УДК 681.3.06

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА В ПРОДУКЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

© 2002 С. Д. Махортов

Воронежский государственный университет

В настоящей работе предлагается некоторый формальный подход к описанию структуры продукционных систем. Вводится ряд математических понятий, базовым среди которых является минимальное порождающее множество. Затем показывается, как эта теория может быть применена для исследования свойств продукционных систем и разработки связанных с ними алгоритмов. Использование предлагаемого подхода позволяет

• математически обосновывать возможности эквивалентных преобразований баз знаний продукционных систем (п. 2);

• оптимизировать и исследовать алгоритмы обратного вывода (п. 3);

• строго формулировать критерии корректности баз знаний, а также разрабатывать методы их верификации (п. 4).

Кратко напомним некоторые понятия, связанные с тематикой работы.

Продукционной системой [1] называется экспертная система (ЭС), база знаний которой описывается продукционными правилами вида

если <условие> **то** <действие>,

где **условие**, называемое **предпосылкой** правила, представляет собой предикат над **фактами**, а **действие**, называемое **следствием** правила, обычно регистрирует истинность некоторого другого предиката над фактами. Под фактом подразумевается выражение вида <параметр> = <значение>. **Параметр** — это некоторая характеристика предметной области, принимающая значения из заранее определенного списка. Мы будем рассматривать продукционные системы с **четкой логикой,** когда указанному в правиле действию не приписывается **коэффициент уверенности**, указывающий степень уверенности в правомочности выполнения действия, т. е. в данном случае предполагается 100 % уверенность.

Совокупность правил называется **базой знаний** (БЗ) продукционной системы. В некоторых работах по данной тематике (например, [2]) предполагается, что все правила находятся в **унифицированной форме**, в которой предпосылка состоит только из конъюнкций фактов, а следствие делает вывод значения только одного параметра. Такие БЗ называются «хорошо структурированными» [3]. Это допущение обычно не ограничивает общности результатов, т. к. последние могут распространяться на произвольную структуру правил. Мы же в большей части настоящей работы будем исходить из того, что для каждого предиката предпосылки можно указать конъюнкцию фактов, при которой предикат выполнен, и пока сделаем допущение о том, что из каждого предиката следствия правила можно вывести некоторую конъюнкцию других фактов. Мы отдельно рассмотрим также вопросы преобразований базы знаний, позволяющих привести ее к унифицированному виду.

Работа продукционной системы заключается в применении правил к имеющимся фактам, для получения новых фактов, интересующих пользователя, и пополнения ими базы данных. Сам процесс применения правил для получения значения нужного параметра (**целевого параметра**) называется (логическим) выводом. Различают **прямой** и **обратный** выводы.

При прямом выводе за отправную точку берется исходная база данных и путем применения к ней правил (согласно какой-либо стратегии выбора очередного правила) выводятся новые факты до получения значения целевого параметра. Может также ставиться задача нахождения множества **всех фактов**, которые путем применения правил можно получить из некоторого подмножества исходной БД.

При обратном выводе исходным является целевой параметр. Просматриваются правила, из следствий которых можно вывести значение данного параметра. Для каждого такого правила проверяется справедливость предпосылки (путем рекурсивного вывода значений параметров предпосылки, пока справедливость очередной предпосылки не сможет быть полностью установлена из базы данных или от пользователя).

В каждом из этих двух способов в процессе вывода может вычисляться множество промежуточных фактов, связанных с другими параметрами.

В множестве параметров можно выделить следующие подмножества: **целевые параметры** — те параметры, которые могут служить конечной целью вывода; **терминальные параметры**, которые не встречаются в следствиях правил, значения которых либо изначально хранятся в базе данных, либо могут быть получены от пользователя и записаны в БД; **промежуточные параметры** — не вошедшие в первые два подмножества и носящие вспомогательный характер; **многозначные параметры**, которые могут принимать одновременно несколько значений. Заметим, что для параметров, не являющихся многозначными, возможные значения являются взаимоисключающими. Факт, образованный терминальным параметром, будем называть **терминальным фактом**.

1. Основные определения и обозначения

Для получения формализованной модели продукционной системы и изучения ее свойств введем ряд обозначений и определений.

Итак, имеется $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ — конечное множество параметров; $V_i = \{v_1^i, \dots, v_{m_i}^i\}$ — конечное множество значений параметра $p_i, i = 1, \dots, n$. Множество всех теоретически возможных фактов обозначим $F = \{f_1, \dots, f_q\}$, где $q = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Имеется также множество выполненных фактов $F_d \subseteq F$, образующее **базу данных** (БД) экспертной системы. Обозначим далее $R = \{r_1, \dots, r_p\}$ — имеющееся конечное множество правил. Там, где это удобно, элементы множества фактов F мы будем обозначать f_{ij} — факт, утверждающий равенство i-го параметра своему j-му значению ("$p_i = v_j^i$"). Правило формально будем обозначать символом $\to$.

В этих обозначениях набор правил может выглядеть следующим образом:

$$f_{21} \to f_{41}$$

$$f_{22} \wedge f_{11} \to f_{42}$$

$$f_{42} \wedge f_{31} \to f_{51}$$

$$f_{42} \wedge f_{32} \to f_{52} \wedge f_{53} \wedge f_{54}$$

Множество всех теоретически возможных терминальных фактов для данной ЭС обозначим F_0 ($F_0 \subseteq F$). Любое подмножество F_0 будем называть **терминальным множеством** фактов. Множество выполненных терминальных фактов обозначим F_{0d} ($F_{0d} \subseteq F_0$).

Мы будем рассматривать также множество $F^* = 2^F$, состоящее из всех подмножеств F. Аналогично определяются $F_0^* = 2^{F_0}$, $F_d^* = 2^{F_d}$, $F_{0d}^* = 2^{F_{0d}}$.

При прямом выводе экспертная система, исходя из некоторого множества $A \in F^*$, путем применения правил формирует множество $B \in F^*$, которое содержит интересующие пользователя факты.

Определение 1. Если по исходному множеству фактов $A \in F^*$ путем применения правил из R возможно получение множества $B \in F^*$, то будем говорить, что B выводимо из A ($A \Rightarrow B$) в R. Такое A называется порождающим множеством (ПМ) для B.

Непосредственно из определения 1 вытекают свойства

1) если $B \subseteq A$, то $A \Rightarrow B$ (в частности, $A \Rightarrow A$);

2) если $A \Rightarrow B$ и $C \subset B$, то $A \Rightarrow C$;

3) если $A \Rightarrow B$ и $A \subset D$, то $D \Rightarrow B$.

Определение 2. Пусть $A \Rightarrow B$ для некоторых $A, B \in F^*$. Последовательность правил $\vec{r} = \{r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_k}\}$ из R, каждое из которых содержит в предпосылке лишь факты множества A, и последовательное применение которых приводит к получению множества B, называется цепочкой вывода, соответствующей выводу $A \Rightarrow B$, или цепочкой правил, осуществляющей вывод $A \Rightarrow B$ в R.

Определение 3. Правило r_0 называется лишним в цепочке $\vec{r}$, осуществляющей вывод $A \Rightarrow B$, если после удаления r_0 из $\vec{r}$ оставшаяся цепочка тем не менее осуществляет вывод $A \Rightarrow B$.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что правило r_0 является лишним в цепочке $\vec{r}$ тогда и только тогда, когда каждый выводимый из его следствия факт либо уже содержится в A, либо выводится некоторым предшествующим в цепочке $\vec{r}$ правилом, либо не используется в предпосылках правил, следующих за r_0, и не содержится в множестве $B \setminus A$.

Замечание 2. По определению каждое повторяющееся правило в цепочке вывода является лишним.

Определение 4. Цепочка правил $\vec{r}$, осуществляющая вывод $A \Rightarrow B$, называется минимальной цепочкой вывода, если она не содержит лишних правил.

Очевидно, множество правил R определяет на F^* бинарное отношение (выводимость), обладающее свойствами рефлексивности и транзитивности [4]. Поэтому, построив рефлексивно-транзитивное замыкание (РТЗ) этого отношения R^* (алгоритм Уоршолла, [4]), теоретически можно получить “идеальную” базу знаний, любой вывод в которой осуществляется применением единственного правила, что однако практически вряд ли осуществимо в силу ограниченности ресурсов компьютера.

При обратном выводе в ЭС по данному множеству $B \in F^*$, называемому гипотезой, осуществляется поиск $A \in F_{0d}^*$, такого, что $A \Rightarrow B$. При успешном поиске делается заключение о справедливости всех фактов, содержащихся в B. Таким образом, можно сказать, что при прямом выводе $A \Rightarrow B$ соответствующая цепочка вывода строится слева направо, при обратном — справа налево.

Прямой вывод в ЭС может оказаться неэкономичным. В некоторых случаях во время его осуществления экспоненциально растет число применяемых правил при линейном увеличении их количества в системе (происходит т. н. комбинаторный взрыв [1]). Поэтому существуют классы экспертных систем, в которых принят за основу обратный вывод. С другой стороны, и обратный вывод требует минимизации. Это обусловлено тем, что исходная база данных может являться объемной, но неполной, т. е. значения ряда терминальных параметров изначально не хранятся в БД, но могут интерактивно запрашиваться у пользователя. Необходимо по возможности задавать пользователю лишь значимые вопросы, ответы на которые будут использованы для вывода. Да и количество обращений к БД целесообразно свести к минимуму.

Определение 5. Множество $A \in F^*$ называется минимальным порождающим множеством (МПМ) для данного $B \in F^*$ в R (относительно некоторой цепочки правил $\vec{r}$), если $A \Rightarrow B$ в R, причем существует минимальная цепочка вывода $\vec{r} = \{r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_k}\}, r_{i_l} \in R$, осуществляющая вывод $A \Rightarrow B$ и не осуществляющая вывода $A_1 \Rightarrow B$ ни для какого собственного подмножества $A_1 \subset A$.

Лемма 1. Если $A \Rightarrow B$ в R, то A содержит некоторое C, являющееся минимальным порождающим множеством для B в R.

Доказательство. Пусть $\vec{r}$ — соответствующая выводу $A \Rightarrow B$ цепочка правил. Будем считать ее минимальной, удалив из нее при необходимости лишние правила. Далее проведем последовательно этот вывод, помечая факты, используемые предпосылками каждого применяемого правила цепочки $\vec{r}$. После вывода удалим из A факты, которые изначально были в A, но остались непомеченными. Получим множество $C \subset A$, которое и является для B МПМ относительно цепочки $\vec{r}$. □

Определение 6. Множество $A_0 \in F^*$ называется абсолютным МПМ для данного $B \in F^*$ в R, если $A_0 \Rightarrow B$ в R и B не выводимо в R ни из какого собственного подмножества A_0.

Замечание 1. Из определений 5—6 следует, что каждое абсолютное МПМ является и относительным (относительно любой минимальной цепочки вывода).

Замечание 2. Абсолютное МПМ не содержит в качестве собственного подмножества ни одного МПМ (относительного или абсолютного), т. к. существование “меньшего” МПМ противоречит определению 6.

Замечание 3. В общем случае для данного $B \in F^*$ могут существовать более одного МПМ. Это касается как относительных, так и абсолютных МПМ.

2. Эквивалентные преобразования баз знаний

Определение 1. Пусть R_1 и R_2 — два множества правил на одном и том же множестве фактов F. Будем говорить, что множество R_1 поглощается множеством R_2 ($R_1 \lhd R_2$), если при любых $A,B \in F^*$ из $A \Rightarrow B$ в R_1 следует $A \Rightarrow B$ в R_2.

Определение 2. Множества правил R_1 и R_2 называются эквивалентными ($R_1 \sim R_2$), если выполнено $R_1 \lhd R_2$ и $R_2 \lhd R_1$.

Теорема 1. Множества правил R_1 и R_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого факта $f \in F$ его совокупности абсолютных МПМ в R_1 и R_2 совпадают.

Доказательство. Пусть R_1 и R_2 эквивалентны. Рассмотрим произвольный факт $f \in F$. Если $A \in F^*$ — некоторое абсолютное МПМ для f в R_1, то в силу эквивалентности множеств правил $A \Rightarrow \{f\}$ и в R_2. Предположим противное, что A не является минимальным в R_2. Тогда существует собственное подмножество $A_1 \subset A$ такое, что $A_1 \Rightarrow \{f\}$ в R_2. В силу эквивалентности имеем $A_1 \Rightarrow \{f\}$ и в R_1, что противоречит минимальности A в R_1.

Предположим теперь, что выполнена вторая часть утверждения теоремы. Покажем, что в этом случае R_1 и R_2 эквивалентны. Пусть для некоторых $A,B \in F^*$ выполнено $A \Rightarrow B$ в R_1. Требуется доказать, что $A \Rightarrow B$ и в R_2. Для этого рассмотрим произвольный факт $f \in B$. Очевидно, $A \Rightarrow \{f\}$ в R_1, причем множество A содержит некоторое абсолютное МПМ A_1 для f в R_1. В силу предположения теоремы A_1 является абсолютным МПМ для f и в R_2. Поэтому $A_1 \Rightarrow \{f\}$ в R_2. Поскольку $A_1 \subseteq A$, то $A \Rightarrow \{f\}$ в R_2. Таким образом, каждый элемент f множества B выводится из A в R_2. Следовательно, $A \Rightarrow B$ в R_2. □

Теорема 2. Пусть R, R_1 и R_2 - множества правил на множестве фактов F. Если при этом $R_1 \sim R_2$, то $R \cup R_1 \sim R \cup R_2$.

Доказательство. Покажем, что если для некоторых $A,B \in F^*$ справедливо $A \Rightarrow B$ в $R \cup R_1$, то $A \Rightarrow B$ и в $R \cup R_2$. Пусть $\vec{r} = \{r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_k}\}$ — цепочка вывода, соответствующая $A \Rightarrow B$ в $R \cup R_1$. Она может содержать как правила из R, так и из R_1. Рассмотрим произвольную ее подцепочку $\vec{r}_1$, целиком принадлежащую R_1. Если бы последней не существовало, то указанный вывод целиком осуществлялся бы в $R \subset R \cup R_2$, и утверждение было бы уже доказано. Пусть $\vec{r} = \vec{r}_0 \vec{r}_1 \vec{r}_p$. Множество фактов, полученных из A путем применения предшествующей $\vec{r}_1$ подцепочки $\vec{r}_0$, обозначим A_0. Множество фактов, полученных из A_0 путем применения подцепочки $\vec{r}_1$, обозначим A_p. Таким образом, $A_0 \Rightarrow A_p$ в R_1. В силу эквивалентности R_1 и R_2, существует цепочка правил $\vec{r}_2$ из R_2, осуществляющая вывод $A_0 \Rightarrow A_p$ в R_2. Заменим в $\vec{r}$ подцепочку $\vec{r}_1$ цепочкой $\vec{r}_2$. Аналогично поступим с каждой подцепочкой $\vec{r}$, принадлежащей R_1. В результате таких преобразований из $\vec{r}$ получится цепочка правил, осуществляющая вывод $A \Rightarrow B$ в $R \cup R_2$. □

Определение 3. Для данного множества фактов F преобразование множества правил R_1 в эквивалентное ему множество R_2 будем называть эквивалентным преобразованием базы знаний.

Теоремы 1—2 позволяют обосновывать такие преобразования. Рассмотрим правило $r_0 \in R$ вида $f_1 \vee f_2 \to f_3$. Заменим в R это правило двумя правилами $r_1 : f_1 \to f_3$ и $r_2 : f_2 \to f_3$. Легко видеть, что каждое из двух множеств правил $R_1 = \{r_0\}$ и $R_2 = \{r_1, r_2\}$ имеет одну и ту же совокупность абсолютных МПМ: $\{\{f_1\},\{f_2\}\}$. Отсюда по теореме 1 множества правил R_1 и R_2 эквивалентны. Тогда по теореме 2 множество $R = R \setminus \{r_0\} \cup R_1$ эквивалентно множеству $R = R \setminus \{r_0\} \cup R_2$. Таким образом, замена правила r_0 в R двумя правилами r_1, r_2 означает эквивалентное преобразование базы знаний. Аналогично обосновывается эквивалентность другого элементарного преобразования: замена правила вида $f_1 \to f_2 \wedge f_3$ двумя правилами $f_1 \to f_2$ и $f_1 \to f_3$.

Рассмотрим вопрос о возможности эквивалентного преобразования БЗ произвольного вида в унифицированную БЗ (см. введение). К сожалению, в общем случае при неизменном множестве фактов это невозможно. Этому препятствуют так называемые правила II типа [8] вида $f_1 \to \neg f_2$ и $f_1 \to f_2 \vee f_3$. Первое из них приводится к виду второго заменой отрицания дизъюнкцией фактов, дополняющих факт f_2 (содержащих все остальные значения того же параметра). Второе же правило противоречит допущению нашей работы о том, что каждое следствие правила должно выводить факты. Компромиссным решением является введение нового факта $f_4 = f_2 \vee f_3$ с двумя дополнительными правилами $f_2 \to f_4$ и $f_3 \to f_4$.

Таким образом, процедура преобразования БЗ общего вида в унифицированную БЗ состоит из следующих трех этапов. Преобразуем предикат предпосылки каждого правила в дизъюнктивную нормальную форму, предикат следствия каждого правила — в конъюнктивную нормальную форму. Полученную совокупность правил преобразуем в эквивалентную с помощью двух вышеуказанных элементарных преобразований. Наконец, на третьем этапе избавляемся от правил II типа.

3. Построение минимальных порождающих множеств

Для рассмотрения вопросов построения минимальных порождающих множеств докажем несколько полезных утверждений.

Теорема 1. Пусть $A \in F^*$ — МПМ для $B \in F^*$; $C \in F^*$ — МПМ для $D \in F^*$. Тогда, если $B \neq D$, то $A \cup C$ — МПМ для $B \cup D$.

Доказательство. Из условия леммы непосредственно следует $A \cup C \Rightarrow B$ и $A \cup C \Rightarrow D$. Отсюда $A \cup C \Rightarrow B \cup D$. Таким образом, $A \cup C$ — порождающее множество для $B \cup D$. Покажем, что оно минимально относительно некоторой цепочки правил. Обозначим $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_C$ — минимальные цепочки правил, соответствующие множествам A и C в смысле определения МПМ. Построим цепочку $\vec{r}_{AC}$, соответствующую множеству $A \cup C$. Пусть для определенности $E = D \setminus B \neq \varnothing$. В этом случае $\vec{r}_C$ может содержать вывод фактов, не выводящихся цепочкой $\vec{r}_A$ (именно — фактов множества E). Тогда положим вначале $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_A$ и применим к множеству $A \cup C$ правила цепочки $\vec{r}_A$. Далее будем последовательно просматривать слева направо правила цепочки $\vec{r}_C$. Если все факты следствия очередного правила уже зарегистрированы в БД (из-за применения $\vec{r}_A$), то пропускаем данное правило и переходим к следующему правилу в $\vec{r}_C$, в противном случае — применяем текущее правило к имеющейся БД и дописываем его справа в $\vec{r}_{AC}$. Просмотрев таким образом всю $\vec{r}_C$, получим цепочку $\vec{r}_{AC}$, относительно которой $A \cup C$ является минимальным порождающим множеством для $B \cup D$. □

Замечание 1. Теорема 1 остается верной, если в ее условии $A = B$ или $C = D$.

Лемма 1. Пусть $A \in F^*$ — МПМ для $B \in F^*$; B — МПМ для $C \in F^*$. Тогда A является МПМ для C.

Доказательство. В силу транзитивности отношения выводимости имеем $A \Rightarrow C$. Остается построить цепочку вывода, относительно которой A — МПМ для C. Этой цепочкой, очевидно, является $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB}\vec{r}_{BC}$, где $\vec{r}_{AB}$ соответствует выводу $A \Rightarrow B$, а $\vec{r}_{BC}$ соответствует $B \Rightarrow C$. □

Из теоремы 1 и леммы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. Пусть попарно несовпадающие множества $A, B, C, D \in F^*$ таковы, что A является — МПМ для B, $B \cup C$ — МПМ для D. Тогда $A \cup C$ — также МПМ для D.

Доказательство. Поскольку по условию A — МПМ для B, то в силу теоремы 1 и замечания 1 множество $A \cup C$ является МПМ для $B \cup C$. Т. к. по условию $B \cup C$ — МПМ для D, то отсюда в силу леммы 1 получаем, что $A \cup C$ — МПМ для D.□

Смысл теоремы 2 состоит в том, что в минимальном порождающем множестве ($B \cup C$) некоторое подмножество (B) можно заменить на МПМ для этого подмножества (A).

Далее в этом разделе мы будем предполагать, что все правила БЗ имеют упомянутый в начале работы унифицированный вид.

Введем понятие структурного расслоения исходного множества правил R на виртуальные слои $R_1, R_2, \ldots, R_N$, позволяющее упростить построение ряда алгоритмов, связанных с продукционной системой, а также изучение их свойств.

Разобьем R на непересекающиеся подмножества, каждое из которых образовано правилами с одним и тем же следствием. Это имеет смысл благодаря унифицированности правил, т. к. в этом виде каждое правило выводит единственный факт. Обозначим эти подмножества R^{ij} соответственно выводимому в них факту $f_{ij}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m_i$.

Определение 1. Слоем R_k в множестве правил R называется подмножество R, образованное правилами, взятыми по одному из каждого непустого R^{ij}. Два слоя, отличающиеся хотя бы одним правилом, считаются различными.

Определение 2. Будем говорить, что цепочка правил $\vec{r}$ принадлежит в R некоторому слою R_k, если в этом слое содержатся все правила цепочки R.

Замечание 2. Слой содержит **максимально** возможный набор правил из R, выводящих **попарно различные** факты. Добавление к слою еще одного правила нарушило бы это условие.

Замечание 3. Совокупность всех слоев охватывает **всевозможные** такие наборы. Таким образом, любая цепочка правил, выводящих попарно различные факты, принадлежит некоторому слою.

Замечание 4. Слои могут иметь непустые пересечения. Объединение всех слоев равно R.

Нетрудно заметить, что общее количество слоев N определяется равенством $N = \prod_{k=1}^{k=q} N_k$, где q — общее количество фактов в продукционной системе; N_k — количество правил, выводящих факт f_k.

Лемма 2. Если $\vec{r}$ — минимальная цепочка некоторого вывода $A \Rightarrow B$, то существует слой в R, содержащий цепочку $\vec{r}$.

Доказательство. Правила цепочки $\vec{r}$ вследствие ее минимальности выводят попарно различные факты. Поэтому в силу замечания 3 существует слой, набор правил которого содержит эту цепочку. □

Лемма 3. Пусть $A_1 \in F_0^*$ и $A_2 \in F_0^*$ — два различных терминальных МПМ для $B \in F^*$. Тогда любые две соответствующие A_1 и A_2 минимальные цепочки вывода $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ не могут принадлежать в R одному и тому же слою.

Доказательство. По лемме 2 цепочки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ целиком принадлежат некоторым слоям R_1 и R_2. Покажем, что эти слои всегда разные. В силу условия леммы существует факт g, принадлежащий одному из множеств A_1, A_2, но не принадлежащий другому из них. Пусть для определенности $g \in A_1$. Тогда, так как A_1 — МПМ для B, то g присутствует в предпосылке хотя бы одного правила $r_g \in \vec{r}_1$. Поскольку при этом $g \notin A_2$, то $r_g \notin \vec{r}_2$.

Таким образом, некоторое правило r_g содержится в цепочке $\vec{r}_1$ и не содержится в $\vec{r}_2$. Пусть тогда f — факт, выводимый следствием правила r_g. Так как правило r_g не может являться лишним в $\vec{r}_1$, то факт f либо содержится в $B \setminus A_1$, либо используется в предпосылках правил, следующих за r_g в $\vec{r}_1$ (см. замечание к определению 1.3). В первом из этих двух вариантов, поскольку f — нетерминальный, то $f \in B \setminus A_2$, и в цепочке $\vec{r}_2$ обязано быть другое правило, также выводящее факт f, что сразу означает принадлежность рассматриваемых цепочек разным слоям, ведь каждый слой содержит для любого факта лишь одно правило. Во втором варианте факт $f \notin B$ и либо используется как промежуточный в цепочке $\vec{r}_2$, либо нет. Если используется, то рассуждения аналогичны первому варианту.

Осталось рассмотреть случай, когда f является промежуточным в $\vec{r}_1$ и вообще не встречается в цепочке $\vec{r}_2$. В этом случае существует правило r_f, расположенное в $\vec{r}_1$ правее правила r_g, использующее в предпосылке факт f и не встречающееся в цепочке $\vec{r}_2$. Если рассмотреть эту ситуацию аналогично рассмотренной выше с правилом r_g (см. предыдущий абзац с начала), то мы либо как и ранее завершим доказательство, либо продвинемся еще правее в цепочке $\vec{r}_1$.

Продвигаясь таким образом далее, мы дойдем в $\vec{r}_1$ в силу ее конечности до того правила, которое выводит факт множества $B \setminus A_1$, а не промежуточный (последнее правило в минимальной цепочке всегда таково), и на этом доказательство завершится. □

Теорема 3. В унифицированной базе знаний для любого $B \in F^*$ каждое (относительное) терминальное МПМ $A \in F_0^*$ может быть построено с помощью правил некоторого слоя. Кроме того, каждый слой может быть использован для построения лишь единственного терминального МПМ.

Утверждение теоремы вытекает непосредственно из лемм 2—3. □

Теорема 3 позволяет свести построение совокупности всех терминальных МПМ для данного $B \in F^*$ к построению одного МПМ в отдельном слое. Построив МПМ в каждом слое и удалив из полученных множеств повторяющиеся, получим всю совокупность МПМ.

К сожалению, этот алгоритм не является оптимальным, т. к. несколько различных слоев могут давать одно и то же МПМ. Однако он может являться основой для построения более эффективных алгоритмов, а также доказательства их свойств. Поэтому остановимся на вопросе построения МПМ в отдельном слое.

В силу своей структуры отдельный слой правил допускает простую сетевую интерпретацию. Как известно [1], продукционная система может быть представлена так называемым И/ИЛИ-графом, применяемым, например, в механизме управления правилами в известной продукционной системе MYCIN. Не вдаваясь в детали, скажем, что в нашем случае отдельного слоя И/ИЛИ-граф вырождается в И-граф, являющийся классическим ориентированным графом, т. к. ИЛИ-составляющая отсутствует в силу единственности правила для каждого факта.

Итак, каждому факту продукционной системы сопоставим вершину графа. Каждому правилу рассматриваемого слоя будет соответствовать совокупность дуг, ведущих из вершин-фактов предпосылки правила в вершину-следствие правила.

Алгоритм построения для некоторого множества $B \in F^*$ МПМ в отдельном слое основывается на теоремах 1-2 и для каждого факта $f \in B$ может быть интерпретирован как обход вершин графа, из которых достижима данная вершина. Итак, пусть дано $B \in F^*$, для которого требуется построить МПМ в некотором слое. Элементарным МПМ (относительно цепочки правил нулевой длины) является само B. Далее, по теореме 2 каждый нетерминальный факт f в текущем МПМ можно заменить на МПМ для f, которое состоит из всех фактов в предпосылке правила для f. После каждой такой замены получается новое МПМ для B. Порядок выбора нетерминальных фактов для замены может диктоваться общей стратегией (например, «в ширину» или «в глубину», если проводить аналогию с графом). Если соответствующий граф не имеет циклов, то через конечное число замен мы получим единственное (в силу теоремы 3) терминальное МПМ для B, которому в графе будет соответствовать множество всех концевых вершин, из которых достижимы вершины, соответствующие фактам множества B. Если в процессе построения МПМ в графе обнаружится цикл, то такое множество правил является некорректным, и для него нет смысла говорить о построении терминального МПМ.

Следующая теорема показывает, что совокупность всех абсолютных МПМ легко может быть получена из построенной совокупности всех относительных МПМ.

Теорема 4. Пусть для множества фактов $B \in F^*$ построена совокупность всех относительных МПМ $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ($A_i \in F^*, i = 1, \ldots, n$). Тогда совокупность всех абсолютных МПМ получается из A исключением таких множеств $A_l \in A$, которые содержат в качестве подмножеств другие $A_{l_k} \in A$.

Доказательство. Проведем указанную процедуру исключения.

Докажем теперь, что каждое из оставшихся МПМ A_i является абсолютным. Пусть для некоторого A_i это не так. Тогда существует $C_1 \subset A_i$ такое, что $C_1 \Rightarrow B$ в R. Тогда по лемме 1 множество C_1 содержит некоторое C — МПМ для B. Поэтому C самостоятельно должно содержаться в совокупности множеств A, а в силу $C \subset A_i$ множество A_i в начале доказательства должно было быть исключено из A, что и составляет противоречие.

Докажем теперь, что среди оставшихся после исключения в A множеств A_i содержатся **все** абсолютные МПМ для B. Предположим противное, что некоторое $C \in F^*$ является абсолютным МПМ для B и после процедуры исключения не содержится среди множеств совокупности A. Поскольку в силу замечания 1.1 оно является и относительным, то должно было содержаться в A до выполнения процедуры исключения. В силу замечания 1.2 оно не должно было быть исключено, что противоречит предположенному его отсутствию.

Теорема 4 доказана. □

Нетрудно заметить, что теорема 4 останется верной, если в ее формулировке речь будет идти о терминальных МПМ.

Для проведения обратного вывода, соответствующего некоторой гипотезе $B \in F^*$, достаточно для B построить совокупность терминальных абсолютных МПМ. Затем, если какое-либо из них состоит только из выполненных фактов (элементов F_{0d}), присвоить этой гипотезе статус выполненной. Экономичность данного метода обусловлена двумя факторами. Во-первых, обращения к БД (или пользователю) ограничиваются фактами из абсолютных МПМ (т. е. лишь минимальным набором фактов, потенциально участвующих в выводах). Во вторых, если хотя бы один факт из некоторого МПМ не выполнен, то нет необходимости проверять остальные факты этого МПМ — оно отвергается сразу. В связи с последним имеет смысл начинать с проверки фактов, принадлежащих пересечениям МПМ. Для ускорения алгоритма проверку истинности фактов, содержащихся в МПМ, можно производить сразу в процессе их построения.

4. Корректность и верификация баз знаний

Важными свойствами корректных БЗ ЭС являются непротиворечивость, отсутствие циклов, неизбыточность, полнота, достижимость, живость. Опубликованные в этом направлении работы (например, [2], [5]) содержат различные алгоритмы выявления аномалий БЗ. Но в них не всегда строго формулируются сами понятия этих аномалий. Кратко изложим нашу формализацию понятий, относящихся к корректности БЗ.

Определение 1. Множество фактов $A \in F^*$ называется противоречивым, если оно содержит более одного факта для некоторого параметра, не являющегося многозначным. В противном случае множество A называется непротиворечивым.

Определение 2. Множество правил R является противоречивым на множестве фактов F, если для некоторых $A, B \in F^*$ таких, что $A \Rightarrow B$ в R и A непротиворечиво, следует, что B противоречиво.

Методом обнаружения противоречий в БЗ может служить выявление непротиворечивых МПМ для противоречивых множеств фактов.

Определение 3. Множество правил R содержит цикл, если некоторый нетерминальный факт $f \in F$ содержится в одном из своих относительных МПМ, построенных по R.

Определение 4. База знаний называется избыточной, если для некоторого правила $r \in R$, осуществляющего вывод $A \Rightarrow B(B \setminus A \neq \varnothing)$, этот же вывод возможен в множестве правил $R \setminus \{r\}$.

Чтобы выяснить, является ли правило $r \in R$ избыточным для данной БЗ, достаточно для выводимого его следствием множества фактов B построить в $R \setminus \{r\}$ совокупность абсолютных МПМ и проверить, не содержит ли множество фактов его предпосылки A в качестве подмножества хотя бы одно МПМ.

Определение 5. База знаний называется полной, если каждый факт, относящийся к целевому параметру, имеет непустое терминальное МПМ.

Определение 6. Множество фактов $A \in F^*$ называется достижимым в R, если оно имеет непустое терминальное МПМ.

Определение 7. Множество фактов $A \in F^*$ называется живым в R, если оно содержится в МПМ для факта, относящегося к некоторому целевому параметру.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джексон П.* Введение в экспертные системы. — М.: Вильямс, 2001. — 624 с.

2. *Agarwal R.* A Petri-Net based approach for verifying the integrity of production systems. International Journal of Man-Machine Studies, 36, 447—468 (1992).

3. *Pederson K.* Well-structured knowledge bases. AI Expert, 4, 44—55 (1989).

4. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2001. — 960 с.

5. *Liu N. K., Dillon, T.* An Approach Towards the Verification of Expert Systems Using Numerical Petri Nets. International Journal of Intelligent Systems, 6, 255—276 (1991).