ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 2

УДК:517.986.6

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЕЧЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

© 2002 Б. Д. Гельман

Воронежский государственный университет

В данной статье рассматривается новый простой подход к построению аппроксимаций и сечений многозначных отображений с выпуклыми замкнутыми образами. Этот подход позволяет не только упростить доказательства известных ранее теорем, но и доказать новые утверждения.

Хорошо известна важная роль, которую играют однозначные аппроксимации и сечения в теории многозначных отображений (см., например, [1, 3, 4, 8 и др.).

В данной статье рассматривается новый простой подход к построению аппроксимаций и сечений многозначных отображений с выпуклыми замкнутыми образами. Этот подход позволяет не только упростить доказательства известных ранее теорем, но и доказать новые утверждения.

1. Основные факты теории многозначных отображений

Пусть Y — подмножество нормированного пространства E, обозначим тогда: $P(Y)$ — множество всех непустых подмножеств в Y; $V(Y)$ — множество всех непустых выпуклых подмножеств в Y; $Cv(Y)$ — множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств в Y; $Kv(Y)$ — множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y.

Многозначное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x. В дальнейшем, если образы многозначного отображения F являются выпуклыми, то будем записывать это следующим образом, $F : X \to V(Y)$. Аналогично, обозначение $F : X \to Cv(Y)$ ($F : X \to Kv(Y)$) означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми замкнутыми (компактными) множествами.

Графиком многозначного отображения $F : X \to P(Y)$ называется множество

$$\Gamma_X(F) = \{(x,z) \mid z \in F(x), x \in X\} \subset X \times Y.$$

Всюду в дальнейшем многозначные отображения обозначаются прописными, а однозначные — строчными буквами.

Определение 1. *Многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным снизу в точке $x_\circ \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_\circ) \cap V \neq \varnothing$ найдется открытая окрестность U точки $x_\circ$, такая, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для любого $x \in U$. Если F — полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным снизу.*

Предложение 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) F- полунепрерывно снизу;

2) для любого открытого множества $V \subset Y$ полный прообраз этого множества $F_M^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \cap V \neq \varnothing\}$ является открытым множеством в X;

3) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ малый прообраз этого множества $F_M^{-1}(W) = \{x \in X \mid F(x) \subset W\}$ является замкнутым множеством в X.

Доказательство этого утверждения содержится, например, в [2].

Приведем еще один, по видимому новый, критерий полунепрерывности снизу многозначного отображения.

Пусть $F : X \to P(Y)$ — многозначное отображение, $\Gamma_X(F)$ — график этого отображения. Естественно определены проекции

$$t : \Gamma_X(F) \to X,\ t(x,y) = x,$$

и

$$r : \Gamma_X(F) \to Y,\ r(x,y) = y.$$

* Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00189.

Очевидно, что для любого $x \in X$ справедливо равенство: $F(x) = r \cdot t^{-1}(x)$.

Предложение 2. *Многозначное отображение F полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда проекция t является открытым отображением.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $W \subset \Gamma_X(F)$ — открытое множество и $t(W) = U$. Покажем, что множество U открыто в X. Предположим противное, тогда существует точка $x_0 \in U$ такая, что $(x_0, y_0) \in W$, и для любого $\delta > 0$ найдется точка x_δ, $\rho(x_\delta, x_0) < \delta$, причем $(x_\delta \times F(x_\delta)) \cap W = \varnothing$.

С другой стороны, так как множество W открыто, то существуют такие числа $\delta_0 > 0$, $\eta_0 > 0$, что произведение окрестностей $U_{\delta_0}(x_0) \times U_{\eta_0}(y_0) \subset W$. Из полунепрерывности снизу м-отображения F вытекает, что найдется такое $\delta_1 > 0$, что для любого $x \in U_{\delta_1}(x_0)$ пересечение $F(x) \cap U_{\eta_0}(y_0) \neq \varnothing$. Следовательно, для достаточно малых δ пересечение $(x_\delta \times F(x_\delta)) \cap W \neq \varnothing$. Полученное противоречие и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть t является открытым отображением. Рассмотрим открытое множество V принадлежащее Y и докажем открытость множества $F_\Pi^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \cap V \neq \varnothing\}$. Пусть точка $x_0 \in F_\Pi^{-1}(V)$, тогда найдется точка y_0 такая, что $y_0 \in (F(x_0) \cap V)$. В силу открытости множества V существует число $\eta > 0$ такое, что $U_\eta(y_0) \subset V$. Рассмотрим множество $W = (U_\varepsilon(x_0) \times U_\eta(y_0)) \cap \Gamma_X(F)$. Очевидно, что это множество открыто в $\Gamma_X(F)$. Тогда множество $U = t(W)$ также является открытым и $x_0 \in U$. Пусть $x \in U$, тогда существует точка $y \in F(x)$ такая, что $(x, y) \in W$, т.е. $x \in F_\Pi^{-1}(V)$. Следовательно, точка x_0 лежит в $F_\Pi^{-1}(V)$ вместе со своей открытой окрестностью U, что и доказывает утверждение.

Следствие 1. *Если график многозначного отображения F — открытое множество в $X \times Y$, то отображение F является полунепрерывным снизу.*

Доказательство вытекает из открытости проекции t.

Рассмотрим другой класс многозначных отображений.

Определение 2. *Многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху в точке $x_\circ \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y, V \supset F(x_\circ)$, существует открытая окрестность U точки $x_\circ$ такая, что $F(U) \subset V$. Если F — полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным сверху.*

Предложение 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) F — полунепрерывно сверху;

2) для любого открытого множества $V \subset Y$ малый прообраз этого множества

$$F_M^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \subset V\}$$

является открытым множеством в X.

3) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ полный прообраз этого множества

$$F_\Pi^{-1}(W) = \{x \in X \mid F(x) \cap W \neq \varnothing\}$$

является замкнутым множеством в X.

Доказательство этого утверждения содержится, например, в [2].

Определение 3. *Многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ называется непрерывным, если оно одновременно является полунепрерывным и сверху и снизу.*

Очевидно, что свойства непрерывных многозначных отображений вытекают из соответствующих свойств полунепрерывных сверху и снизу отображений. Подробнее об их свойствах смотри, например, в [2].

Рассмотрим один класс многозначных отображений, важный для дальнейших рассмотрений.

Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $F : X \to P(Y)$ — некоторое многозначное отображение.

Определение 4. *Будем говорить что F является $\mathcal{U}$-отображением, если оно удовлетворяет двум условиям:*

a) график $\Gamma_X(F)$ является открытым множеством в $X \times Y$;

b) для любой точки $x \in X$ образ $F(x)$ является выпуклым множеством.

Обозначим множество всех $\mathcal{U}$-отображений из X в Y символом $\mathcal{U}(X, Y)$. Многозначные отображения принадлежащие $\mathcal{U}(X, Y)$ обладают следующими свойствами:

Свойство 1. *Если $F \in \mathcal{U}(X, Y)$, то оно является полунепрерывным снизу.*

Доказательство этого свойства вытекает из следствия 1.

Свойство 2. *Если $F : X \to V(Y)$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение, то для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $F^\varepsilon : X \to V(Y)$, $F^\varepsilon(x) = U_\varepsilon(F(x))$, является $\mathcal{U}$-отображением.*

Доказательство очевидно.

Свойство 3. *Пусть многозначные отображения* $F_1,...,F_n \in \mathcal{U}(X,Y)$, *если для любой точки* $x \in X$ *пересечение* $\bigcap_{i=1}^{n} F_i(x) \neq \varnothing$, *то многозначное отображение* $\bigcap_{i=1}^{n} F_i(x) \in \mathcal{U}(X,Y)$.

Доказательство очевидно.

2. Непрерывные сечения многозначных отображений

Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $F: X \to P(Y)$ — некоторое многозначное отображение.

Определение 4. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется сечением многозначного отображения F, если для любой точки $x \in X$ выполнено включение $f(x) \in F(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $F \in \mathcal{U}(X,Y)$, *тогда для любого замкнутого множества* $A \subset X$ *и любого сечения* $f: A \to Y$ *многозначного отображения* $F|_A$ *существует сечение* $\tilde{f}: X \to Y$ *многозначного отображения* F *такое, что* $\tilde{f}|_A = f$.

Доказательство. Пусть f_1 — произвольное непрерывное продолжение отображения f на все пространство X. Тогда, в силу открытости графика отображения F, существует открытое множество $U \supset A$ такое, что $f_1|_U$ является сечением многозначного отображения $F|_U$. Пусть точка $x \in B = X \setminus U$, выберем произвольно точку $y_x \in F(x)$. В силу открытости графика отображения F, существует открытая окрестность $U(x)$ точки x такая, что $y_x \in F(x')$ для любой точки $x' \in U(x)$ и $U(x) \cap A = \varnothing$. Очевидно, что семейство $\{U(x)\}_{x \in B}$ образует открытое покрытие множества B. Выберем из этого покрытия локально конечное подпокрытие $\{U(x_\alpha)\}_{\alpha \in J}$. Тогда семейство $\{U; \{U(x_\alpha)\}_{\alpha \in J}\}$ образует локально конечное покрытие пространства X. Пусть функции $\{\varphi(x); \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}\}$ образуют разбиение единицы, построенное по этому покрытию. Рассмотрим отображение $\tilde{f}: X \to Y$ определенное по правилу:

$$\tilde{f}(x) = \varphi(x) f_1(x) + \sum_{\alpha \in J} \varphi_\alpha(x) y_{x_\alpha}.$$

Нетрудно доказать, что в силу выпуклости образов многозначного отображения F, построенное отображение $\tilde{f}$ будет искомым сечением. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $F: X \to V(Y)$ — *полунепрерывное снизу многозначное отображение. Тогда, для любого* $\varepsilon > 0$, *любого замкнутого множества* $A \subset X$ *и любого сечения* $f: A \to Y$ *многозначного отображения* $F|_A$, *существует непрерывное отображение* $\tilde{f}: X \to Y$ *такое, что:*

1) $\tilde{f}|_A = f$;

2) $\tilde{f}(x) \in U_\varepsilon(F(x))$ *для любого* $x \in X$, *т.е.* $\tilde{f}$ *является* ε*-сечением многозначного отображения* F.

Доказательство. В силу свойств $\mathcal{U}$-отображений, для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $F^\varepsilon: X \to V(Y)$, $F^\varepsilon(x) = U_\varepsilon(F(x))$, является $\mathcal{U}$-отображением. Следовательно, справедливость следствия вытекает из теоремы 1.

Опираясь на теорему 1 и следствие 2 можно дать простое доказательство классической теоремы Майкла о сечении [10].

Теорема 2. *Пусть* E — *банахово пространство,* $F: X \to Cv(E)$ — *полунепрерывное снизу многозначное отображение,* A — *замкнутое подмножество в* X. *Если* $f: A \to E$ *непрерывное сечение* $F|_A$, *то у* F *существует непрерывное сечение* $g: X \to E$ *такое, что* $g|_A = f$.

Доказательство. Пусть r — произвольное положительное число, построим последовательность непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n: X \to E$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\rho(f_n(x), F(x)) < \frac{r}{2^n}$ для любого $x \in X$;

2) $\| f_n(x) - f_{n-1}(x) \| < \frac{r}{2^n}$ для любого $x \in X$ и $n > 0$;

3) $f_n|_A = f$.

Строить эти отображения будем индуктивно. В качестве отображения f_0 рассмотрим произвольное r-сечение многозначного отображения F, удовлетворяющего условиям следствия 2.

Построим отображение f_1, для этого рассмотрим два многозначных отображения G_1 и G'_1, $G_1(x) = U_{\frac{r}{2}}(F(x))$ и $G'_1(x) = U_{\frac{r}{2}}(f_0(x))$. В силу свойства 2 многозначных $\mathcal{U}$-отображений, эти отображения принадлежат $\mathcal{U}(X,E)$. Так как $\rho(f_0(x), F(x)) < r$, то $G_1(x) \cap G'_1(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in X$. Следовательно, в силу свойства 3 многозначных $\mathcal{U}$-отображений, отображение $G_1 \cap G'_1$ также является $\mathcal{U}$-отображением и, в силу теоремы 1, у него существует сечение f_1, которое совпадает с f на множестве

A. Очевидно, что построенное отображение f_1 удовлетворяет условиям 1, 2, 3.

Пусть у нас уже построены отображения $f_0, ..., f_{n-1}$, удовлетворяющие условиям 1, 2 и 3. Построим отображение f_n, для этого рассмотрим два многозначных отображения G_n и G'_n, $G_n(x) = U_{\frac{r}{2^n}}(F(x))$ и $G'_1(x) = U_{\frac{r}{2^n}}(f_{n-1}(x))$. В силу свойства 2 многозначных $\mathcal{U}$-отображений, эти отображения принадлежат $\mathcal{U}(X, E)$. Так как $\rho(f_{n-1}(x), F(x)) < \frac{r}{2^{n-1}}$, то $G_n(x) \cap G'_n(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in X$. Следовательно, в силу свойства 3 многозначных $\mathcal{U}$-отображений, отображение $G_n \cap G'_n$ также является $\mathcal{U}$-отображением и, в силу теоремы 1, у него существует сечение f_n, которое совпадает с f на множестве A. Очевидно, что построенное отображение f_n удовлетворяет условиям 1, 2, 3.

В силу условия 2, построенная последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится к непрерывному отображению $g : X \to E$. В силу условия 3 имеем, $g|_A = f$. В силу условия 1, для любой точки $x \in X$ справедливо включение $g(x) \in F(x)$, т.е. g является непрерывным сечением F. Теорема доказана.

3. Аппроксимации полунепрерывных сверху многозначных отображений

Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $F : X \to P(Y)$ — многозначное отображение.

Определение 5. *Многозначное отображение $G : X \to P(Y)$ называется ε-аппроксимацией многозначного отображения F, если график $\Gamma_X(G)$ отображения G принадлежит ε-окрестности графика $\Gamma_X(F)$ многозначного отображения F*. В случае, если G является однозначным непрерывным отображением, говорят, что G — однозначная ε-аппроксимация многозначного отображения F.

Теорема 3. *Пусть $F : X \to Cv(Y)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное многозначное отображение $F_\varepsilon : X \to Cv(Y)$ удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $F_\varepsilon(x) = \overline{(\sum_{j\in J} \varphi_j(x) A_j)}$, где $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ — разбиение единицы, построенное по некоторому локально конечному покрытию; $\{A_j\}_{j\in J}$ — выпуклые замкнутые множества;

2) $F(x) \subset F_\varepsilon(x)$ для любого $x \in X$;

3) график $\Gamma_X(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma_X(F))$;

4) $F_\varepsilon(X) \subset \overline{co}(F(X))$.

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. В силу полунепрерывности сверху многозначного отображения F, для любой точки $x \in X$ существует положительное число $\delta(x)$ такое, что для любой точки $x' \in U_{\delta(x)}(x)$ выполнено включение $F(x') \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x))$. Без ограничения общности будем считать, что $0 < \delta(x) < \varepsilon$. Пусть $\eta(x) = \frac{1}{4}\delta(x)$. Рассмотрим открытое покрытие $\tau = \{U_{\eta(x)}(x)\}_{x\in X}$. Выберем из него локально конечное подпокрытие $\sigma = \{V_j = U_{\eta(x_j)}(x_j)\}_{j\in J}$. Пусть функции $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ образуют непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Рассмотрим многозначное отображение F_σ, где

$$F_\sigma(x) = \sum_{j\in J} \varphi_j(x)\overline{co}F(V_j).$$

Проверим для отображения F_σ выполнение условия 2. Пусть x — прозвольная точка из X. Значение $\varphi_j(x) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $x \in V_j$. Пусть $j_1, j_2, ..., j_s$ — индексы всех функций, для которых $\varphi_j(x) \neq 0$. Тогда $F_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_{j_i}(x)\overline{co}F(V_{j_i})$, где $x \in \bigcap_{i=1}^{s} V_{j_i}$. Следовательно, $F(x) \subset F(V_{j_i}) \subset \overline{co}F(V_{j_i})$. Тогда $F(x) \subset F_\sigma(x)$.

Покажем, что отображение F_σ удовлетворяет условию 3. Пусть $x \in V_{j_i} \subset X$, $i = 1, 2, ..., s$. Множество $V_{j_i} = U_{\eta_{x_i}}(x_i)$, где $i = 1, 2, ..., s$. Пусть $\eta_{x_k} = \max_{1\le i\le s} \eta_{x_i}$, тогда $x \in U_{\eta_{x_k}}(x_i)$ для любого $i = 1, 2..., s$. Тогда $x_i \in U_{2\eta_k}(x_k)$ для любого $i = 1, 2..., s$. Следовательно, $V_{j_i} \subset U_{3\eta_{x_k}}(x_k) \subset U_{\delta(x_k)}(x_k)$. В силу определения множества $U_{\delta(x_k)}(x_k)$ для любой точки $x' \in V_{j_i}$ выполнено включение

$$F(x') \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_k)).$$

Так как множество $F(x_k)$ — выпукло, то

$$F_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_{j_i}(x)\overline{co}F(V_{j_i}) \subset \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_k))}.$$

Рассмотрим отображение $F_\varepsilon(x) = \overline{F_\sigma(x)}$. Очевидно, что это отображение удовлетворяет условиям 1 и 2. Условие 3 вытекает из того, что

$$\overline{F_\sigma(x)} \subset \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_k))} \subset U_\varepsilon(F(x_k).$$

Так как $\rho(x, x_k) < \eta_s < \varepsilon$, то график $\Gamma(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma(F))$.

Условие теоремы 4 вытекает из того, что

$$F_\sigma(x) \subset co\{\overline{co}F(V_{j_1}), ..., \overline{co}F(V_{j_s})\} \subset \overline{co}F(X).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы естественно вытекает следующее утверждение, доказанное в работе [6].

Следствие 3. *Пусть* $F: X \to Cv(Y)$ *— полунепрерывное сверху многозначное отображение, тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует однозначная* ε*-аппроксимация* f_ε *многозначного отображения* F *такая, что* $f_\varepsilon(X) \subset \overline{co}(F(X))$.

Доказательство. Пусть F_ε, $F_\varepsilon(x) = \overline{\sum_{j\in J} \varphi_j(x)A_j}$, — многозначная ε-аппроксимация, существующая в силу теоремы 3. Выберем в каждом множестве A_j произвольную точку y_j и рассмотрим отображение f_ε, определенное условием

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j\in J} \varphi_j(x)y_j,$$

Очевидно, что построенное отображение и является искомым.

Следствие 4. *Пусть* E *— банахово пространство и* A *— замкнутое подмножество* X. *Если многозначное отображение* $F: X \to Cv(E)$ *является полунепрерывным сверху и отображение* $f: A \to E$ *является непрерывным сечением многозначного отображения* $F|_A$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* ε*-аппроксимация* f_ε *такая, что* $f_\varepsilon(x) = f(x)$ *для любой точки* $x \in A$ *и* $f_\varepsilon(X) \subset \overline{co}(F(X))$.

Доказательство. Пусть F_ε — многозначная непрерывная ε-аппроксимация, существующая в силу теоремы 3. Так как многозначное непрерывное отображение F_ε является, в частности, полунепрерывным снизу, то по теореме 2, у него существует непрерывное однозначное сечение, которое является непрерывным продолжением f. Очевидно, что это сечение и будет искомым отображением f_ε.

4. Однозначные сечения и аппроксимации пересечения многозначных отображений

Пусть X — метрическое пространство, E — банахово пространство, $F: X \to Cv(E)$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение, $G: X \to V(E)$ — $\mathcal{U}$-отображение. Пусть для любого $x \in X$ пересечение $F(x) \cap G(x) \neq \varnothing$. Обозначим $F \cap G$ многозначное отображение, определенное условием $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$.

Теорема 4. *Пусть* A *— замкнутое подмножество в* X. *Если* $f: A \to E$ *непрерывное сечение* $(F \cap G)|_A$, *то у многозначного отображения* $F \cap G$ *существует непрерывное сечение* $g: X \to E$ *такое, что* $g|_A = f$.

Доказательство. Пусть f_1 является произвольным непрерывным сечением многозначного отображения F, которое является продолжением f на все пространство X. Такое сечение существует в силу теоремы 2. Тогда, в силу открытости графика отображения G, существует открытое множество $U \supset A$ такое, что $f_1|_U$ является сечением многозначного отображения $G|_U$.

Пусть точка $x \in B = X \setminus U$, выберем произвольно точку $y_x \in (F(x) \cap G(x))$. Рассмотрим произвольное сечение f_x м-отображения F, которое удовлетворяет условию: $f_x(x) = y_x$. В силу открытости графика отображения G, существует открытая окрестность $U(x)$ точки x такая, что $f_x(x') \in G(x')$ для любой точки $x' \in U(x)$ и $U(x) \cap A = \varnothing$. Очевидно, что такое отображение f_x может быть построено для любой точки $x \in B$. Тогда семейство $\{U(x)\}_{x\in B}$ образует открытое покрытие множества B. Выберем из этого покрытия локально конечное подпокрытие $\{U(x_\alpha)\}_{\alpha\in J}$. Тогда семейство $\{U; \{U(x_\alpha)\}_{\alpha\in J}\}$ образует локально конечное покрытие пространства X. Пусть функции $\{\varphi(x); \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}\}$ образуют разбиение единицы, построенное по этому покрытию. Рассмотрим отображение $g: X \to E$ определенное по правилу:

$$g(x) = \varphi(x)f_1(x) + \sum_{\alpha\in J} \varphi_\alpha(x) f_{x_\alpha}(x).$$

Нетрудно доказать, что в силу выпуклости образов многозначных отображений F и G, построенное отображение g будет искомым сечением. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $F_i: X \to Cv(E)$, $i = 0, 1, \ldots, k$ *— полунепрерывные снизу многозначные отображения,* $G_j: X \to Cv(E)$, $j = 1, \ldots, s$ *— полунепрерывные сверху многозначные отображения. Если для любого* $x \in X$ *пересечение*

$$\left(\bigcap_{i=0}^{k} F_i(x)\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{s} G_j(x)\right) \neq \varnothing,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *существует непрерывное отображение* $f_\varepsilon: X \to E$ *удовлетворяющее следующим условиям:*

1) f_ε *является непрерывным сечением многозначного отображения* F_0;

2) для любого $x \in X$ *расстояние* $\rho(f_\varepsilon(x), F_i(x)) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, k$;

3) отображение f_ε *является* ε*-аппроксимацией многозначных отображений* G_j, $j = 1, \ldots, s$.

Доказательство. В силу теоремы 3, существуют непрерывные м-отображения $\tilde{G}_j$ такие, что: $G_j(x) \subset \tilde{G}_j(x)$ для любого $x \in X$; график $\Gamma_X(\tilde{G}_j) \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Gamma_X(G_j))$. Тогда м-отображения $\tilde{G}_j^{\frac{\varepsilon}{2}}$, где $\tilde{G}_j^{\frac{\varepsilon}{2}}(x) = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(\tilde{G}_j(x))$, будут $\mathcal{U}$-отображениями.

Аналогично, $\mathcal{U}$-отображениями будут м-отображения F_i^{ε}, при $i = 1,...,k$. Рассмотрим пересечение

$$(\bigcap_{i=1}^{k} F_i^{\varepsilon}(x)) \bigcap (\bigcap_{j=1}^{s} \tilde{G}_j^{\frac{\varepsilon}{2}}(x)) = G(x).$$

Очевидно, что многозначное отображение G также является $\mathcal{U}$-отображением и $G(x) \cap F_0(x) \neq \varnothing$. В силу теоремы 4, многозначное отображение $G \cap F_0$ имеет непрерывное сечение, которое и будет искомым.

Эта теорема обобщает утверждение доказанное в [5].

Следствие 5. *Пусть X — метрическое пространство, A — замкнутое подмножество в X. Пусть $F : X \to Cv(E)$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение, $h : X \to E$ — непрерывное отображение. Пусть $\alpha : X \to R_+$ — непрерывная числовая функция такая, что справедливо неравенство*

$$\alpha(x) > \inf_{y \in F(x)} \| h(x) - y \| \text{ для любой точки } x \in X.$$

Если f непрерывное сечение $F|_A$ и $\alpha(x) > \| h(x) - f(x) \|$ для любого $x \in A$, то у F существует непрерывное сечение $g : X \to E$ такое, что

a) $g|_A = f$;

b) $\alpha(x) > \| h(x) - g(x) \|$ *для любого* $x \in X$.

Доказательство. Рассмотрим два многозначных отображения $\tilde{F}$ и Ψ, действующие из X в E:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), \text{если } x \notin A, \\ f(x), \text{если } x \in A; \end{cases}$$

а $\Psi(x) = \{y \in E \mid \| y - h(x) \| < \alpha(x)\}$. Очевидно, что многозначное отображение $\tilde{F}$ имеет выпуклые замкнутые образы и полунепрерывно снизу, а многозначное отображение Ψ является $\mathcal{U}$-отображением. Заметим также, что для любого $x \in X$ пересечение $\tilde{F}(x) \cap \Psi(x) \neq \varnothing$. В силу теоремы 4, отображение $\tilde{F} \cap \Psi$ имеет непрерывное сечение, которое, как легко видеть, является искомым. Следствие доказано.

Следствие 6. *Пусть E — банахово пространство, A — замкнутое выпуклое подмножество в X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $r : E \to A$ такое, что $\| r(x) - x \| \leq (1+\varepsilon)\rho(x, A)$.*

Доказательство. Рассмотрим многозначные отображения:

$F : E \setminus A \to V(E)$,

$F(x) = \{y \in E \mid \| y - x \| < (1+\varepsilon)\rho(x, A)$, и

$\Psi : E \setminus A \to Cv(E)$, $\Psi(x) = A$.

Очевидно, что F является U-отображением, а отображение Ψ полунепрерывно снизу, причем пересечение $F(x) \cap \Psi(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in E \setminus A$. Следовательно, отображение $F \cap \Psi$ имеет непрерывное сечение $f : E \setminus A \to A$. В силу сделанных построений, $\| f(x) - x \| < (1+\varepsilon)\rho(x, A)$ для любого $x \in E \setminus A$.

Рассмотрим отображение r определенное условием:

$$r(x) = \begin{cases} x, \text{если } x \in A, \\ f(x), \text{если } x \notin A; \end{cases}$$

Очевидно, что это отображение r является искомым.

Это утверждение другими методами было доказано в [9].

Замечание. Очевидно, что многие утверждений разделов 1—4 естественно переносятся на случай метризуемых ЛВП.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных точек многозначных отображений// Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 59—126.

2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.

3. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Многозначные отображения. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ. 1982. Т. 19. С. 127—229.

4. *Реповш Д., Семенов П.В.* Теория Э. Майкла непрерывных селекций. Развитие и приложения // Успехи мат. наук. 1994. т.49, № 6. С. 151—188.

5. *Ben-El-Mechaiekh H., Kryszewski W.* Equilibria of set-valued maps on nonconvex domains// Transactions of the AMS. 1997. V. 349, № 10, P. 4159—4179.

6. *Lasota A., Opial Z.* An approximation theorem for multivalued mappings// Podstavy Sterovania, 1971. № 1. P. 71—75.

7. *Борсук К.* Теория ретрактов. М: Мир. 1971.

8. *Repovs D., Semenov P.V.* Continuous Selections of Multivalued Mappings. Mathematics and its Applications № 455, Kluwer, Dordrecht, 1998.

9. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М: Наука. 1975.

10. *Michael E.* Continuous selections, 1// Ann. of Math., 1956, V. 63, № 2, P. 361—382.