+\tau^2)^{r/2},\ c = \frac{1}{2M}.$$

Теорема 1. Пусть в полуплоскости $Re\lambda \geq w \geq 0$ выполнена оценка (5) с некоторым $r \in (0,1]$.

Тогда при $t > 0$ существует оператор-функция $T(t) \in L(E)$, обладающая свойствами

1^0 $T(t): E \to D$;

2^0 $T(t+\tau) = T(t)AT(\tau),\ t,\tau > 0$;

3^0 $BT'(t) = AT(t)$ (производная $L(E)$);

4^0 $\lim BT(t) = BA^{-1}$ при $t \to +0$;

5^0 $\|T(t)\| \leq ce^{wt} \cdot t^{-\alpha},\ \|T'(t)\| \leq ce^{wt}t^{-\beta}$,

где $\alpha = \dfrac{1}{r} - 1,\ \beta = \dfrac{2}{r} - 1.$

Доказательство. Положим

$$U(t) = \frac{1}{2}\pi i \int_\Gamma e^{\lambda t} B(\lambda B - A)^{-1} d\lambda, \tag{7}$$

где Γ — парабола, указанная выше, причем начало координат расположено левее точки пересечения параболы с осью абсцисс. Этот интеграл сходится абсолютно, поскольку

$$\left\| e^{\lambda t} B(\lambda B - A)^{-1} d\lambda \right\| \leq e^{\sigma t} \cdot M|\lambda|^{-r} \cdot |i + \sigma_i'| d\tau \leq$$

$$\leq \exp\{[w - c(1+\tau^2)^{r/2}]t\} \cdot c_1(\sigma^2+\tau^2)^{-r/2} d\tau$$

$$(\lambda = \sigma + i\tau,\ \sigma = w - c(1+\tau^2)^{r/2}).$$

Поэтому

$$\|U(t)\| \leq c_2 \int_0^\infty \exp\{[w - c(1+\tau^2)^{r/2}]t\} \cdot (\sigma^2+\tau^2)^{-r/2} d\tau \leq$$

$$\leq ce^{wt} \int_0^\infty e^{-ct(1+\tau^2)^{r/2}} \cdot \frac{d\tau}{\tau^r} \leq ce^{wt} \int_0^\infty e^{-ct\tau^r} \frac{d\tau}{\tau^r} \leq ce^{wt} \cdot t^{1-\frac{1}{r}}.$$

В частности, это означает, что $U(t)$ — непрерывная оператор-функция в $L(E)$ при $t > 0$. Более того, она дифференцируема при $t > 0$ и

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda e^{\lambda t} B(\lambda B - A)^{-1} d\lambda. \tag{8}$$

Здесь подинтегральное выражение допускает оценку

$$\left\| \lambda e^{\lambda t} B(\lambda B - A)^{-1} d\lambda \right\| \leq$$

$$\leq c \exp\{[w - c(1+\tau^2)^{r/2}]t\}(\sigma^2+\tau^2)^{1-r/2} d\tau.$$

Поэтому дифференцирование в (8) законно. Справедлива оценка

$$\|U'(t)\| \leq ce^{wt} \int_0^\infty e^{-ct\tau^r} \frac{d\tau}{\tau^{r-1}} \leq ce^{wt} t^{1-\frac{2}{r}}.$$

Аналогично показывается существование последующих производных. Таким образом, оператор-функция $U(t)$ является бесконечно дифференцируемой.

Преобразуем теперь интеграл в (8), пользуясь тождеством

$$\lambda B(\lambda B - A)^{-1} = I + A(\lambda B - A)^{-1}:$$

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} d\lambda \cdot I + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} A(\lambda B - A)^{-1} d\lambda. \tag{9}$$

Здесь первый интеграл равен нулю. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор A^{-1}, затем оператор B, получим

$$BA^{-1}U'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} B(\lambda B - A)^{-1} d\lambda = U(t).$$

Поскольку A^{-1} — ограниченный оператор, то

$$B[A^{-1}U(t)]' = U(t). \tag{10}$$

Отметим, что в интеграле (7) от интегрирования по параболе Γ можно перейти к интегрированию по параболе $\Gamma_1: \sigma = w_1 - c(1+\tau^2)^{r/2}$, где $w_1 > w$. Этот факт, а также обобщенное резольвентное тождество [2]

$$(\lambda B - A)^{-1} B(\mu B - A)^{-1} = \frac{(\lambda B - A)^{-1} - (\mu B - A)^{-1}}{\mu - \lambda} \tag{11}$$

позволяет установить полугрупповое свойство, именно

$$U(t)U(s) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma_1} e^{\lambda t} e^{\mu s} B(\lambda B - A)^{-1} B(\mu B - A)^{-1} d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} B(\lambda B - A)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\mu s} (\mu - \lambda)^{-1} d\mu \right) d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{\mu s}B(\mu B-A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda\right)d\mu =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}B(\lambda B-A)^{-1}e^{\lambda s}d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda(t+s)}B(\lambda B-A)^{-1}e^{\lambda s}d\lambda = U(t+s),$$

поскольку $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} e^{\mu s}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda = e^{\lambda s}$,

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda s}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda = 0$.

Выясним поведение оператор-функции $U(t)$ в нуле. Для этого преобразуем интеграл в (7), пользуясь тождеством (9):

$$U(t) = \frac{1}{2}\pi i\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{-1}d\lambda \cdot I +$$

$$+\frac{1}{2}\pi i\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{-1}A(\lambda B-A)^{-1}d\lambda.$$

Здесь первый интеграл равен 1. Поэтому для оператор-функции имем представление

$$U(t) = I + \frac{1}{2}\pi i\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{-1}A(\lambda B-A)^{-1}d\lambda.$$

Применим слева ограниченный оператор BA^{-1} :

$$BA^{-1}U(t) = BA^{-1} + \frac{1}{2}\pi i\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{-1}B(\lambda B-A)^{-1}d\lambda.$$

Теперь

$$\lim_{t\to 0} BA^{-1}U(t) = BA^{-1} + \frac{1}{2}\pi i\int_{\Gamma} \lambda^{-1}B(\lambda B-A)^{-1}d\lambda, \quad (12)$$

поскольку последний интеграл сходится абсолютно. Более того, он равен нулю. Чтобы это увидеть, рассмотрим окружность $\sigma^2+\tau^2=R^2$, через Γ_R обозначим ее часть, лежащую правее параболы Γ, а через Γ_{0R} — часть параболы, лежащей внутри этой окружности. Тогда интеграл по замкнутому контуру $\Gamma_R \cup \Gamma_{0R}$ от функции $\lambda^{-1}B(\lambda B-A)^{-1}$ равен нулю. Будем теперь «раздувать» этот замкнутый контур при $R\to\infty$. При этом

$$\left\|\frac{1}{2}\pi i\int_{\Gamma R} \lambda^{-1}B(\lambda B-A)^{-1}d\lambda\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\pi\int_{-\varphi\tau}^{\varphi\tau} \frac{1}{R}\cdot\frac{M}{R^r}\cdot R d\varphi = \frac{\varphi_\tau}{\pi R^r} \le \frac{4}{R^r},$$

поскольку $\frac{\pi}{2} < \varphi_\tau < \pi$. Это выражение стремится к нулю при $R\to\infty$. отсюда вытекает, что интеграл в (12) равен нулю и

$$\lim BA^{-1}[U(t)-I] = 0 \text{ при } t\to +0. \quad (13)$$

Положим теперь $A^{-1}U(t) = T(t)$. Тогда $U(t) = AT(t)$, из формулы (10) следует: $BT'(t) = AT(t)$ и $\lim BT(t) = BA^{-1}$ при $t\to+\infty$. Этим завершается доказательство теоремы.

3. Теорема 1 позволяет обратиться к однородной задаче

$$Bv' - Av = 0,\ 0 < t \le 1 \quad (14)$$

с начальным условием (4). Рассмотрим функцию $v(t) = T(t)v_0$ при некотором $v_0 \in E$.

Из теоремы 1 вытекает непрерывная дифференцируемость этой функции и выполнение соотношения (14) при $t > 0$. Выполнение начального условия при любом элементе $v_0 \in E$ следует из пункта 4^0 той же теоремы. Поэтому имеет место

Теорема 2. Пусть для операторов A и B выполнено условие (3) при $Re\lambda \ge 0$ с некоторым $r\in(0,1]$. Тогда при любом $v_0\in E$ задача (14), (4) имеет единственное решение (единственность решения установлена в предположении, что оператор B замкнут).

Существование указанного решения следует из предыдущих рассуждений. Покажем единственность этого решения. Из теоремы 1 вытекает, что $t^\alpha\|v(t)\| \le ce^{wt}$, где $w > 0$.

Введем функцию

$$w_\varepsilon(\lambda) = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-\lambda t}v(t)dt \text{ при } Re\lambda > w.$$

При $\varepsilon\to 0$ у этого интеграла существует предел $w(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}v(t)dt$. Рассмотрим

$$Aw_\varepsilon(\lambda) = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-\lambda t}Av(t)dt = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-\lambda t}Bv'(t)dt =$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}Bv\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - e^{-\lambda\varepsilon}Bv(\varepsilon) + \lambda\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-\lambda t}Bv(t)dt.$$

Последнее выражение имеет предел, равный

$$\lambda B\int_0^\infty e^{-\lambda t}v(t)dt = \lambda Bw(\lambda).$$

Таким образом, $Aw(\lambda) = \lambda B(\lambda)$, $(\lambda B - A)w(\lambda) = 0$. Поскольку λ принадлежит B-резольвентному множеству, то это означает, что $w(\lambda)\equiv 0$ при $Re\lambda > w$. Это возможно лишь при $v(t)\equiv 0$.

4. Приведенные результаты позволяют рассмотреть систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$u'_t - u''_{xx} + u'_x = 0 \tag{15}$$

$$u'_t + v = 0, \tag{16}$$

где $t \in (0,1], x \in [0,1], v = v(t,x), u = u(t,x)$ — неизвестные функции. Для этой системы ставятся граничные

$$u(t,0) = 0, \int_0^1 u(t,x)dx = 0 \tag{17}$$

и начальное

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{18}$$

условия ($u_0(x)$ — заданная функция).

Нас будет интересовать решение этой задачи, такое, что функции, входящие в левые части уравнения принадлежат пространству Lp (по x) а производная u'_t понимается в смысле нормы этого пространства.

Эти уравнения (15)—(16) будем рассматривать в банаховом пространстве $E = L_p(0,1)\times L_p(0,1)$ (по x) элементов $w = (u,v)$, в котором введем матричные операторы

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{dx^2} & -\dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с областями определения $D = D(A) = \{w \in W_p^2,$

$$w = (u,v), u(0) = 0, \int_0^1 u(x)dx = 0\}, D_B = D(B) = L_p.$$

Тогда задача (15)—(16) сведется к абстрактной задаче Коши

$$Bw'_t - Aw = 0, \tag{19}$$

$$w(0) = w_0, w_0 = (u_0, 0) \tag{20}$$

в банаховом пространстве E.

Проверим, что для введенных выше операторов A и B выполнены условия теоремы 2. Рассмотрим уравнение $(\lambda B - A)w = F$, или в развернутом виде

$$-u''_{xx} + \lambda u + v'_x = f(x),$$

$$u'_x + v = g(x)$$

$$u(0) = 0, \int_0^1 u(x)dx = 0.$$

Из второго уравнения $v = g(x) - u'_x$ и $v'_x = g'(x) - u''_{xx}$. Подставив это выражение в первое уравнение, придем к задаче

$$-2u''_{xx} + \lambda u = f(x) - g'(x),$$

$$u(0) = 0, \int_0^1 u(x)dx = 0. \tag{21}$$

Для решения этой задачи выполнена оценка [12] в пространстве L_p :

$$\|u\| \le C\,|\lambda|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \|f - g'\|, \; Re\lambda > 0.$$

Это означает, что выполнено неравенство (5) и $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}$.

Поэтому имеет место

Теорема 3. Задача (15)—(18) имеет в пространстве L_p единственное решение при любой начальной функции $u_0(t) \in L_p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // УМН. — 1994. — Т. 49. — Вып. 4(298). — С. 47—74.

2. *Мельникова И.В., Альшанский М.А.* Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве // ДАН. — 1994. — Т. 336. — № 1. — С. 17—20.

3. *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Физматгиз, 1995. — 166 с.

4. *Favini A., Yagi A.* Space and time regularity for degenerate evolution equations // J. Math. Soc. Japan. — 1992. — Vol. 44. — № 2. — P. 331—350.

5. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure and applied mathematics: A series of monographs and textbooks (215). — New York: Marcel Dekker, 1998. — 336 p.

6. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сб. — 2002. — Т. 193. — № 11. — С. 3—42.

7. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Эргодические подпространства и аналитические полугруппы // Изв. РАЕН, сер. МММИУ, 2001. — Т. 5. — № 4. — С. 5—16.

8. *Свиридюк Г.А., Федоров В.Е.* О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39. — № 3. — С. 604—616.

9. *Радбель Н.И.* О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax' + Bx = 0$ // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15. — № 6. — С. 1142—1143.

10. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax' + Bx = f(t)$ // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т.11. — № 11. — С. 1996—2010.

11. *Мельникова И.В., Гладченко А.В.* Корректность задачи Коши для включений в банаховых пространствах // Докл. РАН. — 1998. — Т. 361. — № 6. — С. 736—739.

12. *Сильченко Ю.Т.* Оператор дифференцирования с нерегулярными граничными условиями // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 6(421). — С. 32—36.