УДК 517.926.4:517.929

ПРИЗНАКИ ЭРГОДИЧНОСТИ МАРКОВСКИХ И КОЛМОГОРОВСКИХ СИСТЕМ

© 2002 А. И. Перов, Е. П. Белоусова

Воронежский государственный университет

В статье изучаются некоторые линейные системы разностных и дифференциальных уравнений, которые естественным образом возникают в теории случайных процессов при описании дискретных и непрерывных цепей Маркова с конечным числом состояний (а также в теории массового обслуживания, в задачах химической кинетики, в экономико - математических задачах и т.д.). Заимствуя постановки задач и мотивировку определений из вероятностных соображений, мы исследуем указанные выше системы с позиций теории разностных и дифференциальных уравнений.

§ 0. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Во всей статье $n \geq 2$ — целое положительное число, Z — совокупность всех целых чисел, а R^n — нормированное n-мерное пространство, элементами которого являются векторы-столбцы. Нам удобно ввести специальное обозначение для n-мерной строки, состоящей из единичек

$$\mathbf{1} = (1,1,...,1). \tag{0.1}$$

Если $\mathbf{x}$ есть вектор с компонентами $x_1, x_2, ..., x_n$, то запись $\mathbf{x} \geq 0$ означает, что $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$; аналогичные обозначения используются и для матриц [1, с. 352]. Напомним, что вектор называется *вероятностным*, если все его компоненты неотрицательны, а их сумма равна единице [2, с. 294]. Совокупность всех вероятностных векторов образует симплекс размерности $n-1$

$$W^{n-1} = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{1x} = 1\}. \tag{0.2}$$

В дальнейших построениях важную роль играет $(n-1)$-мерное подпространство

$$L^{n-1} = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{1x} = 0\}. \tag{0.3}$$

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная вещественная квадратная $n \times n$-матрица. *Спектральный радиус* матрицы $\mathbf{A}$ (т.е. максимальный из модулей ее собственных значений) и *спектральная абсцисса* матрицы $\mathbf{A}$ (т.е. максимальная из вещественных частей ее собственных значений) обозначаются через $\operatorname{spr}\mathbf{A}$ и $\operatorname{spa}\mathbf{A}$ соответственно [3], [4]. В дальнейшем мы не будем делать различия между матрицей и определяемым ею оператором.

Норма элемента x обозначается $\|x\|$. Наиболее часто используются гельдеровы нормы векторов

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} |x|_i, \; \|\mathbf{x}\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha}, \; 0 < \alpha \leq 1. \tag{0.4}$$

Норма матрицы вводится с помощью векторной нормы как операторная

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{0 \neq \mathbf{x} \in R^n} \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \tag{0.5}$$

Логарифмическая норма матрицы обозначается следующим образом [5,с. 461]

$$\operatorname{lgn}\|\mathbf{A}\| = \lim_{0 < t \to 0} \frac{\|\mathbf{I} + t\mathbf{A}\| - 1}{t}, \tag{0.6}$$

где $\mathbf{I}$ есть единичная $n \times n$-матрица.

Сужение оператора $\mathbf{A}$ на подпространство L^{n-1} обозначается $\mathbf{A} \mid L^{n-1}$. Если подпространство L^{n-1} инвариантно относительно оператора $\mathbf{A}$, то для его сужения на это подпространство по правилам, аналогичным (0.5) и (0.6), вводятся норма $\|\mathbf{A} \mid L^{n-1}\|$ и логарифмическая норма $\operatorname{lgn}\|\mathbf{A} \mid L^{n-1}\|$ (если рассматривается какая-либо из норм (0.4), то еще добавляется индекс α).

Вещественная квадратная $n \times n$-матрица $\mathbf{M} = (m_{ij})$ называется *марковской*, если ее элементы неотрицательны и их сумма в любом столбце равна единице [2, с. 294], т.е.

$$m_{ij} \geq 0, \; i, j = 1, 2, ..., n, \tag{0.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{0.8}$$

Заметим, что свойства (0.7) и (0.8) можно коротко записать как $\mathbf{M} \geq 0$ и $\mathbf{1M} = 1$.

Вещественная квадратная $n \times n$-матрица $\mathbf{K} = (k_{ij})$ называется *колмогоровской*, если ее внедиагональные элементы неотрицательны и сумма элементов в любом столбце равна нулю (см., например, [6, с. 650]), т.е.

$$k_{ij} \geq 0,\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, ..., n, \tag{0.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = 0,\ j = 1, 2, ..., n. \tag{0.10}$$

Свойство (0.9) называется *внедиагональной неотрицательностью* матрицы $\mathbf{K}$, а свойство (0.10) означает, что $\mathbf{1K} = 0$.

§ 1. МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ

1.1. Постоянные коэффициенты. Рассмотрим линейную систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j(t),\ i = 1, 2, ..., n; \\ \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(t), t \in Z, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где дискретное время t принимает только целочисленные значения, вектор $\mathbf{x}(t)$ из R^n имеет компоненты $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, а матрица $\mathbf{M} = (m_{ij})$ есть некоторая марковская матрица (см. (0.7) и (0.8)). Системы (1.1) возникают, например, при изучении дискретных марковских цепей с конечным числом состояний [1, с. 381—394] (см. также [2, 4]). Нетрудно видеть, что для решений системы (1.1) справедлива формула

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{t-s}\mathbf{x}(s),\ s \leq t,\ s, t \in Z. \tag{1.2}$$

Оператор $\mathbf{M}$ оставляет симплекс W^{n-1} (0.2) инвариантным,

$$\mathbf{M} W^{n-1} \subseteq W^{n-1}, \tag{1.3}$$

и этим свойством марковские матрицы полностью характеризуются. Для развиваемой нами теории важно, что и подпространство L^{n-1} (0.3) также инвариантно относительно $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M} L^{n-1} \subseteq L^{n-1}. \tag{1.4}$$

Действительно, так как $\mathbf{1M} = \mathbf{1}$, то из $\mathbf{x} \in L^{n-1}$ (т.е. из $\mathbf{1x} = 0$) вытекает $\mathbf{1}(\mathbf{Mx}) = (\mathbf{1M})\mathbf{x} = \mathbf{1x} = 0$.

Так как непрерывный оператор $\mathbf{M}$ отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество W^{n-1} в себя (см.(1.3)), то по *теореме Боля-Брауэра* оператор $\mathbf{M}$ имеет в W^{n-1} неподвижную точку,

$$\pi = \mathbf{M}\pi,\ \pi \in W^{n-1}. \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{x}_0(t) \equiv \pi (t \in Z)$ есть решение системы (1.1). Говорят, что система (1.1) (марковская матрица $\mathbf{M}$) обладает *эргодическим свойством*, если вектор π с указанными выше свойствами единствен и если для любого решения системы (1.1), для которого $\mathbf{x}(s) \in W^{n-1}$, последовательность $\mathbf{x}(t)(s \leq t \to \infty, t \in Z)$ сходится к π.

Первое соотношение в (1.5) говорит, что единица есть собственное значение марковской матрицы $\mathbf{M}$,

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}) = 0, \tag{1.6}$$

а вектор π есть соответствующий собственный вектор. Известно, что на единичной окружности в комплексной плоскости могут быть, кроме единицы, и другие собственные значения марковской матрицы. Приведем известный *спектральный признак эргодичности*: для того чтобы марковская матрица $\mathbf{M}$ обладала эргодическим свойством необходимо и достаточно, чтобы единичное собственное значение было простым и чтобы на единичной окружности не было других ее собственных значений. Критерий Деблина гласит, что для эргодичности марковской матрицы необходимо и достаточно, чтобы либо она сама, либо ее некоторая целая положительная степень имела положительную строку (т.е. строку, все элементы которой положительны) [8, с. 114].

Для нас важно следующее простое соображение. Оказывается, что система (1.1) обладает эргодическим свойством тогда и только тогда, когда разностная система

$$\mathbf{z}(t+1) = (\mathbf{M} \mid L^{n-1})\mathbf{z}(t),\ \mathbf{z}(t) \in L^{n-1},\ t \in Z, \tag{1.7}$$

рассматриваемая лишь в подпространстве L^{n-1}, асимптотически устойчива [4]. Заметим, что сама система (1.1), будучи устойчивой (в смысле теории дискретных систем,естественно, [9]), асимптотически устойчивой быть не может. Асимптотическая устойчивость системы (1.7) равносильна тому, что

$$\operatorname{spr}(\mathbf{M} \mid L^{n-1}) < 1, \tag{1.8}$$

т.е. спектр индуцированного оператора $\mathbf{M} \mid L^{n-1}$ должен лежать внутри единичного круга. Конечно, требование (1.8) заведомо будет выполнено, если при некотором выборе нормы в L^{n-1} имеет место неравенство

$$\left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\| < 1 \tag{1.9}$$

(так как спектральный радиус всегда не превосходит нормы, $\operatorname{spr}(\mathbf{M} \mid L^{n-1}) \leq \left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|$). Покажем, что при выполнении условия (1.9) оператор $\mathbf{M}$ является в W^{n-1} сжимающим оператором с константой сжатия $q \equiv \left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|$. Действительно, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \in W^{n-1}$, то $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in L^{n-1}$ и потому

$$\|\mathbf{Mx} - \mathbf{My}\| = \left\| (\mathbf{M} \mid L^{n-1})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\| \le q \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Существование неподвижной точки π (см. (1.5)) теперь можно получить на основании *принципа сжимающих отображений*.

Докажем следующую формулу, впервые приведенную в статье [4, с. 56]

$$\left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|_0 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{[n/2]} (\tilde{m}_{ij} - \tilde{m}_{i,n-j+1}). \quad (1.10)$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа, а конечная последовательность $\tilde{m}_{i1} \ge \tilde{m}_{i2} \ge ... \ge \tilde{m}_{in}$ есть записанная в невозрастающем порядке последовательность $m_{i1}, m_{i2}, ..., m_{in}$ элементов i-й строки $\mathbf{m}_i$ матрицы $\mathbf{M}$. Относительно нормы с индексом $\alpha = 0$ см. формулу (0.4).

Так как по определению нормы оператора

$$\left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|_0 = \max_{z \in L^{n-1}, \|z\|_0 \le 1} \max_{1 \le i \le n} |\mathbf{m}_i \mathbf{z}| =$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \max_{z \in L^{n-1}, \|z\|_0 \le 1} |\mathbf{m}_i \mathbf{z}| = \max_{1 \le i \le n} \left\| \mathbf{m}_i \mid L^{n-1} \right\|_0,$$

а с другой стороны, как мы в этом чуть позже убедимся,

$$\left\| \mathbf{m}_i \mid L^{n-1} \right\|_0 = \sum_{j=1}^{[n/2]} (\tilde{m}_{ij} - \tilde{m}_{i,n-j+1}), \quad (1.11)$$

то формула (1.10) установлена. Сделаем необходимые пояснения. Мы трактуем строку $\mathbf{m}_i$ как линейный функционал на пространстве R^n, ставящий в соответствие $\mathbf{x} \in R^n$ число $\mathbf{m}_i \mathbf{x}$. Тогда $\mathbf{m}_i \mid L^{n-1}$ есть сужение функционала $\mathbf{m}_i$ на подпространство L^{n-1}, а выражение слева в (1.11) — его норма на L^{n-1} в метрике (0.4) при $\alpha = 0$.

Для доказательства формулы (1.11) обозначим ее левую часть через a, а правую часть через b. Так как

$$\mathbf{m}_i \mathbf{z} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} z_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{m}_{ij} z_{\sigma(j)},$$

где σ — некоторая перестановка, то, полагая

$$z_{\sigma(j)} = 1 \text{ и } z_{\sigma(n-j+1)} = -1 \text{ при } j = 1, ..., [n/2],$$

получаем $\mathbf{z}^0 \in L^{n-1}$, $\|\mathbf{z}^0\|_0 = 1$ и $\mathbf{m}_i \mathbf{z}^0 = b$ (здесь $\mathbf{z}^0$ — вектор с указанными компонентами, причем в случае нечетного n недостающая компонента полагается равной нулю). Поэтому $a \ge b$.

С другой стороны при любом значении вещественного параметра u имеем

$$\left\| \mathbf{m}_i \mid L^{n-1} \right\|_0 = \left\| (\mathbf{m}_i - u\mathbf{1}) \mid L^{n-1} \right\|_0 \le \left\| \mathbf{m}_i - u\mathbf{1} \right\|_0 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} | m_{ij} - u | = \sum_{j=1}^{n} | \tilde{m}_{ij} - u |.$$

Полагая здесь $u = \tilde{m}_{i,p+1}$ для нечетного n и, скажем, $u = \tilde{m}_{i,p}$ для четного n, находим, что $a \le b (p = [n/2])$. Итак, $a = b$ и требуемая формула (1.11) установлена.

Совершенно замечательной является формула Добрушина (см. [11])

$$\left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|_1 = \max_{i<j} \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} | m_{si} - m_{sj} |. \quad (1.12)$$

Ее доказательство основано на том простом факте, что точками вида $\pm(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)/2$ при $i < j$ исчерпываются все крайние точки (вершины) многогранника, являющегося единичным шаром подпространства L^{n-1} в 1-норме (см. (0.4)); здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ — стандартный базис в пространстве R^n. В формуле (1.12) под знаком максимума стоит как раз $\left\| \mathbf{M}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)/2 \right\|_1$.

Для того чтобы формуле (1.12) придать вид, полнее учитывающий специфику марковских матриц, воспользуемся элементарным равенством

$$| a - b | = a + b - 2\min(a, b),\ a, b \in R. \quad (1.13)$$

Так как в силу (0.8)

$$\sum_{s=1}^{n} \left\| m_{si} - m_{sj} \right\| = \sum_{s=1}^{n} [m_{si} + m_{sj} - 2\min(m_{si}, m_{sj})] =$$

$$= 2(1 - \sum_{s=1}^{n} \min(m_{si}, m_{sj})),$$

то согласно (0.7) формула (1.12) принимает вид

$$\left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|_1 = 1 - \min_{i<j} \sum_{s=1}^{n} \min(m_{si}, m_{sj}). \quad (1.14)$$

Мы видим, что

$$\left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|_1 \le 1, \quad (1.15)$$

причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, если для некоторых $i < j$ справедливо равенство $m_{si} m_{sj} = 0$ при всех $s = 1, 2, ..., n$ (т.е. i-й и j-й столбцы матрицы $\mathbf{M}$ ортогональны). Отметим еще вытекающую из формулы (1.14) оценку

$$\left\| \mathbf{M} \mid L^{n-1} \right\|_1 \le 1 - \sum_{s=1}^{n} d_s, \quad (1.16)$$

где d_s — минимальный элемент s-й строки матрицы $\mathbf{M}$. Эта оценка показывает, что если хотя бы одна строка в марковской матрице $\mathbf{M}$ положительна, то положительна стоящая в (1.16) сумма и, значит, выполнено требование (1.9); мы пришли к упомянутому выше критерию Деблина.

Формулы (1.10) и (1.12) показывают, что если их правые части меньше единицы, то имеет место эргодичность; более того, мы вычисляем и *меру эргодичности*, за которую принимаем указанную норму. Можно ввести также и *спектральную меру эргодичности* как спектральный радиус оператора $\mathbf{M} \mid L^{n-1}$.

Скажем несколько слов по поводу прямого использования критерия (1.8) (и тем самым оценки спектральной меры эргодичности). Трудность здесь заключается в том, что различные оценки спектрального радиуса разработаны для операторов, действующих в n-мерном пространстве (см., например, [12] и [13]), а нам нужно, зная матрицу оператора во всем пространстве, оценить его спектральный радиус на подпространстве. Воспользуемся тем, что из локализационных теорем Гершгорина (при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) и Островского (при $0 < \alpha < 1$) вытекает следующая оценка спектрального радиуса произвольной $n \times n$ матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\operatorname{spr} \mathbf{A} \le \max_{1\le i\le n}\{|a_{ii}| + (\sum_{j\ne i} |a_{ij}|)^{1-\alpha}(\sum_{j\ne i} |a_{ji}|)^{\alpha}\}. \quad (1.17)$$

Для перехода к интересующей нас задаче заметим, что для любого $\mathbf{u} \in R^n$ операторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M} - \mathbf{u}1$ на L^{n-1} совпадают и, более того, спектральный радиус оператора $\mathbf{M}$ на подпространстве L^{n-1} совпадает с минимальным значением спектрального радиуса оператора $\mathbf{M} - \mathbf{u}1$ во всем пространстве R^n. Поэтому формула (1.17) приводит нас к оценке

$$\begin{aligned}\operatorname{spr}(\mathbf{M} \mid L^{n-1}) \le \min_{u\in R^n} \max_{1\le i\le n}\{|m_{ii} - u_i| + \\ +(\sum_{j\ne i} |m_{ij} - u_i|)^{1-\alpha}(\sum_{j\ne i} |m_{ji} - u_j|)^{\alpha}\}.\end{aligned} \quad (1.18)$$

Теорема 1.1. *Для эргодичности марковской системы (1.1) с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (1.8). Поэтому если правая часть формулы (1.18) при некотором $0 \le \alpha \le 1$ меньше единицы, то система (1.1) эргодична.*

Для эргодичности системы (1.1) достаточно, чтобы было выполнено условие (1.9). Поэтому если правая часть формулы (1.10) (при $\alpha = 0$) или формулы (1.12) (при $\alpha = 1$) меньше единицы, то система (1.1) обладает эргодическим свойством.

1.2. Периодические коэффициенты. Несколько усложняя задачу, рассмотрим марковскую систему (1.29) с переменными периодическими коэффициентами, т.е. мы будем считать, что

$$\mathbf{M}(t + \omega) = \mathbf{M}(t),\ t \in Z, \quad (1.19)$$

где период ω есть некоторое целое положительное число, большее единицы. В теории дискретных систем с периодическими коэффициентами важную роль играет *дискретная матрица монодромии*

$$\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{M}(\omega - 1)\mathbf{M}(\omega - 2)\ldots\mathbf{M}(0). \quad (1.20)$$

Как произведение марковских матриц она есть также марковская матрица. Подробнее о дискретных периодических системах см. в [9].

Нетрудно видеть, что изучаемая нами система всегда имеет периодическое решение $\pi(t)$, лежащее в W^{n-1} при всех целых t,

$$\pi(t + \omega) = \pi(t),\ t \in Z. \quad (1.21)$$

Действительно, полагая $\pi(t) = \mathbf{M}(t-1)\mathbf{M}(t-2)\ldots \mathbf{M}(0)\pi_0$ при всех целых положительных t, где π_0 есть неподвижная точка оператора $\mathbf{U}(\omega)$ в W^{n-1} (см. п. 1.1), мы получаем требуемое решение (на целые отрицательные t оно продолжается по соображениям периодичности).

Покажем, что система (1.29) с периодическими коэффициентами эргодична тогда и только тогда, когда она имеет единственное лежащее в W^{n-1} ω-периодическое решение и это решение обладает притягивающим свойством.

Пусть система (1.29) с периодическими коэффициентами эргодична и $\pi(t)$ есть ее эргодическое распределение. Так как в силу периодичности (1.19) $\pi(t + \omega + 1) = \mathbf{M}(t + \omega)\pi(t + \omega) = \mathbf{M}(t)\pi(t + \omega)$, то вместе с $\pi(t)$ решением системы (1.29) оказывается и сдвиг $\pi(t + \omega)$. В силу единственности решения, лежащего в W^{n-1}, имеет место (1.21) и периодичность эргодического распределения установлена.

При рассмотрении обратного утверждения в доказательстве нуждается лишь тот факт, что любое решение $\sigma(\mathbf{t})$ системы (1.29), лежащее в W^{n-1} при всех целых t, должно совпадать с построенным нами ранее ω-периодическим решением $\pi(t)$. Пусть c есть точная верхняя граница $\|\sigma(\mathbf{t})-\pi(\mathbf{t})\|$, при $t\in Z$, $c>0$. Выберем из последовательности сдвигов $\sigma_p(t)\equiv\sigma(t-p\omega)(p=1,2,...)$ подпоследовательность $\sigma_{(p)}(t)$, сходящуюся при всех $t\in Z$ к некоторому решению $\tau(t)$ системы (1.29). Так как в силу (1.15)

$$\|\tau(t)-\pi(t)\|=\lim_{p\to\infty}\|\sigma_{(p)}(t)-\pi(t)\|=c>0,$$

то $\|\tau(t)-\pi(t)\|$ не стремится к нулю при $t\to\infty$, что противоречит сделанному нами предположению о том, что решение $\pi(t)$ обладает притягивающим свойством.

Приведем без доказательства следующее почти очевидное утверждение.

Теорема 1.2. *Марковская периодическая система (1.29) обладает эргодическим свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладает дискретная матрица монодромии* $\mathbf{U}(\omega)$.

Так как согласно (1.20)

$$\|\mathbf{U}(\omega)\mid L^{n-1}\|\le$$
$$\le\|\mathbf{M}(\omega-1)\mid L^{n-1}\|\|\mathbf{M}(\omega-2)\mid L^{n-1}\|...\|\mathbf{M}(0)\mid L^{n-1}\|, \tag{1.22}$$

то если правая часть написанного неравенства меньше единицы, то изучаемая нами система эргодична. Применение формул (1.10) и (1.12) приводит к конкретным эффективным признакам эргодичности. Вообще, для обнаружения эргодичности марковской матрицы $\mathbf{U}(\omega)$ можно использовать весь арсенал средств, выработанных в п. 1.1.

1.3. Почти-периодические коэффициенты. Рассмотрим марковскую систему (1.29) с почти-периодическими коэффициентами $m_{ij}(t)(t\in Z;i,j=1,2,...,n)$ [9, с. 121].

Теорема 1.3. *Марковская почти-периодическая система (1.29) обладает эргодическим свойством в том и только том случае, если дискретная матричная функция Коши $U(t,s)$ на подпространстве L^{n-1} подчинена оценке*

$$\|\mathbf{U}(t,s)\mid L^{n-1}\|\le cq^{t-s},\ s\le t;\ s,t\in Z, \tag{1.23}$$

где c и q — некоторые положительные числа, причем $0<q<1$. Эргодическое распределение $\pi(t)$ является почти-периодическим.

Доказательство. Необходимость. Пусть марковская почти-периодическая система (1.29) эргодична. Покажем, что система (1.36) в подпространстве L^{n-1} равномерно асимптотически устойчива, т.е. для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое целое $T(\varepsilon)>0$, что из $\|\mathbf{z}(s)\|=1$ и $\mathbf{z}(s)\in L^{n-1}$ вытекает, что $\|\mathbf{z}(t)\|<\varepsilon$ при $t-s>T(\varepsilon)$, иными словами

$$\|\mathbf{U}(t,s)\mid L^{n-1}\|<\varepsilon\ \textit{при}\ t-s>T(\varepsilon). \tag{1.24}$$

Если на мгновение допустить, что это не так, то для некоторого $\varepsilon_0>0$ можно указать такую последовательность решений $\mathbf{z}_p(t)$, лежащих в L^{n-1}, что

$$\|\mathbf{z}_p(s_p)\|=1, \|\mathbf{z}_p(t_p)\|\ge\varepsilon_0\ \textit{и}\ 0<t_p-s_p\to\infty. \tag{1.25}$$

Считая для определенности, что взята норма (0.4) при $\alpha=1$, в силу формулы (1.15) получаем

$$\varepsilon_0\le\|\mathbf{z}_p(t_p)\|\le\|\mathbf{z}_p(t)\|\le\|\mathbf{z}_p(s_p)\|,\ s_p\le t\le t_p. \tag{1.26}$$

Из последовательности сдвигов $\mathbf{z}_p(t+h_p)$, где $h_p=(s_p+t_p)/2$ и $|\,t\,|\le(t_p-s_p)/2$, выделим подпоследовательность, сходящуюся к некоторой $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ при каждом $t\in Z$, начиная с некоторого номера. Здесь мы используем канторов диагональный процесс и для удобства считаем, что уже первоначальная последовательность обладает указанным свойством: $\mathbf{z}_p(t+h_p)\to\tilde{\mathbf{z}}(t), t\in Z$. Из последовательности сдвигов $\mathbf{M}(t+h_p)$ в силу предполагаемой почти периодичности выберем равномерно сходящуюся при всех $t\in Z$ подпоследовательность, предел которой обозначим $\tilde{\mathbf{M}}(t)$. Опять-таки для простоты считаем, что равномерно сходится сама последовательность сдвигов: $\mathbf{M}(t+h_p)\Rightarrow\tilde{\mathbf{M}}(t), t\in Z.$ Нетрудно видеть, что $\tilde{\mathbf{z}}(t+1)=\tilde{\mathbf{M}}(t)\tilde{\mathbf{z}}(t)$ при $t\in Z$, причем в силу (1.26)

$$\varepsilon_0\le\|\tilde{\mathbf{z}}(t)\|\le 1,\ t\in Z. \tag{1.27}$$

Так как $\tilde{\mathbf{M}}(t-h_p)\Rightarrow\mathbf{M}(t)$ и последовательность $\tilde{\mathbf{z}}(t-h_p)$ допускает выделение сходящейся к некоторому пределу $\mathbf{z}(t)$ подпоследовательности, то $\mathbf{z}(t)$ есть решение исходной системы, лежащее в L^{n-1}, т.е. системы (1.36). Совершая предельный переход в неравенстве $\varepsilon_0\le\|\tilde{\mathbf{z}}(t-h_p)\|\le 1,\ t\in Z$ (см.(1.27)), получаем

$$\varepsilon_0\le\|\mathbf{z}(t)\|\le 1,\ t\in Z. \tag{1.28}$$

Существование такого решения находится в явном противоречии с асимптотической устойчивостью системы (1.36).

Из доказанной равномерной асимптотической устойчивости системы (1.36) в подпространстве L^{n-1} вытекает оценка (1.23) (более подробно см. об этом в [9, с. 36]).

Почти-периодичность эргодического распределения $\pi(t)$ можно доказать, например, следующим образом. Полагая $\mathbf{z}(t) = \pi(t) - \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0 \in W^{n-1}$, мы видим, что $\mathbf{z}(t)$ является определенным при всех $t \in Z$ ограниченным решением неоднородной системы, рассматриваемой в $L^{n-1} : \mathbf{z}(t+1) = \mathbf{M}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t)$, где $\mathbf{f}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0$ есть почти-периодическая функция со значениями в L^{n-1}. Так как для $\mathbf{M}(t) \,|\, L^{n-1}$ имеет место оценка (1.23), то по теореме [9, с. 78, теорема 1] рассматриваемая система имеет единственное ограниченное решение и это решение является почти-периодическим.

Так как достаточность очевидна, то теорема 1.3 доказана.

1.4. Общий случай. Рассмотрим линейную однородную систему разностных уравнений

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t)x_j(t), \qquad (1.29)$$
$$i = 1,2,...,n;\ \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t),$$

где дискретное время t принимает только целые значения $(t \in Z)$, $\mathbf{x}(t)$ есть n-мерный вектор с компонентами $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, а $\mathbf{M}(t) = (m_{ij}(t))$ при каждом фиксированном t есть некоторая $n \times n$-матрица. Система (1.29) легко решается «вперед» в том смысле, что если задано $\mathbf{x}(s)$, то значения решения системы при всех $t > s$ однозначно определяются формулой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t,s)\mathbf{x}(s), \qquad (1.30)$$

где

$$\mathbf{U}(t,s) = \mathbf{M}(t-1)\mathbf{M}(t-2)...\mathbf{M}(s),\ s < t \qquad (1.31)$$

есть *дискретная матричная функция Коши* (более подробно об этом см. в [9]).

Предположим теперь, что в любой фиксированный момент времени t матрица $\mathbf{M}(t)$ является марковской, т.е. (см. (0.7) и (0.8))

$$m_{ij}(t) \ge 0,\ i,j = 1,2,...,n, \qquad (1.32)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(t) = 1,\ j = 1,2,...,n. \qquad (1.33)$$

В этом случае систему (1.29) коротко будем называть *марковской*. Нетрудно видеть, что оператор $\mathbf{U}(t,s)$ оставляет симплекс W^{n-1} (0.2) инвариантным, т.е.

$$\mathbf{U}(t,s)W^{n-1} \subseteq W^{n-1},\ s < t. \qquad (1.34)$$

Поэтому если $\mathbf{x}(s) \in W^{n-1}$, то и $\mathbf{x}(t) \in W^{n-1}$ при всех $t > s$. Для развиваемой нами теории важно и то, что подпространство L^{n-1} (0.3) также инвариантно относительно оператора Коши,

$$\mathbf{U}(t,s)L^{n-1} \subseteq L^{n-1},\ s < t. \qquad (1.35)$$

Последнее позволяет рассматривать систему (1.29) в подпространстве L^{n-1}

$$\mathbf{z}(t+1) = (\mathbf{M}(t) \,|\, L^{n-1})\mathbf{z}(t),\ \mathbf{z}(t) \in L^{n-1}. \qquad (1.36)$$

Если в марковской системе (1.29) дискретное время t принимает только целые неотрицательные значения, то мы имеем дело с дискретной марковской цепью с конечным числом состояний, для которой в общем случае затруднительно дать определение эргодичности. Считая, что система (1.29) определена при всех целых t, мы предлагаем определение эргодичности в самом общем случае. Отметим, что если $\mathbf{M}(t)$ периодическая или почти-периодическая при неотрицательных t, то она допускает единственное продолжение на все целые t с сохранением периодичности или почти-периодичности соответственно.

Марковская система (1.29) называется *эргодической*, если она имеет единственное решение $\pi(t)$, удовлетворяющее условию

$$\pi(t) \in W^{n-1},\ t \in Z, \qquad (1.37)$$

и это решение обладает *притягивающим свойством*, т.е.

$$\|\mathbf{x}(t) - \pi(t)\| \to 0 \text{ при } s < t \to \infty \qquad (1.38)$$

для любого решения системы (1.29), лежащего в некоторый момент времени s в симплексе W^{n-1}. При выполнении перечисленных выше требований решение $\pi(t)$ называется *эргодическим распределением.*

Отметим прежде всего, что марковская система (1.29) всегда имеет решение, лежащее в симплексе W^{n-1} при всех $t \in Z$ (см. (1.37)). Действительно, обозначим через $\mathbf{x}_p(t)$ произвольные решения системы, лежащие в W^{n-1} при всех $t \ge -p (p = 1,2,...)$. Применяя канторов диагональный процесс, выберем из последовательности $\mathbf{x}_p(t)$ подпоследовательность $\mathbf{x}_{(p)}(t)$, сходящуюся при любом целом t к некоторому пределу $\pi(t)$. Ясно, что $\pi(t)$ есть решение системы (1.29), определенное при всех $t \in Z$ и лежащее в W^{n-1}.

Теорема 1.4. *Для эргодичности марковской системы (1.29) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left\| \mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1} \right\| \to 0 \qquad (1.39)$$

при $s < t \to \infty$ *для любого фиксированного* s *и при* $t > s \to -\infty$ *для любого фиксированного* t.

Условие (1.39), конечно, выполнено если система (1.31) равномерно асимптотически устойчива, т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое целое $T(\varepsilon) > 0$, что

$$\left\| \mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1} \right\| < \varepsilon \text{ при } t - s > T(\varepsilon). \qquad (1.40)$$

Как показано в [9, с. 36] последнее свойство равносильно оценке вида

$$\left\| \mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1} \right\| \le cq^{t-s},\ s < t, \qquad (1.41)$$

где c и q — некоторые положительные постоянные, причем $0 < q < 1$.

Доказательство теоремы 1.4. Пусть марковская система (1.29) эргодична. Покажем, что выполнено условие (1.39). Мы начнем с того, что установим асимптотическую устойчивость системы (1.36) в подпространстве L^{n-1}, откуда будет вытекать (1.39) при $s < t \to \infty$ для любого фиксированного s.

Пусть $\mathbf{e}_i(t)$ — решение системы (1.29) с начальным условием $\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ — стандартный базис в R^n. Так как $\mathbf{e}_i \in W^{n-1}$, то в силу притягивающего свойства $\left\| \mathbf{e}_i(t) - \pi(t) \right\| \to 0$ при $s < t \to \infty$. Пусть $\mathbf{z}(t)$ — произвольное решение системы (1.36), определенное при всех $t \ge s$. Так как

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}_i(t),\ \sum_{i=1}^{n} c_i = 0,$$

то

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\mathbf{e}_i(t) - \pi(t)) \to 0 \text{ при } s < t \to \infty,$$

и асимптотическая устойчивость системы (1.36) установлена.

Предположим, что свойство (1.39) при $t > s \to -\infty$ для некоторого $t_0 \in Z$ места не имеет, т.е. можно указать такие $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $s_p \to -\infty$, для которых $\left\| \mathbf{U}(t_0, s_p) \mid L^{n-1} \right\| \ge \varepsilon_0$. Найдем вектор $\mathbf{h}_p \in L^{n-1}$ единичной длины, для которого $\left\| \mathbf{U}(t_0, s_p)\mathbf{h}_p \right\| \ge \varepsilon_0$ и построим решение $\mathbf{z}_p(t)$ системы (1.36), для которого $\mathbf{z}_p(s_p) = \mathbf{h}_p$. Тогда $\left\| \mathbf{z}_p(t_0) \right\| = \left\| \mathbf{U}(t_0, s_p)\mathbf{h}_p \right\| \ge \varepsilon_0$.

Рассмотрим решение системы (1.29), имеющее вид $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{y}_p(t) + \delta_0 \mathbf{z}_p(t)$, где $\mathbf{y}_p(t)$ — решение той же системы, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{y}_p(s_p) = \mathrm{col}\,(1/n, 1/n, ..., 1/n)$, а величина δ_0 выбрана настолько малой, чтобы решение $\mathbf{x}_p(t)$ вместе $\mathbf{y}_p(t)$ лежало в W^{n-1} при $t = s_p$. Для нас важно, что $\| \mathbf{x}_p(t_0) - \mathbf{y}_p(t_0) \| = \delta_0 \| \mathbf{z}_p(t_0) \| \ge \delta_0 \varepsilon_0$ при всех $p = 1, 2, \ldots$. Применяя канторов диагональный процесс, выберем из последовательностей $\mathbf{x}_p(t)$ и $\mathbf{y}_p(t)$ подпоследовательности, сходящиеся при каждом $t \in Z$ к некоторым пределам $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ соответственно. Нетрудно видеть, что $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ являются решениями системы (1.29), лежащими в W^{n-1} при всех $t \in Z$, причем $\| \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0) \| \ge \delta_0 \varepsilon_0$, т.е. они различны. Мы получили противоречие с предполагаемой эргодичностью системы (1.29).

Итак, необходимость условия (1.39) доказана в полном объеме. Так как достаточность очевидна, то теорема 1.4 доказана.

Полагая

$$q(t) \equiv \left\| \mathbf{M}(t) \mid L^{n-1} \right\|,\ t \in Z, \qquad (1.42)$$

получаем в силу определения (1.31)

$$\left\| \mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1} \right\| \le \sqcap_{p=s}^{t-1} q(p),\ s < t. \qquad (1.43)$$

По теореме 1.4 система (1.29) обладает эргодическим свойством, если

$$\sqcap_{p=s}^{t-1} q(p) \to 0 \qquad (1.44)$$

при $s < t \to \infty$ для любого фиксированного s и при $t > s \to -\infty$ для любого фиксированного t. Разумеется, сформулированное условие заведомо выполнено, если стремление к нулю в (1.44) происходит равномерно по t и s, лишь бы $t - s \to \infty$.

Беря в (1.42) различные нормы, в частности, полагая

$$q_\alpha(t) \equiv \left\| \mathbf{M}(t) \mid L^{n-1} \right\|_\alpha,\ t \in Z, \qquad (1.45)$$

приходим к различным достаточным условиям эргодичности, которые в силу формул (1.10) и (1.12) (при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) могут быть выписаны в эффективной форме.

§2. КОЛМОГОРОВСКИЕ СИСТЕМЫ

2.1. Постоянные коэффициенты. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j(t),\ i = 1, 2, ..., n;\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \qquad (2.1)$$

где точка означает производную по непрерывному времени t, принимающему всевозможные вещественные значения, $t \in R$, вектор $x(t)$ из R^n имеет компоненты $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, а $\mathbf{K} = (k_{ij})$ есть некоторая колмогоровская матрица (см. § 0). Нетрудно видеть, что для решений системы (2.1) справедлива формула

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-s)\mathbf{K}}\mathbf{x}(s),\ t, s \in R. \tag{2.2}$$

Системы вида (2.1) возникают в теории непрерывных марковских цепей с конечным числом состояний [2, 14], в теории массового обслуживания [15], при изучении задач химической кинетики [16] и в других приложениях.

Колмогоровские матрицы обладают замечательными спектральными свойствами: их спектр лежит в замкнутой левой полуплоскости, причем нуль является собственным значением, а все ненулевые собственные значения имеют отрицательные вещественные части; нулевое собственное значение может быть как простым, так и кратным, причем в последнем случае ему отвечают только простые элементарные делители (см., например, [14]). Отметим важное вытекающее из (0.10) соотношение

$$\det \mathbf{K} = 0. \tag{2.3}$$

При $t \ge s$ матрица $exp(t-s)\mathbf{K}$ является марковской. Поэтому, если $\mathbf{x}(s) \in W^{n-1}$ (0.2), то и $\mathbf{x}(t) \in W^{n-1}$ при всех $t \ge s$, т.е.

$$e^{(t-s)\mathbf{K}}W^{n-1} \subseteq W^{n-1},\ \ s \le t. \tag{2.4}$$

Далее, подпространство L^{n-1} (0.3) инвариантно относительно оператора $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K}L^{n-1} \subseteq L^{n-1} \tag{2.5}$$

и, более того, образ $\operatorname{im}\mathbf{K}$ лежит в L^{n-1}. Действительно, так как $\mathbf{1K} = 0$, то для произвольного $\mathbf{x} \in R^n$ получаем $\mathbf{1}(\mathbf{Kx}) = (\mathbf{1K})\mathbf{x} = 0$.

Говорят, что колмогоровская матрица $\mathbf{K}$ (система (2.1)) обладает *эргодическим свойством*, если для любого $\mathbf{x}(s) \in W^{n-1}$ решение $\mathbf{x}(t)$ системы (2.1) имеет предел при $t \to \infty$ и этот предел π не зависит от выбора $\mathbf{x}(s)$. Мы видим, что

$$\mathbf{K}\pi = 0, \pi \in W^{n-1}. \tag{2.6}$$

Вектор π называется *эргодическим распределением.*

Нетрудно сформулировать *спектральный признак эргодичности*: для эргодичности колмогоровской матрицы необходимо и достаточно, чтобы ее нулевое собственное значение было простым. В других терминах — для эргодичности колмогоровской матрицы $\mathbf{K}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\mathbf{K} = n-1 \tag{2.7}$$

(сравни с (2.3)). При выполнении этого условия хотя бы один из главных миноров порядка $n-1$ матрицы $\mathbf{K}$ не равен нулю и, если $K_{(i)}$ есть главный минор, получающийся из определителя матрицы $\mathbf{K}$ вычеркиванием i-й строки и i-го столбца, то компоненты эргодического распределения даются формулами

$$\pi_i = \frac{K_{(i)}}{K_{(1)} + K_{(2)} + \ldots + K_{(n)}},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Сейчас для нас является важным следующее простое соображение, связывающее воедино понятия эргодичности и устойчивости. Согласно (2.5) подпространство L^{n-1} инвариантно относительно оператора $\mathbf{K}$ и, значит, $\mathbf{K} \mid L^{n-1}$ есть оператор, действующий в L^{n-1}. Ясно, что *матрица* $\mathbf{K}$ *обладает эргодическим свойством тогда и только тогда, когда система*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{K} \mid L^{n-1})\mathbf{z}(t),\ \mathbf{z}(t) \in L^{n-1} \tag{2.9}$$

асимптотически устойчива в подпространстве L^{n-1}. Заметим, что сама система (2.1) не является, конечно, асимптотически устойчивой, так как нуль есть собственное значение матрицы $\mathbf{K}$.

Асимптотическая устойчивость системы (2.9) равносильна тому, что спектральная абсцисса оператора $\mathbf{K} \mid L^{n-1}$ отрицательна,

$$\operatorname{spa}(\mathbf{K} \mid L^{n-1}) < 0, \tag{2.10}$$

т.е. спектр оператора $\mathbf{K} \mid L^{n-1}$ должен лежать внутри левой полуплоскости. Конечно, требование (2.10) заведомо будет выполнено, если

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\| < 0 \tag{2.11}$$

для какой-либо логарифмической нормы (так кака спектральная абсцисса всегда не превосходит логарифмической нормы, $\operatorname{spa}(\mathbf{K} \mid L^{n-1}) \le \operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\|$). Здесь возникают такие же трудности, как и при изучении марковских систем, однако в некоторых случаях логарифмическая норма оператора на подпространстве L^{n-1} может быть явно вычислена.

Покажем, что

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\|_0 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{[n/2]} (\tilde{k}_{ij} - \tilde{k}_{i,n-j+1}), \tag{2.12}$$

где квадратные скобки означают целую часть числа, а последовательность $\tilde{k}_{i1}, \tilde{k}_{i2} \ge \tilde{k}_{i3} \ge \ldots \ge \tilde{k}_{in}$

при каждом фиксированном i получается из последовательности элементов i-й строки $\mathbf{k}_i = (k_{i1}, k_{i2}, ..., k_{in})$ следующим образом: на первое место ставится диагональный элемент, $\tilde{k}_{i1} = k_{ii}$, а остальные элементы нумеруются в невозрастающем порядке.

Так как по определению логарифмической нормы оператора $\mathbf{K}$ на подпространстве L^{n-1}

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\|_0 = \lim_{0<t\to 0} \frac{\left\|(\mathbf{I}+t\mathbf{K}) \mid L^{n-1}\right\|_0 - 1}{t}, \qquad (2.13)$$

то нам надлежит найти выражение, стоящее в числителе написанной дроби. По формуле (1.10)

$$\left\|(\mathbf{I}+t\mathbf{K}) \mid L^{n-1}\right\|_0 = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{[n/2]} (\tilde{m}_{ij}(t) - \tilde{m}_{i,n-j+1}(t)), \qquad (2.14)$$

где $m_{ij}(t) = \delta_{ij} + tk_{ij}$ при $i, j = 1, 2, ..., n$ и δ_{ij} есть кронекеровская дельта. В силу того, что при всех достаточно малых $t > 0$ имеем $\tilde{m}_{i1}(t) = 1 + tk_{ii} \equiv 1 + t\tilde{k}_{i1}$ и $\tilde{m}_{ij}(t) = t\tilde{k}_{ij}$ при $j \ne i$, то согласно (2.14)

$$\left\|(\mathbf{I}+t\mathbf{K}) \mid L^{n-1}\right\|_0 = \max_{1\le i\le n}\{1 + t\tilde{k}_{i1} - t\tilde{k}_{in} + $$
$$+ t\sum_{j=2}^{[n/2]} (\tilde{k}_{ij} - \tilde{k}_{i,n-j+1})\} = 1 + t\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{[n/2]} (\tilde{k}_{ij} - \tilde{k}_{i,n-j+1}).$$

Поэтому из формулы (2.13) вытекает требуемая формула (2.12).

Докажем теперь следующую важную формулу

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\|_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\max_{i<j}\{k_{ii} + k_{jj} - k_{ij} - k_{ji} + \sum_{s\ne i,j} |\, k_{si} - k_{sj} \,|\}. \qquad (2.15)$$

Подчеркнем, что при фиксированных $i < j$ суммирование проводится по всем $s = 1, 2, ..., n$, кроме i и j. Так как по определению логарифмической нормы оператора $\mathbf{K}$ на подпространстве L^{n-1}

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\|_1 = \lim_{0<t\to 0} \frac{\left\|(\mathbf{I}+t\mathbf{K}) \mid L^{n-1}\right\|_1 - 1}{t}, \qquad (2.16)$$

то нам нужно подсчитать величину, стоящую в числителе написанной дроби. По формуле Добрушина (1.12) получаем

$$\left\|(\mathbf{I}+t\mathbf{K}) \mid L^{n-1}\right\|_1 = \frac{1}{2}\max_{i<j} \sum_{s=1}^{n} \left|m_{si}(t) - m_{sj}(t)\right|, \qquad (2.17)$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t) = \mathbf{I} + t\mathbf{K}$ и, значит, $m_{sp}(t) = \delta_{sp} + tk_{sp}$ при $s, p = 1, 2, ..., n$. При фиксированных $i < j$ для достаточно малых $t > 0$ находим

$$\sum_{s=1}^{n} \left|m_{si}(t) - m_{sj}(t)\right| =$$
$$= \left|1 + tk_{ii} - tk_{ij}\right| + \left|tk_{ji} - (1 + tk_{jj})\right| + \sum_{s\ne i,j} \left|tk_{si} - tk_{sj}\right| =$$
$$= 1 + t(k_{ii} - k_{ij}) + 1 + t(k_{jj} - k_{ji}) + t\sum_{s\ne i,j} \left|k_{si} - k_{sj}\right|.$$

Поэтому по формуле (2.17)

$$\left\|(\mathbf{I}+t\mathbf{K}) \mid L^{n-1}\right\|_1 =$$
$$= 1 + t\frac{1}{2}\max_{i<j}\{k_{ii} + k_{jj} - k_{ij} - k_{ji} + \sum_{s\ne i,j} \left|k_{si} - k_{sj}\right|\}$$

что в силу (2.11) приводит к требуемой формуле (2.15).

Формулы (2.12) и (2.15) впервые были опубликованы без доказательства в [17]. Если правая часть хотя бы одной из указанных формул отрицательна, то в силу (2.11) матрица $\mathbf{K}$ обладает эргодическим свойством.

Более того, имеет место оценка

$$\left\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\right\| \le e^{(t-s)\gamma} \left\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\right\|, \; s \le t, \qquad (2.18)$$

где γ есть логарифмическая норма оператора $\mathbf{K}$ на подпространстве L^{n-1} (см. формулу (2.11)). В оценке (2.18) предполагается, что $\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s) \in W^{n-1}$.

Придадим формуле (2.15) вид, полнее учитывающий специфику колмогоровских матриц. Воспользуемся элементарным равенством (1.13). Так как в силу (0.10)

$$k_{ii} + k_{jj} - k_{ij} - k_{ji} + \sum_{s\ne i,j} \left|k_{si} - k_{sj}\right| =$$
$$= k_{ii} + k_{jj} - k_{ij} - k_{ji} + \sum_{s\ne i,j} k_{si} + \sum_{s\ne i,j} k_{s,j} -$$
$$-2\sum_{s\ne i,j} \min(k_{si}, k_{sj}) = \sum_{s=1}^{n} k_{si} + \sum_{s=1}^{n} k_{sj} -$$
$$-2\{k_{ij} + k_{ji} + \sum_{s\ne i,j} \min(k_{si}, k_{sj})\} =$$
$$= -2\{k_{ij} + k_{ji} + \sum_{s\ne i,j} \min(k_{si}, k_{sj})\},$$

то согласно (0.9) формула (2.15) принимает вид

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\|_1 = -\min_{i<j}\{k_{ij} + k_{ji} + \sum_{s\ne i,j} \min(k_{si}, k_{sj})\}. \qquad (2.19)$$

Формула (2.19) показывает, что всегда

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K} \mid L^{n-1}\right\|_1 \le 0, \qquad (2.20)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда при некоторых $i < j$ справедливы соотношения $k_{ij}=0, k_{ji}=0, k_{si}k_{sj}=0$ при $s=1,2,...,n; s\neq i,j$.

Оказывается, что для колмогоровских систем с постоянными коэффициентами (2.1) справедлив аналог критерия Деблина: если все внедиагональные элементы какой-либо строки колмогоровской матрицы положительны, то система (2.1) обладает эргодическим свойством. Мы докажем следующий общий результат, из которого сформулированный аналог критерия Деблина вытекает немедленно. Речь идет об оценке

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K}\mid L^{n-1}\right\|_1 \leq -\sum_{i=1}^{n}\Delta_i, \qquad (2.21)$$

где Δ_i есть минимальный из внедиагональных элементов i-й строки матрицы $\mathbf{K}, i=1,2,...,n$. Если все внедиагональные элементы i-й строки положительны, то $\Delta_i>0$ и так $\Delta_j\geq 0$ при $j\neq i$, то согласно (2.21) логарифмическая норма отрицательна, что, конечно, гарантирует эргодичность матрицы $\mathbf{K}$. Оценка (2.21) прямо следует из (2.19), если заметить, что выражение в фигурных скобках оценивается снизу суммой $\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n$ при любых $i<j$.

Для гельдеровых норм при $0<\alpha<1$ мы имеем менее законченный результат

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K}\mid L^{n-1}\right\|_\alpha \leq \min_{u_1,...,u_n}\max_{1\leq i\leq n}$$
$$\{k_{ii}-u_i+(1-\alpha)\sum_{j\neq i}|k_{ij}-u_i|+\alpha\sum_{j\neq i}|k_{ji}-u_j|\}. \qquad (2.22)$$

При исследовании колмогоровских матриц на эргодичность можно воспользоваться более точной оценкой

$$\operatorname{spa}(\mathbf{K}\mid L^{n-1}) \leq \min_{u_1,...,u_n}\max_{1\leq i\leq n}$$
$$\{k_{ii}-u_i+(\sum_{j\neq i}|k_{ij}-u_i|)^{1-\alpha}(\sum_{j\neq i}|k_{ji}-u_j|)^{\alpha}\}. \qquad (2.23)$$

Эргодичность будет установлена, если правая часть какой-либо из формул (2.22) или (2.23) будет отрицательной. Для получения наилучшей оценки спектральной меры эргодичности нужно провести еще минимизацию по параметру α.

2.2. Периодические коэффициенты. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений (2.42) с переменными коэффициентами, где колмогоровская при каждом t матрица $\mathbf{K}(t)=(k_{ij}(t))$ является периодической с периодом $\omega>0$,

$$\mathbf{K}(t+\omega)=\mathbf{K}(t),\ t\in R. \qquad (2.24)$$

Едва ли не одной из первых работ в указанном направлении была статья [18], в которой авторы для изучения задачи из теории массового обслуживания привлекли логарифмичекую норму.

Пусть $\mathbf{U}(t)$ — фундаментальная матричная функция, соответствующая системе (2.42) при условии (2.24), причем $\mathbf{U}(0)=\mathbf{I}$. В силу условий (2.43) и (2.44) матрица $\mathbf{U}(t)$ при каждом $t\geq 0$ является марковской. Особую роль в теории линейных систем с периодическими коэффициентами играет (непрерывная) матрица монодромии $\mathbf{U}(\omega)$ [19]. Марковская матрица $\mathbf{U}(\omega)$ имеет такой вектор $\mathbf{x}_0\in W^{n-1}$, для которого $\mathbf{U}(\omega)\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_0$. Рассмотрим решение $\pi(t)=\mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0$ системы (2.42). Так как $\pi(t+\omega)=\mathbf{U}(t+\omega)x_0=\mathbf{U}(t)\mathbf{U}(\omega)\mathbf{x}_0=\mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0=\pi(t)$, то

$$\pi(t+\omega)=\pi(t),\ \pi(t)\in W^{n-1},\ t\in R, \qquad (2.25)$$

т.е. система (2.42) в периодическом случае (2.24) всегда имеет периодическое решение, лежащее в W^{n-1} при всех $t\in R$.

Общее определение эргодичности колмогоровских систем, приведенное в п. 2.4, говорит о том, что эргодичность имеет место в том и только том случае, если построенное периодическое решение $\pi(t)$ единственно (среди решений системы, лежащих в W^{n-1} при всех $t\in R$) и обладает притягивающим свойством. Нетрудно показать, что эргодичность системы (2.42) с периодическими коэффициентами (см.(2.24)) равносильна эргодичности матрицы монодромии (в смысле теории дискретных систем (см. п. 1.1)).

Как это вытекает из общей теории (см. п. 2.4), эргодичность системы (2.42) при условиях периодичности (2.24) равносильна равномерной асимптотической устойчивости системы (2.50) в подпространстве L^{n-1}.

Перейдем к кругу вопросов, связанных с логарифмической нормой. Пусть R^n каким-либо образом нормировано, и можно говорить о норме оператора и его логарифмической норме как во всем пространстве R^n, так и в подпространстве L^{n-1}. Введем следующее обозначение

$$\gamma(t)=\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K}(t)\mid L^{n-1}\right\|,\ t\in R. \qquad (2.26)$$

Так как

$$\left|\gamma(t)-\gamma(s)\right|=\left|\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K}(t)\mid L^{n-1}\right\|-\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K}(s)\mid L^{n-1}\right\|\right|\leq$$
$$\leq\left\|\mathbf{K}(t)\mid L^{n-1}-\mathbf{K}(s)\mid L^{n-1}\right\|=$$
$$=\left\|(\mathbf{K}(t)-\mathbf{K}(s))\mid L^{n-1}\right\|\leq\left\|\mathbf{K}(t)-\mathbf{K}(s)\right\|,$$

то $\gamma(t)$ непрерывна и в силу (2.24) периодична с периодом ω вместе с матричной функцией $\mathbf{K}(t)$. Оценка (2.53) показывает, что условие

$$\gamma^0 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \gamma(t)dt < 0 \qquad (2.27)$$

есть достаточное условие эргодичности, причем имеет место оценка $\left\|\mathbf{U}(\omega) \mid L^{n-1}\right\| \le \exp(\omega\gamma_0) < 1$. Формулы (2.12) и (2.15) позволяют выписать различные эффективно проверяемые достаточные условия эргодичности.

Теорема 2.2. *Для эргодичности колмогоровской периодической системы (2.42)—(2.24) необходимо и достаточно, чтобы эргодичной была матрица монодромии* $\mathbf{U}(\omega)$. *Для эргодичности колмогоровской периодической системы (2.42)—(2.24) достаточно, чтобы было выполнено условие (2.27).*

Наряду с системой (2.42)—(2.24) рассмотрим усредненную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}^0\mathbf{x}(t),\ t \in R, \qquad (2.28)$$

где $\mathbf{K}^0$ есть среднее значение $\mathbf{K}(t)$,

$$\mathbf{K}^0 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \mathbf{K}(t)dt. \qquad (2.29)$$

Условия (2.43) и (2.44) говорят о том, что матрица $\mathbf{K}^0$ является колмогоровской. Отметим, что условие (2.27) настолько сильно, что оно гарантирует эргодичность не только исходной системы, но и усредненной системы (2.28). Это следует из неравенства

$$\operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K}^0 \mid L^{n-1}\right\| \le \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \operatorname{lgn}\left\|\mathbf{K}(t) \mid L^{n-1}\right\|dt, \qquad (2.30)$$

доказательство которого мы опускаем.

2.3. Почти-периодические коэффициенты. Рассмотрим колмогоровскую систему (2.42) с почти-периодическими (в смысле Бора [20—22]) коэффициентами.

Теорема 2.3. *Колмогоровская почти-периодическая система (2.42) обладает эргодическим свойством в том и только том случае, если непрерывная матричная функция Коши на подпространстве L^{n-1} подчинена оценке*

$$\left\|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\right\| \le ce^{(t-s)\gamma},\ s \le t, \qquad (2.31)$$

где $c > 0$ и $\gamma < 0$ — некоторые числа. Эргодическое распределение $\pi(t)$ (см.(2.47)) является почти-периодическим.

Доказательство. Необходимость. Пусть колмогоровская почти-периодическая система (2.42) эргодична. Покажем, что система (2.50) в подпространстве L^{n-1} равномерно асимптотически устойчива, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T(\varepsilon) > 0$, что

$$\left\|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\right\| \le \varepsilon \textit{ при } t - s \ge T(\varepsilon). \qquad (2.32)$$

Предполагая обратное, для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ можно указать такие последовательности $s_p < t_p$ и $\mathbf{z}_p(t)$, для которых

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{z}_p(s_p)\right\| = 1,\ \mathbf{z}_p(s_p) \in L^{n-1}\\ \left\|\mathbf{z}_p(t_p)\right\| > \varepsilon_0,\ 0 < t_p - s_p \to \infty.\end{gathered} \qquad (2.33)$$

Считая, что рассматривается норма (0.4) при $\alpha = 1$ в силу (2.20) получаем

$$\varepsilon_0 < \left\|\mathbf{z}_p(t_p)\right\| \le \left\|\mathbf{z}_p(t)\right\| \le \left\|\mathbf{z}_p(s_p)\right\| = 1,\ s_p \le t \le t_p. \quad (2.34)$$

Рассмотрим последовательность сдвигов

$$\tilde{\mathbf{z}}_p(t) = \mathbf{z}_p(t + h_p),\ h_p = \frac{s_p + t_p}{2},\ |t| \le \frac{t_p - s_p}{2}. \quad (2.35)$$

Из последовательности $\tilde{\mathbf{z}}_p(t)$ выделим подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ при каждом фиксированном $t \in R$ (начиная с некоторого номера). Здесь мы используем канторов диагональный процесс и для удобства считаем, что уже первоначальная последовательность обладает указанным свойством: $\tilde{\mathbf{z}}_p(t) \to \tilde{\mathbf{z}}(t)$ при любом $t \in R$ и $p > N(t)$. Из (2.34) находим

$$\varepsilon_0 \le \left\|\tilde{\mathbf{z}}(t)\right\| \le 1,\ t \in R. \qquad (2.36)$$

Из последовательности сдвигов $\mathbf{K}(t + h_p)$ в силу почти-периодичности матричной функции $\mathbf{K}(t)$ выберем равномерно сходящуюся на всей оси R подпоследовательность, предел которой обозначим $\tilde{\mathbf{K}}(t)$. Без ограничения общности можно считать, что равномерно сходится первоначальная последовательность сдвигов: $\mathbf{K}(t + h_p) \rightrightarrows \tilde{\mathbf{K}}(t), t \in R$. Нетрудно видеть, что $\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = \tilde{\mathbf{K}}(t)\tilde{\mathbf{z}}(t)$.

Так как $\tilde{\mathbf{K}}(t - h_p) \rightrightarrows \mathbf{K}(t), t \in R$, то и $\tilde{\mathbf{z}}(t - h_p)$ сходится к некоторому решению $\mathbf{z}(t)$ системы (2.42), равномерно на каждом конечном промежутке; может быть здесь потребуется совершить переход к подпоследовательности. Совершая предельный переход в неравенстве $\varepsilon_0 \le \left\|\tilde{\mathbf{z}}(t - h_p)\right\| \le 1$ (см. (2.36)), получаем

$$\varepsilon_0 \le \left\|\mathbf{z}(t)\right\| \le 1,\ t \in R,\ \mathbf{z}(t) \in L^{n-1}. \qquad (2.37)$$

Существование такого решения системы (2.50) в подпространстве L^{n-1} находится в явном противоречии с ее асимптотической устойчивостью.

Из (2.32) вытекает оценка (2.31) (более подробно см. об этом [9, с. 36]).

Достаточность вытекает из теоремы 2.4.

Почти периодичность эргодического распределения $\pi(t)$ может быть доказана, например, следующим образом. Полагая $\mathbf{z}(t) = \pi(t) - \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0$ — произвольный фиксированный элемент из W^{n-1}, мы видим, что $\mathbf{z}(t)$ является определенным на всей числовой оси ограниченным решением системы в $L^{n-1} : \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{K}(t)\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0 \in L^{n-1}$. Из почти-периодичности $\mathbf{K}(t) \mid L^{n-1}$ и $\mathbf{f}(t)$ в силу оценки (2.31) вытекает, что написанная система имеет единственное ограниченное решение и это решение является почти-периодическим.

Теорема 2.3 доказана.

Аналогичными рассуждениями может быть установлено, что если колмогоровская почти периодическая система имеет единственное решение, лежащее в W^{n-1} при всех $t \in R$, то эта система обладает эргодическим свойством. Точно также, если лежащее в W^{n-1} при всех $t \in R$ решение обладает притягивающим свойством, то система эргодична.

Для получения количественных оценок, рассмотрим числовую функцию (2.52). В силу оценки, сразу же следующей за этой формулой, она почти-периодична вместе с $\mathbf{K}(t)$. Нетрудно видеть, что если среднее значение отрицательно,

$$\gamma^0 = \lim_{0<t-s\to\infty} \frac{1}{t-s}\int_s^t \gamma(\sigma)d\sigma < 0, \qquad (2.38)$$

то для любого $\gamma, \gamma^0 < \gamma < 0$, в силу (2.53) имеет место оценка (2.31), где постоянная c зависит, конечно, от γ. Просто полагать $\gamma = \gamma^0$ нельзя, так как среди почти-периодических функций с нулевым средним значением есть такие, интеграл от которых неограничен.

Рассмотрим среднее значение $\mathbf{K}^0$ матричной почти-периодической функции $\mathbf{K}(t)$,

$$\mathbf{K}^0 = \lim_{0<t-s\to\infty} \frac{1}{t-s}\int_s^t \mathbf{K}(\sigma)d\sigma. \qquad (2.39)$$

Как это непосредственно вытекает из (2.43) и (2.44) матрица $\mathbf{K}^0$ также является колмогоровской. Рассмотрим усредненную систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}^0\mathbf{x}(t),\ t \in R. \qquad (2.40)$$

Она несет важную информацию об исходной системе и, будучи системой с постоянными коэффициентами, допускает применение разнообразных средств обнаружения эргодичности, разработанных в п. 2.1. Оказывается, что колмогоровская система (2.42) с переменными почти периодическими коэффициентами эргодична тогда и только тогда, когда этим свойством обладает усредненная колмогоровская система (2.40) с постоянными коэффициентами [23]. Ограничимся оценкой

$$\lg n\left\|\mathbf{K}^0 \mid L^{n-1}\right\| \le \lim_{0<t-s\to\infty} \int_s^t \lg n\left\|\mathbf{K}(\sigma) \mid L^{n-1}\right\| d\sigma, \qquad (2.41)$$

из которой сразу же вытекает, что при условии (2.38) эргодична не только исходная колмогоровская система (2.42), но и усредненная система (2.40).

2.4. Общий случай. Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n k_{ij}(t)x_j(t),\ i = 1, 2, ..., n; \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \qquad (2.42)$$

где $k_{ij}(t)$ — произвольные непрерывные функции непрерывного времени t, удовлетворяющие условиям

$$k_{ij}(t) \ge 0,\ i, j = 1, 2, ..., n;\ i \ne j, \qquad (2.43)$$

$$\sum_{i=1}^n k_{ij}(t) = 0,\ j = 1, 2, ..., n. \qquad (2.44)$$

Мы видим, что матрица $\mathbf{K}(t) = (k_{ij}(t))$ при каждом $t \in R$ является колмогоровской (см. (0.9) и (0.10)). Системы такого вида будем называть *колмогоровскими*.

Из условий (2.43) и (2.44) вытекает, что если $\mathbf{x}(s) \in W^{n-1}$, то $\mathbf{x}(t) \in W^{n-1}$ при любом $t \ge s$ для произвольного решения системы (2.42). Иными словами

$$\mathbf{U}(t,s)W^{n-1} \subseteq W^{n-1},\ \ s \le t, \qquad (2.45)$$

где $\mathbf{U}(t,s)$ есть *(непрерывная) матричная функция Коши* системы (2.42). Для нас важно, что не только W^{n-1}, но и подпространство L^{n-1} инвариантно относительно оператора $\mathbf{U}(t,s)$ при $t \ge s$, т.е.

$$\mathbf{U}(t,s)L^{n-1} \subseteq L^{n-1},\ s \le t. \qquad (2.46)$$

Мы скажем, что колмогоровская система (2.42) является *эргодической*, если она имеет единственное решение $\pi(t)$, для которого

$$\pi(t) \in W^{n-1},\ t \in R, \qquad (2.47)$$

причем это решение обладает *притягивающим свойством*: если $\mathbf{x}(s) \in W^{n-1}$, то

$$\|\mathbf{x}(t) - \pi(t)\| \to 0,\ t \to \infty. \qquad (2.48)$$

Решение $\pi(t)$, удовлетворяющее поставленным требованиям, назовем *эргодическим распределением.*

Покажем, что колмогоровская система (2.42) всегда имеет решение, лежащее в W^{n-1} при всех $t \in R$. Для доказательства возьмем произвольную последовательность $0 > t_p \to -\infty$ и обозначим через $\mathbf{x}_p(t)$ произвольное решение изучаемой системы, лежащее в W^{n-1} при всех $t \geq t_p$. Для этого достаточно взять $\mathbf{x}_p(t_p) \in W^{n-1}$. Выберем из последовательности $\mathbf{x}_p(0)$, лежащей в W^{n-1}, сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что сходится сама последовательность $\mathbf{x}_p(0) : \mathbf{x}_p(0) \to \mathbf{x}_0 \in W^{n-1}$. Обозначим через $\mathbf{x}(t)$ решение изучаемой системы, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Покажем, что оно лежит в W^{n-1} при всех t. Для $t \geq 0$ это очевидно. Берем произвольное $t < 0$ и фиксируем. Так как при $t_p < t$ для всех достаточно больших p, то $\mathbf{x}_p(t) \in W^{n-1}$ и $\mathbf{x}_p(t) \to \mathbf{x}(t)$ в силу непрерывной зависимости от начальных данных. Совершая предельный переход во включении $\mathbf{x}_p(t) \in W^{n-1}$, получаем $\mathbf{x}(t) \in W^{n-1}$ и наше утверждение доказано.

Теорема 2.4. *Колмогоровская система (2.42) обладает эргодическим свойством тогда и только тогда, когда*

$$\|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\| \to 0 \qquad (2.49)$$

при $s \leq t \to \infty$ *для любого фиксированного* s *и при* $t \geq s \to -\infty$ *для любого фиксированного* t.

Условие (2.49) связано с поведением решений системы

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{K}(t) \mid L^{n-1})\mathbf{z}(t),\ \mathbf{z}(t) \in L^{n-1}, \qquad (2.50)$$

рассматриваемой — подчеркнем это — в подпространстве L^{n-1}. Конечно, это условие выполнено, если система (2.50) равномерно асимптотически устойчива, что равносильно оценке

$$\|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\| \leq ce^{(t-s)\gamma},\ s \leq t \qquad (2.51)$$

для некоторых $c > 0$ и $\gamma < 0$.

Доказательство теоремы 2.4. Достаточность. Пусть выполнено условие (2.49). Покажем, что колмогоровская система (2.42) обладает эргодическим свойством. Пусть $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ - решения изучаемой системы, лежащие в W^{n-1} при всех $t \in R$. Так как разность $\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$ лежит в L^{n-1}, то при любом фиксированном t

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = \|\mathbf{U}(t,s)(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s))\| =$$
$$= \|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s))\| \leq$$
$$\leq \|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\| \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\| \leq$$
$$\leq \|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\| c_1 \to 0$$

при $s \to -\infty$ (c_1 - точная верхняя граница нормы разности $\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\|$ при всех $s \leq t$.) Итак, $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$ и свойство единственности установлено. Покажем, что решение $\pi(t)$, существование которого выше было доказано, обладает притягивающим свойством. Действительно, при любом фиксированном s, если $\mathbf{x}(s) \in W^{n-1}$, то

$$\|\mathbf{x}(t) - \pi(t)\| = \|\mathbf{U}(t,s)(\mathbf{x}(s) - \pi(s))\| \leq$$
$$\leq \|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\| \|\mathbf{x}(s) - \pi(s)\| \to 0$$

при $t \to \infty$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть колмогоровская система (2.42) обладает эргодическим свойством. Покажем, что выполнено условие (2.49). Фиксируем s и пусть $\mathbf{e}_i(t)$ — решение системы (2.42) с начальными условиями $\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ — стандартный базис в R^n. Так как $\mathbf{e}_i(s) \in W^{n-1}$, то $\mathbf{e}_i(t) - \pi(t) \to 0$ при $s \leq t \to \infty$. Пусть $\mathbf{z}(t)$ — решение системы (2.50) с $\mathbf{z}(s) \in L^{n-1}$. Тогда

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i(t),\quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\mathbf{e}_i(t) - \pi(t)) \to 0,\ s \leq t \to \infty$$

и асимптотическая устойчивость системы (2.50) установлена (т.е. $\|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\| \to 0$ при $s \leq t \to \infty$ при любом фиксированном s).

Предположим, что свойство $\|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\| \to 0$ при $t \geq s \to -\infty$ для некоторого t_0 места не имеет, т.е. можно указать такие ε_0 и последовательность $s_p \to -\infty$, для которых

$$\|\mathbf{U}(t_0, s_p) \mid L^{n-1}\| \geq \varepsilon_0.$$

Для каждого $p = 1, 2, ...$ найдем такой вектор $\mathbf{h}_p \in L^{n-1}$ единичной длины, для которого

$$\|\mathbf{U}(t_0, s_p) \mid L^{n-1}\mathbf{h}_p\| \geq \varepsilon_0.$$

Построим решение $\mathbf{z}_p(t)$ системы (2.50), для которого $\mathbf{z}_p(s_p) = \mathbf{h}_p$. Тогда

$$\left\|\mathbf{z}_p(t_0)\right\| = \left\|\mathbf{U}(t_0, s_p) \mid L^{n-1}\mathbf{h}_p\right\| \geq \varepsilon_0.$$

Рассмотрим решение системы (2.42)

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{y}_p(t) + \delta_0 \mathbf{z}_p(t),$$

где $\mathbf{y}_p(t)$ — решение системы (2.42), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{y}_p(s_p) = \mathrm{col}\,(1/n, 1/n, ..., 1/n)$, а величина δ_0 выбрана настолько малой, чтобы решение $\mathbf{x}_p(t)$ вместе с $\mathbf{y}_p(t)$ лежало в W^{n-1} при $t = s_p$. Поэтому $\mathbf{x}_p(t)$ и $\mathbf{y}_p(t)$ в W^{n-1} при всех $t \geq s_p$. Для нас важно, что при всех $p = 1, 2, ...$

$$\left\|\mathbf{x}_p(t_0) - \mathbf{y}_p(t_0)\right\| = \delta_0 \left\|\mathbf{z}_p(t_0)\right\| \geq \delta_0 \varepsilon_0.$$

Применяя канторов диагональный процесс, выберем из последовательностей $\mathbf{x}_p(t)$ и $\mathbf{y}_p(t)$ подпоследовательности $\mathbf{x}_p(t)$ и $\mathbf{y}_p(t)$, сходящиеся при каждом t (начиная с некоторого номера) к некоторым значениям $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ соответственно. Нетрудно видеть, что построенные $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ являются решениями системы (2.42), лежащими в W^{n-1} при всех $t \in R$. Совершая предельный переход в неравенстве $\left\|\mathbf{x}_p(t_0) - \mathbf{y}_p(t_0)\right\| \geq \delta_0\varepsilon_0$, получаем $\left\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\right\| \geq \delta_0\varepsilon_0$. Это означает, что система (2.42) имеет два различных решения $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$, лежащих в W^{n-1} при всех $t \in R$, что противоречит ее эргодичности. Итак, необходимость условия (2.49) доказана в полном объеме.

Теорема 4.2 доказана.

Полагая

$$\gamma(t) = \mathrm{lgn}\left\|\mathbf{K}(t) \mid L^{n-1}\right\|, \tag{2.52}$$

мы, как и раньше, получаем $|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \left\|\mathbf{K}(t) - \mathbf{K}(s)\right\|$ и, значит, рассматриваемая нами функция непрерывна. Из свойств логарифмической нормы вытекает, что

$$\left\|\mathbf{U}(t,s) \mid L^{n-1}\right\| \leq e^{\int_s^t \gamma(\sigma)d\sigma},\ s \leq t. \tag{2.53}$$

Поэтому, если

$$\int_s^t \gamma(\sigma)d\sigma \to -\infty \tag{2.54}$$

при $s \leq t \to \infty$ для любого фиксированного s и при $t \geq s \to -\infty$ для любого фиксированного t, то колмогоровская система (2.42) эргодична.

Отметим в заключение, что формулы для нормы (1.10) и (1.12) и для логарифмической нормы (2.12) и (2.15) послужили трамплином для получения общих формул для нормы и логарифмической нормы оператора на подпространстве [24].

Работа выполнена при финансовой поддержке одного из авторов Российским фондом фундаментальных исследований (проект 00-01-00664).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М., 1976. — 548 с.

2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М., 1969. — 368 с.

3. *Перов А.И.* Достаточные условия устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами в критических случаях/ А. И. Перов // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 12. — С. 80—89.

4. *Перов А.И.* Достаточные условия устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами в критических случаях. II / А. И. Перов // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 10. — С. 49—59.

5. *Былов Б.Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М., 1966. — 567 с.

6. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Хилле Э., Филлипс Р. — М., 1962. — 830 с.

7. *Deoblin W.* Sur deux problemes de Kolmogoroff concernant les chaines denombrables / W. Deoblin // Bull. Soc. Math. France. — 1938. — V. 66. — P. 210—220.

8. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю.А. Розанов. — М., 1986. — 312 с.

9. *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. М. Векслер. — М., 1971. − 309 с.

10. *Добрушин Р.Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова / Р.Л. Добрушин // Теория вероятностей и ее применения. — 1956. — Т. 1, № 1. — С. 12—89.

11. *Белицкий Г.Р.* Нормы матриц и их приложения / Г.Р. Белицкий, Ю.И. Любич. — Киев, 1984. — 160 с.

12. *Пароди М.* Локализация характеристических чисел матриц и ее приложения. М., 1960.

13. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. — М., 1972. — 232 с.

14. *Блох Э.Л.* Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения / Э.Л. Блох, Л.И. Лошинский, В.Я. Турин. — М., 1971. — 256 с.

15. *Гнеденко Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. — М., 1987. — 432 с.

16. *Нагибин В.П.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия одной системы диф-

ференциальных уравнений / В.П. Нагибин // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 12. — С. 2271—2273.

17. *Перов А.И.* Достаточные условия устойчивости в критических случаях / А.И. Перов // Доклады АН СССР. — 1998. — Т. 359, № 3. — С. 310—312.

18. *Гнеденко Б.В.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодичности интенсивностей / Б.В. Гнеденко, И.П. Макаров // Дифференциальные уравнения. — 1971. — № 9. — С. 1696—1698.

19. *Якубович В.А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. — М., 1972. — 328 с.

20. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. — М., 1953. — 396 с.

21. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович — М., 1967. — 472 с.

22. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б.М. Левитан, В.В. Жиков. — М., 1978. — 208 с.

23. *Перов А.И.* Признаки эргодичности колмогоровских почти-периодических систем / А.И. Перов // Доклады Академии наук. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 9—12.

24. *Перов А.И.* Формулы для нормы и логарифмической нормы линейного оператора на подпространстве / А.И. Перов // Доклады Академии наук. — 1999. — Т. 368, № 5. — С. 601—603.