УДК 517.983.24

ОБ УСЛОВИЯХ, ПРИ КОТОРЫХ ОПЕРАТОР В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА КОЛЛИНЕАРЕН РАВНОМЕРНО J-НЕРАСТЯГИВАЮЩЕМУ*

© 2002 Е. И. Иохвидов

Воронежский государственный технический университет

Устанавливаются три новых достаточных условия, каждое из которых влечет за собой коллинеарность произвольного линейного оператора в пространстве Крейна равномерно J-нерастягивающему оператору.

1. В настоящей работе исследуются равномерно J-нерастягивающие операторы и операторы, им коллинеарные, играющие важную роль в различных приложениях теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой (см., например, [1]). Получены достаточные условия, влекущие за собой коллинеарность произвольного линейного оператора, действующего в пространстве Крейна, равномерно J-нерастягивающему оператору. Отметим, что новыми являются не только вышеупомянутые условия, но и термины, в которых эти условия сформулированы.

2. Напомним основные определения и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения.

Определение 1. Линейный оператор V, действующий в пространстве Крейна, называется равномерно J-нерастягивающим с константой $\delta > 0$, если

$$[Vx, Vx] \le [x, x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall \quad x \in D_{V,} \tag{1}$$

где линеал D_V — область определения оператора V, вообще говоря, неограниченного.

Здесь мы придерживаемся традиционной "индефиинитной" символики и терминалогии, например, в духе монографии [2].

Определение 2. Символ $C_{unif.}(\lambda;\delta)$ будет обозначать класс всех операторов, коллинеарных (с коэффициентом $\lambda \in C$, $\lambda \ne 0$) равномерно J-нерастягиивающему оператору (с константой $\delta > 0$). Другими словами, включение $T \in C_{unif.}(\lambda;\delta)$ означает, что

$$T = \lambda \cdot V, \tag{2}$$

где $\lambda \in C$, $\lambda \ne 0$, а V — равномерно J-нерастягивающий оператор с константой $\delta > 0$.

Определение 3. Инфимумом и супремумом произвольного линеала L в пространстве Крейна называются числа:

$$\varepsilon_-(L) = \inf_{x \in L, x \ne 0} \frac{[x, x]}{\|x\|^2} \text{ и } \varepsilon_+(L) = \sup_{x \in L, x \ne 0} \frac{[x, x]}{\|x\|^2} \tag{3}$$

соответственно (см. [3]).

Эти числа всегда удовлетворяют условиям:

$$-1 \le \varepsilon_-(L) \le \varepsilon_{+(L)} \le 1 \tag{4}$$

Пусть далее $L \ne \{0\}$ — произвольный линеал в пространстве Крейна, T — произвольный линейный оператор, при этом выполнено условие

$$L \subset D_T \ . \tag{5}$$

Определение 4. Рассматриваются следующие характеристики (см. [4]):

$$\omega_-(T \mid L) = \inf_{x \in L, x \ne 0} \frac{[Tx, Tx]}{\|x\|^2}, \qquad \omega_+(T \mid L) = \sup_{x \in L, x \ne 0} \frac{[Tx, Tx]}{\|x\|^2}. \tag{6}$$

Отметим, что каждое из этих чисел $\omega_-(T \mid L)$ и $\omega_+(T \mid L)$ может быть как конечным, так и бесконечным.

3. В этом разделе формулируются и доказываются основные результаты.

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\omega_+(T \mid L) < \varepsilon_-(L), \tag{7}$$

то $(T \mid L)$ — равномерно J-нерастягивающий оператор с константой

$$\delta = \varepsilon_-(L) - \omega_+(T \mid L) \ \ (> 0). \tag{8}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-00353)

Доказательство. Из определения числа $\omega_+(T \mid L)$ вытекает неравенство

$$[Tx,Tx] \le \omega_+(T \mid L) \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L, \tag{9}$$

а из определения инфимума линеала — неравенство

$$\varepsilon_-(L) \cdot \|x\|^2 \le [x,x] \quad \forall x \in L. \tag{10}$$

Преобразуем теперь правую часть неравенства (9), принимая во внимание неравенство (10):

$$\omega_+(T \mid L) \cdot \|x\|^2 = \varepsilon_-(L) \cdot \|x\|^2 -$$

$$-[\varepsilon_-(L) - \omega_+(T \mid L)] \cdot \|x\|^2 \le$$

$$[x,x] - [\varepsilon_-(L) - \omega_+(T \mid L)] \cdot \|x\|^2 \; \forall x \in L.$$

Итак, получаем

$$\omega_+(T \mid L) \cdot \|x\|^2 \le$$

$$\le [x,x] - [\varepsilon_-(L) - \omega_+(T \mid L)] \cdot \|x\|^2 \; \forall x \in L. \tag{11}$$

Обозначая

$$\varepsilon_-(L) - \omega_+(T \mid L) = \delta, \tag{12}$$

перепишем неравенство (11) в виде:

$$\omega_+(T \mid L) \cdot \|x\|^2 \le [x,x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L. \tag{13}$$

Наконец, из неравенств (9) и (13) следует:

$$[Tx,Tx] \le [x,x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L. \tag{14}$$

Так как величина δ, в силу условия (7), положительна, то неравенство (14) как раз и означает, что $(T \mid L)$ — равномерно J-нерастягивающий оператор с константой δ, которая определяется по формуле (8). Теорема доказана.

Следующий простой пример показывает, что условие (7) в теореме (1) является существенным.

Пример. В двумерном пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, где

$$H_+ = \text{л.о.}\{e\}, H_- = \text{л.о.}\{f\},$$

$$\|e\| = \|f\| = 1, \; e \perp f \tag{15}$$

рассмотрим оператор T, действующий на линеале

$L = \text{л.о.}\{e+f\} = D_T$ по формуле $T(e+f) = 0$.

Так как, очевидно, $Tx = 0 \;\; \forall x \in L$, то $[Tx,Tx] = 0 \;\; \forall x \in L$, следовательно,

$$\omega_-(T \mid L) = \omega_+(T \mid L) = 0$$

(см. определение 4).

Кроме того, линеал L нейтрален, поэтому

$$\varepsilon_-(L) = \varepsilon_+(L) = 0$$

(см. определение 3).

Таким образом, условие (7) теоремы 1 не выполняется, поскольку здесь

$$\omega_+(T \mid L) = \varepsilon_-(L) = 0.$$

С другой стороны, оператор T не является равномерно J-нерастягивающим. В самом деле, если бы оператор T был равномерно J-нерастягивающим с некоторой константой $\delta > 0$, то имели бы по определению:

$$[Tx,Tx] \le [x,x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L,$$

в частности, для $x = e + f$ имели бы

$$[T(e+f), T(e+f)] \le [e+f, e+f] - \delta \cdot \|e+f\|^2,$$

т.е. $0 \le 0 - \delta \cdot 2$, откуда следовало бы, что $\delta \le 0$. Полученное противоречие завершает рассмотрение примера.

Далее нам понадобятся две леммы, дающие в совокупности критерий принадлежности произвольного линейного оператора классу $C_{unif.}(\lambda;\delta)$.

Лемма 1. Если $(T \mid L) \in C_{unif.}(\lambda;\delta)$, то имеет место неравенство:

$$[Tx,Tx] \le |\lambda|^2 \cdot \{[x,x] - \delta \cdot \|x\|^2\} \quad \forall x \in L. \tag{15}$$

Доказательство. По определению класса $C_{unif.}(\lambda;\delta)$, справедлива формула

$$(T \mid L) = \lambda \cdot V,$$

где $\lambda \in C$, $\lambda \ne 0$, а V — равномерно J-нерастягивающий оператор. Отсюда последовательно выводим:

$$[Vx,Vx] \le [x,x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L,$$

$$|\lambda|^2 \cdot [Vx,Vx] \le |\lambda|^2 \cdot \{[x,x] - \delta \cdot \|x\|^2\} \quad \forall x \in L,$$

$$[\lambda Vx, \lambda Vx] \le |\lambda|^2 \cdot \{[x,x] - \delta \cdot \|x\|^2\} \quad \forall x \in L,$$

$$[Tx,Tx] \le |\lambda|^2 \cdot \{[x,x] - \delta \cdot \|x\|^2\} \quad \forall x \in L,$$

что и требовалось доказать.

Обратным утверждением является

Лемма 2. Из неравенства

$$[Tx,Tx] \le \alpha \cdot \{[x,x] - \delta \cdot \|x\|^2\} \quad \forall x \in L, \tag{16}$$

где $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, вытекает, что

$$(T \mid L) \in C_{unif.}(\lambda;\delta),$$

где $\lambda = \sqrt{\alpha}$.

Доказательство. Преобразуем неравенство (16) следующим образом:

$$\frac{[Tx,Tx]}{\alpha} \le [x,x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L,$$

$$\left[\frac{T}{\sqrt{\alpha}}x, \frac{T}{\sqrt{\alpha}}x\right] \le [x,x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L, \qquad (17)$$

$$[Vx,Vx] \le [x,x] - \delta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in L,$$

где

$$V = \frac{T}{\sqrt{\alpha}}. \qquad (18)$$

Неравенство (17) показывает, что оператор V является равномерно J-нерастягивающим с константой $\delta > 0$, поэтому (см. (18)) оператор

$$(T \mid L) = \sqrt{\alpha} \cdot V$$

действительно принадлежит классу $C_{unif.}(\lambda;\delta)$, где $\lambda = \sqrt{\alpha}$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполнено условие

$$\omega_+(T \mid L) < 0. \qquad (19)$$

Тогда:

1) Если $\omega_+(T \mid L) < \varepsilon_-(L)$, то $(T \mid L)$ — равномерно J-нерастягивающий оператор с константой

$$\delta = \varepsilon_-(L) - \omega_+(T \mid L) \ \ (>0). \qquad (20)$$

2) Если же $\omega_+(T \mid L) \ge \varepsilon_-(L)$, то для всякого $\beta < \varepsilon_-(L)$ справедливо включение

$$(T \mid L) \in C_{unif.}(\lambda;\delta),$$

где

$$\lambda = \lambda(\beta) = \sqrt{\frac{\omega_+(T \mid L)}{\beta}} \ \ (>0)\ , \qquad (21)$$

$$\delta = \delta(\beta) = \varepsilon_-(L) - \beta \ \ (>0). \qquad (22)$$

Доказательство. В случае 1) мы попадаем в условия теоремы 1, поэтому сам оператор $(T \mid L)$ является равномерно J-нерастягивающим с константой $\delta > 0$, определяемой формулой (20).

Пусть теперь $\omega_+(T \mid L) \ge \varepsilon_-(L)$. Преобразуем неравенство (9) с учетом неравенства (10) следующим образом:

$$[Tx,Tx] \le \omega_+(T \mid L) \cdot \|x\|^2 = \frac{\omega_+(T \mid L)}{\beta} \cdot \beta \cdot \|x\|^2 =$$

$$\frac{\omega_+(T \mid L)}{\beta} \cdot \{\varepsilon_-(L) \cdot \|x\|^2 - [\varepsilon_-(L) - \beta] \cdot \|x\|^2\} \le$$

Обозначая

$$\frac{\omega_+(T \mid L)}{\beta} = \alpha\ , \ \ \varepsilon_-(L) - \beta = \delta\ ,$$

получим окончательно:

$$[Tx,Tx] \le \alpha \cdot \{[x,x] - \delta \cdot \|x\|^2\} \quad \forall x \in L. \qquad (23)$$

Так как, очевидно, $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, то неравенство (23), в силу леммы 2, означает, что

$$(T \mid L) \in C_{unif.}(\lambda;\delta),$$

где параметры λ и δ определяются по формулам (21) и (22) соответственно. Теорема доказана.

Замечание 1. Можно показать (см. [5]), что условие $\omega_+(T \mid L) < 0$ теоремы 2 будет заведомо выполнено при одновременном выполнении следующих двух условий:

1. Линеал TL равномерно отрицателен.
2. Оператор $(T \mid L)$ непрерывно обратим.

Наконец, последнее из трех достаточных условий коллинеарности устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть линеал L равномерно положителен, а также выполнено условие

$$\omega_+(T \mid L) < +\infty \qquad (24)$$

Тогда:

1) Если $\omega_+(T \mid L) < \varepsilon_-(L)$, то $(T \mid L)$ — равномерно J-нерастягивающий оператор с константой

$$\delta = \varepsilon_-(L) - \omega_+(T \mid L) \ \ (>0).$$

2) Если же $\omega_+(T \mid L) \ge \varepsilon_-(L)$ то для всякого числа $\beta \in (0;\varepsilon_-(L))$ имеет место включение

$$(T \mid L) \in C_{unif.}(\lambda;\delta),$$

где

$$\lambda = \lambda(\beta) = \sqrt{\frac{\omega_+(T \mid L)}{\beta}} \ \ (>0) \qquad (25)$$

$$\delta = \delta(\beta) = \varepsilon_-(L) - \beta \ \ (>0). \qquad (26)$$

Доказательство. В первом случае оператор $(T \mid L)$ является равномерно J-нерастягивающим в силу теоремы 1, условие же равномерной положительности линеала L не используется.

Пусть теперь $\omega_+(T \mid L) \ge \varepsilon_-(L)$. Снова преобразуем неравенство (9) с учетом неравенства (10), а также того, что равномерная положительность линеала L эквивалентна условию $\varepsilon_-(L) > 0$:

$$[Tx,Tx] \le \omega_+(T\mid L)\cdot\|x\|^2 = \frac{\omega_+(T\mid L)}{\beta}\cdot\beta\cdot\|x\|^2 =$$

$$= \frac{\omega_+(T\mid L)}{\beta}\cdot\{\varepsilon_-(L)\cdot\|x\|^2 - [\varepsilon_-(L)-\beta]\cdot\|x\|^2\} \le$$

$$\le \frac{\omega_+(T\mid L)}{\beta}\cdot\{[x,x] - [\varepsilon_-(L)-\beta]\cdot\|x\|^2\}.$$

Обозначив

$$\frac{\omega_+(T\mid L)}{\beta} = \alpha\,,\ \ \varepsilon_-(L)-\beta = \delta\,,$$

получим окончательно:

$$[Tx,Tx] \le \alpha\cdot\{[x,x]-\delta\cdot\|x\|^2\}\quad \forall x\in L\,. \quad (27)$$

Снова, очевидно, $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, поэтому неравенство (27) означает, в силу леммы 2, что

$$(T\mid L)\in C_{unif.}(\lambda;\delta)\,,$$

где параметры λ и δ определяются формулами (25) и (26) соответственно. Теорема доказана полностью.

Замечание 2. Хотя формулы для коэффициента коллинеарности λ в теоремах 2 и 3 внешне совпадают, однако, как, легко видеть, в теореме 2 этот коэффициент удовлетворяет условию

$$0<\lambda<1\,,$$

в то время как в теореме 3 — условию

$$\lambda>1\,.$$

Замечание 3. Все результаты этой работы переносятся (с соответствующими изменениями) на операторы, коллинеарные равномерно J-несжимающим, т.е. операторам V, удовлетворяющим (для некоторого $\delta > 0$) неравенству

$$[Vx,Vx] \ge [x,x] + \delta\cdot\|x\|^2 \quad \forall x\in D_V\,.$$

Во всех этих теоремах, очевидно, вместо числа $\omega_+(T\mid L)$ будет фигурировать число $\omega_-(T\mid L)$, а вместо числа $\varepsilon_-(L)$ — число $\varepsilon_+(L)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука. 1970. 536 с.

2. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука. 1986. 352 с.

3. *Iohvidov E.I.* Some characteristics of a linear manifold in a Krein space and their applications // Operator Theeory: Advaces and Applications. 1998. Vol. 106. C. 253—257.

4. *Иохвидов Е.И.* Об операторах, коллинеарных равномерно J-нерастягивающим // В кн.: Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Тезисы докладов). МГУ. М.: 2001. С. 166—168.

5. *Иохвидов Е.И.* О равномерной отрицательности области значений линейного оператора // В кн.: «Современные методы в теории краевых задач». Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-XIII». ВГУ.: 2002 . С. 66.