ФИЗИКА

УДК 621.3.015.4

РЕЗОНАНС КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2002 В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк

Воронежский государственный университет

Рассмотрен колебательный контур с активными сопротивлениями меняющимися во времени по периодическим законам, периоды предполагаются одинаковыми. Теоретически исследуется явление резонанса.

Теория резонанса колебательного контура с периодическими параметрами разрабатывалась в 30-е годы Г. С. Гореликом [1], его работы заслуженно получили высокую оценку академиков Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. Однако позже по непонятным причинам работы в этом направлении были прекращены, хотя теория не была завершена, а явление резонанса является центральным в теории колебаний. В статьях [2—5] с участием одного из авторов предпринята попытка развития теории Горелика, однако до полной завершенности анализа столь сложного явления еще далеко.

В контуре с периодическими параметрами возможны как минимум три разновидности резонанса в зависимости от свойств базового уравнения. Если оно устойчиво по Ляпунову, имеем первую разновидность (резонанс 1), если оно принадлежит границе между областями устойчивости и неустойчивости, то получается вторая разновидность (резонанс 2), если — неустойчиво, то — третий случай (резонанс 3). Прямым обобщением обычного резонанса является резонанс 1. Таким образом, контур с периодически изменяющимися активными сопротивлениями является удобной моделью для исследования резонанса 1.

Обычно принято представлять колебательный контур дифференциальным уравнением второго порядка. Между тем законы Кирхгофа напрямую приводят к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, такая система более удобна для классификации. Дальнейшим преобразованием можно получить одно дифференциальное уравнение второго порядка. В случае контура с постоянными параметрами такое преобразование не представляет труда. Для нелинейных контуров и контуров с переменными параметрами преобразование может быть громоздким или даже невозможным.

Рассмотрим контур с периодически изменяющейся диссипацией, схема которого представлена на рисунке 1. Здесь диссипация представлена тремя резисторами. Физика тепловых потерь такова, что эквивалентная цепь как индуктивности, так и емкости содержит два активных сопротивления, одно параллельное, а другое последовательное с реактивностью. Здесь предполагается, что все три резистивности изменяются во времени с одним и тем же периодом $T = 2\pi / \Omega$, оставаясь всегда положительными. Таковы правила общих проблем анализа, предполагается рассматривать самый сложный для анализа случай. Переход к меньшему количеству резистивностей или предположение, что некоторые из них или даже все остаются постоянными, трудностей не вызывает.

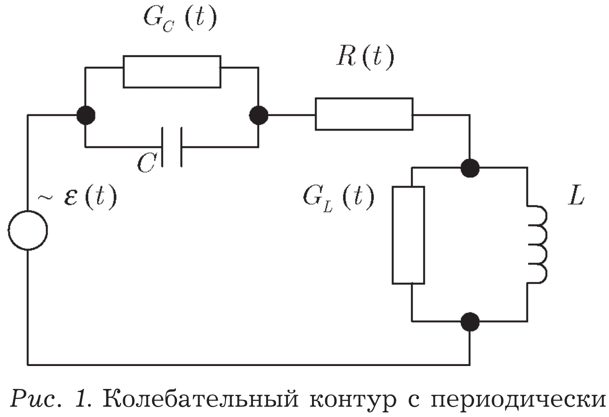

Рис. 1. Колебательный контур с периодически изменяющейся диссипацией

Уравнение контура относительно заряда и система двух уравнений относительно заряда и магнитного потока имеют вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\left(\frac{R/L+G_L/C+\dot{R}G_L+R\dot{G}_L}{1+RG_L}+\frac{G_C}{C}\right)\frac{dq}{dt}+$$
$$+\frac{1}{LC}\left[\frac{1+RG_C(1+L\dot{G}_L)+L(\dot{G}_L+\dot{R}G_LG_C)}{1+RG_L}+L\dot{G}_C\right]q=$$
$$=\frac{\left(1/L+\dot{G}_L\right)\varepsilon(t)+G_L\dot{\varepsilon}(t)}{1+RG_L}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}q\\ \Phi\end{bmatrix}=\frac{1}{1+RG_L}\begin{bmatrix}-\dfrac{G_C+G_L+RG_LG_C}{C} & \dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ \Phi\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\dfrac{G_L}{1+RG_L}\varepsilon(t)\\ \dfrac{1}{1+RG_L}\varepsilon(t)\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $G_C=G_C(t)$, $G_L=G_L(t)$, $R=R(t)$, точка сверху означает дифференцирование по времени.

Практика показывает, что во многих случаях (в частности, при машинном анализе) уравнение целесообразно привести к безразмерному нормированному виду. Для этого введем нормированные делители заряда q_M и времени t_M (масштабные параметры) и введем безразмерные переменные: время $\tau=t/t_M$ и заряд $x=q/q_M$. В новых переменных уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\left(\frac{\dfrac{t_MR}{L}+\dfrac{t_MG_L}{C}+\dot{R}G_L+R\dot{G}_L}{1+RG_L}+\frac{t_MG_C}{C}\right)\frac{dx}{d\tau}+$$
$$+\frac{t_M^2}{LC}\left[\frac{1+RG_C\left(1+\dfrac{L\dot{G}_L}{t_M}\right)+\dfrac{L}{t_M}\left(\dot{G}_L+\dot{R}G_LG_C\right)}{1+RG_L}+\frac{L\dot{G}_C}{t_M}\right]x=$$
$$=\frac{t_M}{q_M}\frac{\left(\dfrac{t_M}{L}+\dot{G}_L\right)\varepsilon(\tau)+G_L\dot{\varepsilon}(\tau)}{1+RG_L} \tag{3}$$

Здесь $R=R(\tau)$, $G_C=G_C(\tau)$, $G_L=G_L(\tau)$, а точка сверху означает дифференцирование по τ. Переходя к более привычным обозначениям представим уравнение (3) в общем виде, как и в [1]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta(t)\frac{dx}{dt}+\rho(t)x=f(t) \tag{4}$$

Наряду с этим уравнением целесообразно рассмотреть соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\delta(t)\frac{dy}{dt}+\rho(t)y=0 \tag{5}$$

Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — какие-нибудь линейно независимые решения (5), то решение (4) представляется в виде

$$x(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+x_ч(t) \tag{6}$$

где C_1, C_2 — произвольные константы, $x_ч$ — частное решение (4).

В реальном случае коэффициенты (4) положительны, тогда (4) и (5) асимптотически устойчивы по Ляпунову, следовательно, первые два слагаемые в (6) с возрастанием времени стремятся к нулю, таким образом в установившемся режиме общее решение (4) равно его частному решению $y(t)\cong y_ч(t)$ при больших t.

Но частное решение (4) также может быть представлено через линейно независимые решения (5) $y_1(t)$ и $y_2(t)$ согласно выражению

$$x_ч(t)=y_1(t)\int_0^t\frac{f(t)y_2(t)}{V(t)}dt+y_2(t)\int_0^t\frac{f(t)y_1(t)}{V(t)}dt \tag{7}$$

где $V(t)=y_1(t)\dot{y}_2(t)-\dot{y}_1(t)y_2(t)$ — определитель Вронского (вронскиан).

Вронскиан удовлетворяет условию $V(t)=V(0)e^{-2\int_0^t\delta(t)dt}$, где $V(0)$ определяется по начальным условиям, причем если $y_1(0)=1$, $\frac{dy_1(0)}{dt}=0$, $y_2(0)=0$, $\frac{dy_2(0)}{dt}=1$, то $V(0)=1$. Если известно одно из решений $y_1(t)$ уравнения (5), то другое линейно независимое может быть определено по формуле $y_2(t)=V(0)y_1(t)\int e^{-2\int_{t_0}^t\delta(t)dt}\frac{dt}{y_1^2(t)}$.

Как видно, определяющее установившийся режим контура частное решение (7) уравнения (4), всецело зависит от фундаментальной системы решений однородного уравнения (5) и вынуждающей силы $f(t)$. Оказывается, что при анализе резонансных решений (4) большое значение имеет уравнение (5) при условии $\delta \equiv 0$:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \rho(t) z = 0\,, \tag{8}$$

которое естественно назвать базовым уравнением резонанса нашего контура.

Можно показать, что как структура вынуждающей силы $f(t)$ при резонансе, так и резонансные колебания напрямую связаны с решением базового уравнения (8).

В самом деле, вынуждающую силу всегда можно представить в виде произведения

$$f(t) = 2\delta(t) s(t) \tag{9}$$

тогда уравнение (4) может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \rho(t) x = 2\delta(t)\left[s(t) - \frac{dx}{dt}\right] \tag{10}$$

Если окажется, что $s(t) = \frac{dz(t)}{dt}$, т.е. является производной от решения базового уравнения (8), то выражение в квадратных скобках (10) может быть равным нулю, а решение (10) является также и решением базового уравнения (8). Именно в этом и заключается явление резонанса параметрического контура. Такое толкование резонанса согласуется с представленным в статье [1], но имеет более общий и естественный характер. Рассмотрим явление резонанса подробнее.

Прежде всего наложим должные ограничения на уравнение (4): функции $\delta(t)$ и $\rho(t)$ считаются периодическими с круговой частотой $\Omega = 2\pi/T$, т.е. $\delta(t+T) = \delta(t)$, $\rho(t+T) = \rho(t)$, а вынуждающая функция представляет собой квазипериодическую функцию со спектром $\omega + \kappa\Omega$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$, такие функции иногда называют функциями Хилла. Как сами функции, так и их первые производные во времени являются непрерывными. Тогда базовое уравнение (8) является уравнением Хилла, а его частный случай, уравнение Матье, подробно рассмотрено в литературе как в теоретическом, так и в вычислительном отношениях [6].

Резонанс — весьма тонкое явление, при котором потеря энергии на диссипацию в точности компенсируется вынуждающей силой. Это удобно наблюдать по уравнению (10), если выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю, то решение этого уравнения не зависит от $\delta(t)$. Так получается потому, что $\delta(t)$ входит в два слагаемых, которые при резонансе в точности друг друга компенсируют. Заметим, что в общем случае уравнение Хилла (8) может быть неустойчивым (тогда его решение возрастают во времени). Однако в нашем случае, когда параметры контура положительны, а изменяются во времени только активные сопротивления, случай неустойчивости невозможен, т.е. наше уравнение Хилла всегда устойчиво неасимптотически, ни одно из его решений (кроме тривиального $z \equiv 0$) с возрастанием времени не может стремиться ни к бесконечности, ни к нулю. Все его решения имеют вид:

$$z(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} z_\kappa \cos\left[(h + \kappa\Omega)t = \varphi_\kappa\right], \tag{11}$$

где константа h определяется известными численными методами. Ряд правой части (11) при непрерывности $\rho(t)$ и ее первой производной сходится равномерно и абсолютно. В таком случае при резонансе вынуждающая функция в (4) должна иметь $f(t) = 2\delta(t)\frac{dz(t)}{dt} =$

$= -2\delta(t)\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}(h + \kappa\Omega) z_\kappa \sin[(h + \kappa\Omega)t + \varphi_\kappa]$, т.е. такой же вид по спектру, как и (11). При настройке в резонанс удобно пользоваться, как и при обычной настройке, гармонической э.д.с. $\varepsilon(t) = \varepsilon\cos(\omega t + \varphi)$, которая в параметрическом контуре дает вынуждающую силу $f(t)$ в виде функции Хилла со спектром $\omega + \kappa\Omega$. Изменяя ω можно добиться равенства

$$\omega = h \tag{12}$$

Это означает, что спектр вынуждающей силы совпадает со спектром первой производной решения (и самого решения) базового уравнения (8), что является необходимым (но не достаточным) условием резонанса. Кроме того, составляющие спектра $f(t)$ при резонансе должны быть вполне определенными. Эти составляющие контур выделит сам и откликнется на выделенную им функцию Хилла резонансом.

Попытаемся приведенные здесь соображения перевести на точный математический язык. Для этого потребуется некоторый минимум сведений о почти периодических функциях и действиях над ними. Общее определение может быть таким: почти периодическая функция — функция, которая может быть представлена рядом Фурье по гармоническим функциям. При этом не требуется, чтобы частоты гармоник были соизмеримы, их отношения не обязательно равны отношению целых чисел. Если есть две периодические гармонические функции с частотами ω_1 и ω_2, то их комбинационный спектр имеет вид $\kappa\omega_1 + \ell\omega_2$, где κ и ℓ — любые положительные или отрицательные целые числа. Весь комбинационный спектр двух гармонических функций определяется двумя последовательностями целых чисел: $\kappa, \ell = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty$. Если бы исходных функций было три, то соответственно нужно выбирать и три последовательности целых чисел и т.д. Пусть дана конкретная почти периодическая функция с ее спектром. В таком случае всегда можно подобрать минимальное число гармонических функций таких, чтобы их комбинационный спектр включал в себя спектр почти периодической функции. Число таких гармонических функций называется базисом почти периодической функции. Если базис равен бесконечности, то имеем истинно почти периодическую функцию или почти периодическую функцию в узком смысле. Если базис конечен, то такую почти периодическую функцию часто называют квазипериодической функцией. Почти периодическая функция в широком смысле дает радикальное расширение класса периодических функций. Периодическая функция есть почти периодическая функция с базисом, равным единице. Функция Хилла есть почти периодическая функция с базисом, равным двум. Синусоида, любым способом модулированная чистым тоном (по амплитуде, частоте, фазе или комплексно) есть почти периодическая функция с базисом, равным двум. Функция со спектром $\omega, \sqrt{2}\omega, \sqrt{3}\omega, \ldots, \sqrt{n}\omega, \ldots$, есть строго говоря, почти периодическая функция в узком смысле (базис ее равен бесконечности), но если ее спектр ограничить, как это часто делается в приближенном анализе, то базис ее становится конечным, а функция — квазипериодической.

Введем, как и в [1], математическое действие — скалярное произведение почти периодических функций. Именно, скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ двух почти периодических функций называется число, равное среднему значению произведения этих функций. Для почти периодических функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеем:

$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} f_1(t) \cdot f_2(t)\, dt\,,$$

где t_0 — любое число.

Частным случаем $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ скалярного произведения является скалярный квадрат почти периодической функции

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} f^2(t)\, dt\,.$$

На основе скалярного произведения можно ввести важные для анализа резонанса понятия. Две почти периодические функции являются взаимно *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Почти периодическая функция называется *нормированной*, если ее скалярный квадрат равен единице. Две почти периодические функции являются *ортонормированными,* если они нормированы и взаимно ортогональны. Широко известное в радиофизике понятие эффективного или действующего значения периодической функции может быть легко распространено на случай почти периодической функции с помощью определения: эффективным (действующим) значением данной почти периодической функции называется число, равное квадратному корню от скалярного квадрата этой функции. Например, действующее значение f_g почти периодической функции $f(t)$ вычисляется так: $f_g = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}$

Из только что приведенных сведений естественно вытекает способ ортонормирования любых двух почти периодических функций $f_1(t), f_2(t)$, он заключается в следующем:

1. Нормируем любую из них $u(t) = \dfrac{f_1(t)}{\sqrt{\langle f_1(t), f_1(t) \rangle}}$.

2. Подбираем функцию $f(t)$, ортогональную к $u(t)$. Для этого сначала представляем эту функцию в виде $f(t) = Au(t) + Bf_2(t)$, A, B — константы. Скалярно умножим обе части на $u(t)$, получим $0 = A + B\langle f_2(t), u(t) \rangle$. Здесь A можно выбрать произвольно, после чего B вычисляется однозначно.

3. Нормируем функцию $f(t)$: $v(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}}$.

Итак, вместо пары произвольных почти периодических функций $f_1(t), f_2(t)$, мы получили пару ортонормированных почти периодических функций $u(t), v(t)$. Если потребуется линейная комбинация первых двух функций, то ее можно представить через вторую пару $Af_1(t) + Bf_2(t) = Cu(t) + Dv(t)$. Для любых констант A, B можно подобрать константы C, D так, чтобы равенство выполнялось при любом t.

Доказано следующее утверждение: почти периодическая функция и ее производная взаимно ортогональны. Для доказательства обе функции представляются в виде ряда Фурье и принимается во внимание то, что две гармонические функции разных частот — взаимно ортогональны; синусоидальная и косинусоидальные функции одного и того же аргумента — взаимно ортогональны. Заметим, что все отмеченные свойства почти периодических функций относятся и к функциям Хилла, как их частному случаю.

Теперь возвратимся к нашему уравнению Хилла (8), выберем два линейно независимых решения $z_1(t)$ и $z_2(t)$, удовлетворяющих начальным условиям $z_1(0) = 1, \dot{z}_1(0) = 0, z_2(0) = 0, \dot{z}_2(0) = 1$ из них получим ортонормированные функции Хилла, соответственно, $u(t), v(t)$. Тогда общее решение (8) можно представить в виде

$$z(t) = Au(t) + Bv(t), \tag{13}$$

где A, B — произвольные константы. Примечательным свойством уравнения Хилла является независимость от времени вронскиана любых двух линейно независимых решений.

Продолжим анализ резонанса параметрического контура, уравнение колебаний которого (4) может быть представлено в специальном виде (10), при этом вынуждающая функция $f(t)$ также представлена особым способом (9). При резонансе функция $S(t)$ представляет собой производную решения уравнения Хилла (8), а значит может быть представлена, согласно (13), в виде

$$s(t) = A\dot{u}(t) + B\dot{v}(t), \tag{14}$$

В общем случае функция Хилла $f(t)$ (9) является нерезонансной, контур разделяет эту функцию на резонансную и нерезонансную части, на которые реагирует по-разному. В этом реальном случае вместо (14) имеем

$$s(t) = A\dot{u}(t) + B\dot{v}(t) + g(t), \tag{15}$$

Функция $f(t)$ задает начальные условия в (4), поэтому константы A, B задаются однозначно. По соображениям изложенным в [1], нерезонансная часть $g(t)$ должна быть ортогональной к обеим функциям $u(t), v(t)$. Тогда, умножив (15) скалярно сначала на $u(t)$, затем на $v(t)$, получим систему двух уравнений $\left.\begin{aligned} \langle s(t), u(t)\rangle &= B\langle \dot{v}(t), u(t)\rangle \\ \langle s(t), v(t)\rangle &= A\langle \dot{u}(t), v(t)\rangle \end{aligned}\right\}$.

Отсюда определяются константы A, B, так что в любом случае вынуждающая функция разделяется контуром на резонансную и нерезонансную часть следующим образом

$$f(t) = 2\delta(t)\left[\frac{\langle s(t), v(t)\rangle}{\langle \dot{u}(t), v(t)\rangle}\dot{u}(t) + \right. \\ \left. + \frac{\langle s(t), u(t)\rangle}{\langle u(t), \dot{v}(t)\rangle}\dot{v}(t) + g(t)\right]. \tag{16}$$

Первые два слагаемых в квадратных скобках дают резонансную часть соответствующего множителя $s(t)$ вынуждающей силы $f(t)$.

Для того, чтобы отличить резонансные колебания от нерезонансных, представим функцию затухания в виде

$$\delta(t) = \delta_0\delta_1(t) \tag{17}$$

где δ_0 — константа, равная среднему значению функции $\delta(t)$, $\delta_1(t)$ — зависимая от времени функция со средним значением равным единице.

Тогда при резонансе имеем из (10)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \rho(t)x = 2\delta_0\delta_1(t)\left[A\dot{u} + B\dot{v} - \frac{dx}{dt}\right], \tag{18}$$

выражение в квадратных скобках равно нулю. Здесь $f(t) = 2\delta_0\delta_1(t)(A\dot{u} + B\dot{v})$. Если изменять δ_0 так, чтобы $f(t)$ при этом не изменялось, то выражение в квадратных скобках нужно представить в виде $\dfrac{A\dot{u} + B\dot{v}}{\delta_0} - \dfrac{dx}{dt} = 0$, отсюда

$$x = \frac{Au + Bv}{\delta_0}. \tag{19}$$

Это резонансные колебания. Именно, имеем резонанс первой степени (поскольку δ_0 входит в знаменатель в первой степени), как и обычный резонанс. Если δ_0 изменять так, чтобы и вынуждающая сила изменялась пропорционально $f(t) \sim \delta_0$, то выражение в квадратных скобках имеет такой же вид, как и в (18) $A\ddot{u} + B\dot{v} - \frac{dx}{dt} = 0$. Тогда $x = Au + Bv$, и резонансные колебания не зависят от δ_0, что и следовало ожидать, так как одновременно возрастают в δ_0 раз функция диссипации и компенсирующая ее функция. В случае нерезонанса выражение в квадратных скобках не может быть тождественно равным нулю.

В нерезонансном случае вместо однородного уравнения (18) имеем неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta_0\delta_1(t)\frac{dx}{dt} + \rho(t)x = f(t), \qquad (20)$$

Здесь $f(t)$ — нерезонансное значение вынуждающей силы. В этом случае имеем сложную зависимость решения $x(t)$ от δ_0. Однако, качественными методами можно показать, что при $\delta_0 \ll \rho_{\text{ср}}$, где $\rho_{\text{ср}}$ — среднее значение $\rho(t)$, решение $x(t)$ практически не зависит от δ_0. При рассмотрении резонансных явлений этот случай имеет главное значение, поскольку резонансные явления проявляются тем сильнее, чем меньше δ_0. В нерезонансном случае $x(t)$ не является решением уравнения Хилла (8). Если же пропорционально изменять в δ_0 раз и второй член, и правую часть (20), то и решение изменится в δ_0 раз. Нерезонансный случай существенно отличается от резонансного.

На рис. 2 представлен приближенный график качественного характера резонансного отклика. По оси абсцисс отложена текущая частота, по оси ординат — действующее значение составляющих спектра (синусоид) при конкретных значениях текущей частоты. Конфигурация спектра резонансного отклика для данного контура остается одной и той же при любом возмущении.

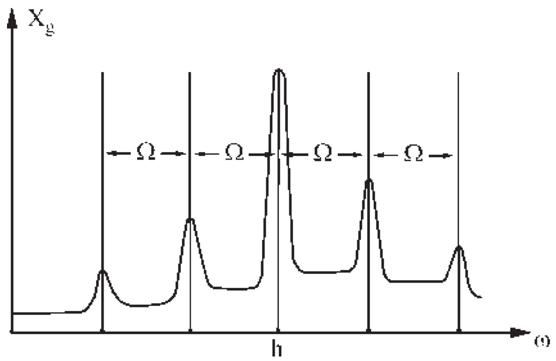

Рис. 2. График качественного характера резонансного отклика

Заключение: Параметрический контур с периодически изменяющейся диссипацией является среди параметрических контуров ближайшим аналогом обычного колебательного контура. Резонансные свойства такого параметрического контура в классе функций Хилла аналогичны резонансным свойствам обычного контура в классе синусоидальных функций времени. Примечательной особенностью рассмотренного параметрического контура является то обстоятельство, что его базовое уравнение устойчиво. Весьма сложная задача исследования устойчивости по Ляпунову здесь не возникает. Применяется описанный здесь резонанс в суперрегенеративном радиоприеме, который используется в некоторых ведомственных видах радиосвязи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горелик Г.* Резонансные явления в резонансных системах с периодически меняющимися параметрами // Журнал технической физики. 1934. Т. 4. Вып. 10. С. 1783—1817. 1935. Т. 5. Вып. 2 С. 196—215. 1935. Т. 5. вып. 3. С. 490—517.

2. *Бирюк Н.Д.* Наглядные представления резонанса линейного колебательного контура с периодическими параметрами // Элементы приемо-передающих устройств. Таганрог: 1984. вып. 2. С. 97—98.

3. *Бирюк Н.Д., Дамгов В.Н.* Геометрический смысл резонанса линейного контура с периодическими параметрами // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1985. Т. 28. № 1. С. 48—53.

4. *Бирюк Н.Д., Дамгов В.Н.* Резонансы первой и второй степени линейного колебательного контура с периодическими параметрами // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1987. Т. 30. № 1. С. 95—96.

5. *Бирюк Н.Д.* резонанс первой степени параметрического контура // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. №1. 2001 г. С. 5—10.

6. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953. —476 с.