УДК 517.983

О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

© 2002 А. В. Глушак[1]

Воронежский государственный университет

В статье доказано, что если с оператором A равномерно корректна задача типа Коши порядка $\alpha \in (0,1]$, то с этим же оператором равномерно корректна и задача типа Коши порядка $\alpha/2$. Установлена формула, связывающая решения указанных задач.

В банаховом пространстве E рассматривается следующая задача

$$D^{\alpha}v(t) = Av(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}v(t) = v_0, \tag{2}$$

где A — линейный замкнутый оператор в E с плотной в E областью определения $D(A)$,

$$D^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}v(s)\,ds$$

— левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля (см. [1, с. 84]) порядка $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера,

$$D^{\alpha-1}v(t) = I^{1-\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}v(s)ds$$

— левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$.

В работе [2] доказано, что если при $\Re e\lambda > \omega$ резольвента $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{d^n R(\lambda^{\alpha})}{d\lambda^n}\right\| \le \frac{M\Gamma(n+\alpha)}{(\Re e\lambda - \omega)^{n+\alpha}} \tag{3}$$

для всех целых $n \ge 0$, то задача (1), (2) равномерно корректна, ее решение определяется равенством

$$v(t) = T_{\alpha}(t)v_0 = D^{1-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\,v.p.\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{\alpha-1}e^{\lambda t}R(\lambda^{\alpha})v_0 d\lambda, \tag{4}$$

где $v_0 \in D(A), \sigma = \max(\omega, 0)$, и при этом для любого $x \in E$ справедливо представление

$$R(\lambda^{\alpha})x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T_{\alpha}(t)xdt. \tag{5}$$

В настоящей работе мы покажем, что если с оператором A равномерно корректна задача (1), (2), то с этим же оператором равномерно корректна и задача вида (1), (2), содержащая дробную производную порядка $\delta = \alpha/2$. Мы установим формулу, связывающую решения указанных задач и при $\alpha = 1$ применим ее для исследования поведения решения при $t \to \infty$. Кроме того, в случае $A = \frac{d^2}{dx^2}$ будет построено фундаментальное решение задачи типа Коши.

Теорема 1. Пусть для $\alpha \in (0,1]$ выполнено неравенство (3) и $\delta = \alpha/2$. Тогда задача

$$D^{\delta}v(t) = Av(t),\ \lim_{t\to 0} D^{\delta-1}v(t) = v_0 \in D(A) \tag{6}$$

равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$T_{\delta}(t)v_0 = \frac{2t^{\delta-1}}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^{\alpha-1}E_{1,\delta}\left(-ts^2\right)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2} - \tau s\right)ds T_{\alpha}(\tau)v_0 d\tau, \tag{7}$$

где $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ — функция типа Миттаг-Леффлера.

Доказательство. Проверим, что резольвента $R(\mu)$ при $\Re e\mu > \omega_1$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{d^n R\left(\mu^{\delta}\right)}{d\mu^n}\right\| \le \frac{M\Gamma(n+\delta)}{(\Re e\mu - \omega_1)^{n+\delta}} \tag{8}$$

для всех целых $n \ge 0$.

Положив в (5) $\lambda = \sqrt{\mu}$, получим

$$R\left(\mu^{\delta}\right)x = \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{\mu}t}T_{\alpha}(t)xdt, \tag{9}$$

откуда

$$\frac{d^n R\left(\mu^{\delta}\right)x}{d\mu^n} = \int_0^{\infty}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(e^{-\sqrt{\mu}t}\right)T_{\alpha}(t)xdt =$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{t^2}{2z}\frac{d}{dz}\right)^n\left(\sqrt{\frac{2z}{\pi}}K_{1/2}(z)\right)T_{\alpha}(t)xdt =$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 01-01-00408.

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}2^{n-1/2}\mu^{(2n-1)/4}} \int_0^\infty t^{n+1/2} K_{n-1/2}\left(t\sqrt{\mu}\right) T_\alpha(t) x dt, \quad (10)$$

где $z = t\sqrt{\mu}, K_\nu(\cdot)$ — функция Макдональда.

Поскольку в точке $z = 0$ функция $K_{n-1/2}(z)$ имеет особенность вида $z^{1/2-n}$, а при больших $|z|$ и $|arg z| < \frac{\pi}{2} - \gamma \ (\gamma > 0)$

$$K_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

то из (10) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\left\| \frac{d^n R\left(\mu^\delta\right)}{d\mu^n} \right\| \le \frac{M_1}{2^n|\mu|^{n-1/2}} \int_0^{\varepsilon/\sqrt{|\mu|}} t \left\| T_\alpha(t) \right\| dt + \\ + \frac{M_1}{2^n|\mu|^{n/2}} \int_{\varepsilon/\sqrt{|\mu|}}^\infty t^n e^{-t\Re e\sqrt{\mu}} \left\| T_\alpha(t) \right\| dt. \quad (11)$$

В [2] для $\alpha \in (0,1)$ доказана справедливость неравенства

$$\left\| T_\alpha(t) \right\| \le M_0 t^{\alpha-1} e^{\omega t}, \quad (12)$$

а если $\alpha = 1$, то неравенство (12) известно из теории полугрупп.

Таким образом, из (11), (12) выводим

$$\left\| \frac{d^n R\left(\mu^\delta\right)}{d\mu^n} \right\| \le \frac{M_2}{2^n|\mu|^{n+\alpha/2}} + \frac{M_2\Gamma(n+\alpha)}{2^n|\mu|^{n/2}\left(\Re e\sqrt{\mu} - \omega\right)^{n+\alpha}} \le \\ \le \frac{M_3\Gamma(n+\alpha)}{2^n\left(\Re e\mu - \omega_1\right)^{n+\alpha/2}} \le \frac{M_4\Gamma(n+\alpha/2)n^{\alpha/2}}{2^n\left(\Re e\mu - \omega_1\right)^{n+\alpha/2}} \le \\ \le \frac{M\Gamma(n+\delta)}{\left(\Re e\mu - \omega_1\right)^{n+\delta}},$$

и неравенство (8), а, следовательно, и равномерная корректность задачи (6) тем самым доказаны.

Переходим к установлению связи между решениями задач (1), (2) и (6). Учитывая представления (4) и (9), после элементарных преобразований получим

$$T_\delta(t)v_0 = D^{1-\delta} \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{\delta-1} e^{\mu t} d\mu \int_0^\infty e^{-\tau\sqrt{\mu}} T_\alpha(\tau) v_0 d\tau = \\ = \int_0^\infty D_t^{1-\delta} \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{\delta-1} e^{\mu t - \tau\sqrt{\mu}} d\mu T_\alpha(\tau) v_0 d\tau. \quad (13)$$

Так же как и в [3, с. 236] преобразуем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{\delta-1} e^{\mu t - \tau\sqrt{\mu}} d\mu = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-ts^2} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2} - \tau s\right) ds, \quad (14)$$

и учитывая равенство (см. [1, с. 140]) $D^{1-\delta} e^{\lambda t} = t^{\delta-1} E_{1,\delta}(\lambda t)$, из (13), (14) выводим представление (7). Теорема доказана.

Следствие. Пусть в неравенстве (3) $\alpha = 1$, т.е., как следует из теоремы Хилле-Иосиды, оператор A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $T_1(t)$ класса C_0. Тогда задача

$$D^{1/2}v(t) = Av(t), \lim_{t\to 0} D^{-1/2}v(t) = v_0 \in D(A)$$

равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$T_{1/2}(t)v_0 = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) T_1(\tau) v_0 d\tau. \quad (15)$$

Для доказательства заметим, что в этом случае интеграл в (14) вычисляется и, учитывая определение дробной производной, а также равенства 2.3.6.6 [4], 7.11.4.14 [5], после элементарных преобразований получим

$$T_{1/2}(t)v_0 = \int_0^\infty D_t^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)\right) T_1(\tau) v_0 d\tau = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_0^t y^{-1/2}(t-y)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4y}\right) dy T_1(\tau) v_0 d\tau = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4ts}\right) ds T_1(\tau) v_0 d\tau = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_1^\infty \xi^{-1}(\xi-1)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\xi\right) d\xi T_1(\tau) v_0 d\tau = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \Psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\tau^2}{4t}\right)\right) T_1(\tau) v_0 d\tau = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\int_{\tau/(2\sqrt{t})}^\infty \exp\left(-y^2\right) dy\right) T_1(\tau) v_0 d\tau = \\ = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) T_1(\tau) v_0 d\tau,$$

и формула (15) установлена.

Представление (15) может быть использовано для исследования поведения функции $T_{1/2}(t)v_0$ при $t \to \infty$.

Теорема 2. Пусть $\hat{A}$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T_1(t)$ класса C_0, причем $\sup\limits_{t\geq 0}\|T_1(t)\| \leq M$. Тогда для того чтобы существовал предел

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{\pi t}T_{1/2}(t)v_0 = l,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T_1(\tau)v_0 d\tau = l.$$

Доказательство теоремы вытекает из представления (15) и теоремы 1 в статье [6], согласно которой для непрерывной ограниченной функции $v(t)$ предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_0^\infty \tau\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)v(\tau)d\tau = l$$

существует только тогда, когда существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t v(\tau)d\tau = l.$$

В заключение рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^\alpha v(t,x) = \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2},\ t>0,\ x\in R, \tag{16}$$

$$\lim_{t\to 0} D_t^{\alpha-1}v(t,x) = v_0(x) \tag{17}$$

и найдем фундаментальное решение этой задачи, которое будем обозначать $Z(t,x)$. Ранее фундаментальное решение для уравнения порядка α, содержащего регуляризованную дробную производную было найдено в [7]. В цитируемой работе вместо условия (17) задается условие $v(0,x) = v_0(x)$.

Применяя преобразование Фурье по x, для определения $\tilde{Z}(t,\xi)$ получим задачу

$$D_t^\alpha \tilde{Z}(t,\xi) = -\xi^2\tilde{Z}(t,\xi), \tag{18}$$

$$\lim_{t\to 0} D_t^{\alpha-1}\tilde{Z}(t,\xi) = 1. \tag{19}$$

Согласно [1, пример 42.1] решение задачи (18), (19) имеет вид $\tilde{Z}(t,\xi) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\xi^2 t^\alpha\right)$.

Воспользуемся представлением функции типа Миттаг-Леффлера отрицательного аргумента в виде H-функции Фокса (см. формулу 8.4.51.7 из [5]) и запишем $\tilde{Z}(t,\xi)$ в виде

$$\tilde{Z}(t,\xi) = t^{\alpha-1}H_{12}^{11}\left[\xi^2 t^\alpha\Big|_{(0,1),(1-\alpha,\alpha)}^{(0,1)}\right].$$

Найдем далее само фундаментальное решение $Z(t,x)$. Имеем

$$Z(t,x) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}H_{12}^{11}\left[\xi^2 t^\alpha\Big|_{(0,1),(1-\alpha,\alpha)}^{(0,1)}\right]d\xi =$$
$$= \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\xi x}J_{-1/2}(\xi x)H_{12}^{11}\left[\xi^2 t^\alpha\Big|_{(0,1),(1-\alpha,\alpha)}^{(0,1)}\right]d\xi, \tag{20}$$

где $J_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя.

Применяя в (20) равенства 2.25.3.2, 8.3.2.7 и 8.3.2.6 из [5], получим

$$Z(t,x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}x}H_{32}^{12}\left[\frac{4t^\alpha}{x^2}\Big|_{(0,1),(1-\alpha,\alpha)}^{(1/2,1),(0,1),(0,1)}\right] =$$
$$= \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}x}H_{23}^{21}\left[\frac{x^2}{4t^\alpha}\Big|_{(1/2,\alpha),(1,1),(1,1)}^{(1,1),(\alpha,\alpha)}\right] =$$
$$= \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}x}H_{12}^{20}\left[\frac{x^2}{4t^\alpha}\Big|_{(1/2,1),(1,1)}^{(\alpha,\alpha)}\right].$$

Появление особенности фундаментального решения при $x = 0$ является существенным отличием рассматриваемого уравнения дробного порядка от обычных уравнений параболического типа.

Также как и в [7] можно получить оценки производных фундаментального решения $Z(t,x)$, и в классе экспоненциально растущих функций $v_0(x)$ записать решение задачи (16), (17) в виде

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(t,x-\xi)v_0(\xi)d\xi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск, Наука и техника. 1987.

2. *Глушак А.В.* О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — Воронеж. 2001, № 2. — С. 74—77.

3. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука. 1967.

4. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука. 1983.

5. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука. — 1986.

6. *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка // Известия ВУЗов. Математика. — 2001. — № 11. — С. 3—13.

7. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1990. — Т. 26, № 4. — С. 660—670.