ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 2

УДК 517.937:517.983.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2002 А. Г. Баскаков, М. К. Чернышов

Воронежский государственный университет

Изучается неоднородное линейное дифференциальное уравнение с упорядоченной парой операторов, действующих из одного банахова пространства в другое, и с необратимым оператором при производной. Вводится понятие расщепления данного уравнения и обобщенного ограниченного на оси решения. Получены достаточные условия существования и единственности этого решения.

§ 1. Вспомогательные результаты

Ведется построение ограниченных непрерывных решений неоднородного линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) вида

$$F\dot{x}(t) = Gx(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где линейные замкнутые операторы $F : D(F) \subset X \to Y$, $G : D(G) \subset X \to Y$ действуют из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y, $KerF \neq \{0\}$ и $f : \mathbb{R} \to Y$ — ограниченная вектор-функция.

Понятие сильного (ограниченного непрерывного) решения или обобщенного решения (mild solution) уравнения (1.1) дается здесь лишь после преобразований (1.1) в эквивалентную расщепленную систему (более подробно см. определение 1.5 и теорему 1.5)

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = (F_0^{-1}G_0)x_0(t) + F_0^{-1}f_0(t), \\ (G_\infty^{-1}F_\infty)\dot{x}_\infty(t) = x_\infty(t) + G_\infty^{-1}f_\infty(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

во взаимно дополнительных подпространствах. Такой не совсем обычный подход к определению решения вызван тем, что часть компонентов *сильного* решения, отвечающая бесконечно удаленной точке (не являющейся, вообще говоря, изолированной) из расширенного спектра пары (G, F), будет получена с использованием конечной *гладкости* f_∞ по временной переменной, другая же часть компонентов *обобщенного* решения вместе с соответствующими компонентами f_0 должны подчиняться более слабым дополнительным ограничениям, связанным лишь с их принадлежностью функциональному пространству, снабженному нормой типа нормы графика оператора.

Вначале дадим сводку общих понятий необходимых для формулировок основных результатов. С этой целью обратимся к работам [1, 2], в которых велось построение фазового пространства решений задачи Коши $x(0) = x_0 \in X$ для соответствующего однородного ЛДУ

$$F\dot{x}(t) = Gx(t),\ t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \tag{1.3}$$

а также к работам [3, 4, 5], где изучались линейные отношения и их теория применялась к однородным дифференциальным уравнениям вида (1.3).

Замыкание множества всевозможных начальных векторов из X, для которых существует решение уравнения (1.1), назовем *фазовым пространством* и обозначим через $\Phi(G, F)$.

Будем считать, что области определения $D(F), D(G)$ операторов $F : D(F) \subset X \to Y$, $G : D(G) \subset X \to Y$ удовлетворяют одному из следующих условий:

(i) $D(F) = X,\ D(G) \neq X$;

(ii) $D(F) \neq X,\ D(G) = X$;

(iii) $D(F) = X,\ D(G) = X$.

Через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G, F)$ обозначим подпространство $D(F) \cap D(G)$ и назовем его *областью определения* упорядоченной пары операторов (G, F).

Используя основные понятия теории линейных отношений из [5], введем в рассмотрение линейные отношения $\mathcal{A}_l = F^{-1}G \subset X \times X$,

$\mathcal{A}_r = GF^{-1} \subset Y \times Y$, возникающие здесь естественным образом, и назовем их соответственно *левым и правым отношением* для упорядоченной пары (G, F). Тогда отношения $\mathcal{A}_l^{-1} = G^{-1}F \subset X \times X$, $\mathcal{A}_r^{-1} = FG^{-1} \subset Y \times Y$ назовем *обратными* к $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_r$ соответственно.

Как и в [5], множество замкнутых линейных отношений из $X \times Y$ обозначим через $LR(X, Y)$; если же $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X, X)$. При этом множество $LO(X, Y)$ линейных замкнутых операторов, действующих из X в Y, считается включенным (при отождествлении с их графиком) в $LR(X, Y)$. Таким образом, $LR(X, Y)$ содержит банахово пространство $Hom(X, Y)$ линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y. Если $X = Y$, то $LO(X) = LO(X, X)$ и $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Таким образом, $EndX \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Символ I используется ниже для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространств.

Определение 1.1. К *резольвентному множеству* $\rho(G, F)$ упорядоченной пары операторов (G, F) отнесем все числа $\lambda \neq 0$ из $\mathbb{C}$, для которых оператор $G - \lambda F : \mathcal{D} \subset X \to Y$ непрерывно обратим, а также точку $\lambda = 0$, если $G : \mathcal{D} \to Y$ — непрерывно обратимый оператор и $D(F) = X$. Множество $\sigma(G, F) = \mathbb{C} \setminus \rho(G, F)$ назовем *спектром* этой пары. Операторнозначную функцию $R(\cdot; G, F) : \rho(G, F) \subset \mathbb{C} \to Hom(Y, X)$,

$$R(\lambda; G, F) = (G - \lambda F)^{-1}, \lambda \in \rho(G, F)$$

назовем *резольвентой* упорядоченной пары (G, F). Она определена на открытом множестве $\rho(G, F)$ и аналитична на нем.

Замечание 1.1. Если условие $0 \in \rho(G, F)$ понимать лишь формально как непрерывную обратимость оператора G, то в случае (ii) точка 0 является изолированной в $\rho(G, F)$, и значит, множество $\rho(G, F)$ не является открытым.

Определение 1.2. Подмножество $\widetilde{\sigma}(G, F)$ из $\widetilde{\mathbb{C}}$, совпадающее с $\sigma(G, F)$, когда функция $R(\cdot; G, F)$ допускает аналитическое расширение в точку ∞, причем $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda; G, F) = 0$, и $\widetilde{\sigma}(G, F) = \sigma(G, F) \cup \{\infty\}$ в противном случае, назовем *расширенным спектром* упорядоченной пары (G, F). Множество $\widetilde{\rho}(G, F) = \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\sigma}(G, F)$ назовем *расширенным резольвентным множеством* пары (G, F).

Для левого $\mathcal{A}_l$ и правого $\mathcal{A}_r$ отношений, построенных по упорядоченной паре (G, F), верны следующие представления:

$$D(\mathcal{A}_l) = G^{-1}(Im\, F),\ Im\mathcal{A}_l = F^{-1}(Im\, G), \quad (1.4)$$

$$D(\mathcal{A}_r) = F(D(G)),\ Im\mathcal{A}_r = G(D(F)), \quad (1.5)$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}_l) = (G - \lambda F)^{-1} F,\ \lambda \in \rho(G, F), \quad (1.6)$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}_r) = F(G - \lambda F)^{-1},\ \lambda \in \rho(G, F). \quad (1.7)$$

При этом формула (1.6) справедлива лишь тогда, когда $D(G), D(F)$ удовлетворяют одному из условий (i) или (iii).

Если же выполнено условие (ii), то формула (1.6) неверна, так как $D(F) \neq X$. В этом случае к $G^{-1}F$ можно применить формулу

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1} I - \lambda^{-2} (\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1} I)^{-1}$$

при $0 \neq \lambda \in \rho(G, F)$, в результате придем к соотношению

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mathcal{A}_l) &= -\lambda^{-1} I - \lambda^{-2} (G^{-1}F - \lambda^{-1} I)^{-1} = \\ &= -\lambda^{-1}(I - (G - \lambda F)^{-1} G). \end{aligned} \quad (1.8)_l$$

Из представлений (1.6)—(1.8) следует, что если $\infty \in \widetilde{\rho}(G, F)$, то $\infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$, и значит, $\mathcal{A}_l \in EndX, \mathcal{A}_r \in EndY$. Таким образом, справедлива

Лемма 1.1. *Имеют место включения*

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(G, F) &\subset \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_r), \\ \widetilde{\sigma}(G, F) &\supset \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уточнением леммы 1.1 служит (см. [5])

Теорема 1.1. *Для упорядоченной пары операторов (G, F) имеют место следующие свойства:*

1) $\widetilde{\sigma}(G, F) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$;
2) $\widetilde{\sigma}(G, F) \setminus \{0, \infty\} = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) \setminus \{0, \infty\}$;
3) $\widetilde{\sigma}(G, F) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$, *если* $\mathcal{D} = X$;
4) $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \Leftrightarrow G^{-1}F \in EndX$;
5) $0 \in \rho(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow FG^{-1} \in EndY$;
6) $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \cap \rho(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow 0 \in \rho(G, F)$;
7) $\infty \in \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \Leftrightarrow \mathcal{A}_l = F^{-1}G \in EndX$;
8) $\infty \in \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \mathcal{A}_r = GF^{-1} \in EndY$;
9) $\infty \in \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \infty \in \widetilde{\rho}(G, F)$.

Определение 1.3. Резольвенты отношений $\mathcal{A}_l$ и $\mathcal{A}_r$ назовем *левой и правой резольвентами* упорядоченной пары операторов (G, F) и обозначим символами $R_l(\cdot;G,F)$ и $R_r(.;G,F)$ соответственно. Эти функции по определению принимают значения в алгебрах $EndX$ и $EndY$ соответственно.

Всюду в дальнейшем считается выполненным следующее условие *несингулярности* пары (G,F):

Предположение 1.1. Множество $\rho(G,F)\neq\varnothing$.

Определение 1.4. Упорядоченная пара подпространств (X_1,Y_1) называется *инвариантной* для пары операторов (G,F), если

$$X_1\subset X,\, Y_1\subset Y,\, G\mathcal{D}_1\subset Y_1,\, F\mathcal{D}_1\subset Y_1,$$

где $\mathcal{D}_1=X_1\cap\mathcal{D}$.

Определение 1.5. Пусть

$$X=X_0\oplus X_1,\, Y=Y_0\oplus Y_1 \qquad (1.10)$$

— прямые суммы замкнутых подпространств, причем $(X_0,Y_0),(X_1,Y_1)$ — инвариантные пары подпространств для (G,F). Пусть $G_i,F_i:\mathcal{D}\cap X_i=\mathcal{D}_i\to Y_i, i=0,1$ — сужения операторов G,F на X_i, $i=0,1$. Тогда будем использовать запись

$$(G,F)=(G_0,F_0)\oplus(G_1,F_1) \qquad (1.11)$$

и говорить, что упорядоченная пара операторов (G,F) допускает представление (1.11) относительно разложений (1.10) пространств и является *прямой суммой* пар (G_0,F_0) и (G_1,F_1).

По левому $\mathcal{A}_l$ и правому $\mathcal{A}_r$ отношениям пары (G,F) введем в рассмотрение последовательности линейных подпространств

$$\mathcal{X}_k=\mathcal{A}_l^k 0,\, \mathcal{X}^{(k)}=\mathcal{D}(A_l^k),\, \mathcal{Y}_k=\mathcal{A}_r^k 0,$$
$$\mathcal{Y}^{(k)}=\mathcal{D}(A_r^k),\, k\in\mathbb{N}, \qquad (1.12)$$

которые в терминах образов и прообразов операторов F и G имеют следующее представление:

$$\mathcal{X}_0=\{0\},\mathcal{X}_1=Ker\,F,\ldots,\mathcal{X}_n=F^{-1}(G\mathcal{X}_{n-1}),\ldots$$
$$n\in\mathbb{N},$$
$$\mathcal{X}^{(0)}=X,\,\mathcal{X}^{(1)}=G^{-1}(Im\,F),\ldots,\mathcal{X}^{(n)}=G^{-1}(F\mathcal{X}^{(n-1)}),\ldots$$
$$n\in\mathbb{N},$$
$$\mathcal{Y}_0=\{0\},\,\mathcal{Y}_1=G(Ker\,F),\ldots\,\mathcal{Y}_n=G(F^{-1}\mathcal{Y}_{n-1}),\ldots$$
$$n\in\mathbb{N},$$
$$\mathcal{Y}^{(0)}=Y,\,\mathcal{Y}^{(1)}=F(D(G)),\ldots\,\mathcal{Y}^{(n)}=F(G^{-1}\mathcal{Y}^{(n-1)}),\ldots$$
$$n\in\mathbb{N}.$$

Ясно, что пары $(\mathcal{X}_n,\mathcal{Y}_n),(\mathcal{X}^{(n)},\mathcal{Y}^{(n)})$ подпространств являются инвариантными для пары операторов (G,F).

В условиях следующей теоремы $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, и отмеченные в ней включения являются строгими.

Теорема 1.2. *Если* $Ker\,F\neq\{0\}$, *то для упорядоченной пары* (G,F) *следующие условия эквивалентны:*

1) *точка* ∞ *является полюсом порядка* $m-1$ *резольвенты левого отношения* $\mathcal{A}_l$ *пары* (G,F) *при* $m\geq 2$; ∞ *— ее устранимая особая точка при* $m=1$;

2) *существуют инвариантные пары* $(X_0,Y_0),(X_1,Y_1)$ *подпространств, для которых верны представления* (1.11), (1.12), *причем*

a) $\widetilde{\sigma}(G_0,F_0)=\sigma(G,F),\,\widetilde{\sigma}(G_1,F_1)=\{\infty\}$;

b) $D(G_0)=X_0,\,F_0^{-1}\in Hom(Y_0,X_0)$,
$D(F_1)=X_1,\,G_1^{-1}\in Hom(Y_1,X_1)$;

c) $(G_1^{-1}F_1)^{m-1}\neq 0,\,(G_1^{-1}F_1)^m=0$;

3) *имеет место стабилизация подпространств*: $\mathcal{X}_{m-1}\subset\mathcal{X}_m=\mathcal{X}_{m+1},\,\mathcal{X}^{(m-1)}\supset\mathcal{X}^{(m)}=\mathcal{X}^{(m+1)}$.

Определение 1.6. *Решением* задачи Коши для уравнения (1.3) называется дифференцируемая функция $x:\mathbb{R}_+\to X$ такая, что $x(t)\in\mathcal{D}=D(G)\;\forall t\in\mathbb{R}_+$ и, кроме того, справедливы равенства $x(0)=x_0\in X$ и $F\dot{x}(t)=Gx(t)\;\forall\; t\in\mathbb{R}_+$.

Определение 1.7. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Будем говорить, что m-я степень левой резольвенты пары (G,F) обладает свойством *минимального роста на бесконечности*, если существует последовательность $\{\lambda_n\}\subset\rho(G,F)$ такая, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty;$$
$$2)\ \sup_{n1}\{|\lambda_n^m|\cdot\|(R_l(\lambda_n;G,F))^m\|\}<\infty. \qquad (1.13)$$

Далее будем считать, что выполнено

Предположение 2.l. Пусть m-ая степень левой резольвенты упорядоченной пары (G,F) для некоторого $m\in\mathbb{N}$ обладает свойством минимального роста на бесконечности.

Теорема 1.3. *Если для упорядоченной пары* (G,F) *выполнено одно из условий теоремы* 1.2, *то для нее выполнено и предположение* 2.l.

Далее будем считать, что точка $\infty\in\widetilde{\sigma}(G,F)=\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$, однако не является изолированной. Тогда с помощью последовательности операторов

$$A_{l,n}=I-(-\lambda_n R_l(\lambda_n;G,F))^m\in EndX,\, n\in\mathbb{N} \qquad (1.14)_l$$

введем в рассмотрение замкнутое эргодическое подпространство

$$\widetilde{X}=Erg(X,(A_{l,n}))=\{x\in X\mid\exists\lim_{n\to\infty}A_{l,n}x\}. \qquad (1.15)_l$$

Сопряженное к $\mathcal{A}_l$ отношение имеет вид $\mathcal{A}_l^*=G^*(F^*)^{-1}$, т. е. является правым отношением для пары (G^*, F^*). В условиях следующей теоремы будут использоваться подпространства $(\mathcal{X}^*)_m = (\mathcal{A}_l^*)^m 0 \subset X^*$. Действуя по аналогии с описанием такого типа подпространств в (1.12), приходим к последовательности $(\mathcal{X}^*)_k = (\mathcal{A}_r^*)^k 0,\ k \in \mathbb{N}$, или

$$(\mathcal{X}^*)_0 = \{0\}, (\mathcal{X}^*)_1 = G^*(Ker\, F^*), \ldots,$$
$$(\mathcal{X}^*)_n = G^*((F^*)^{-1}(\mathcal{X}^*)_{n-1}), \ldots,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Имеет место (см. [6])

Теорема 1.4. *Пусть выполнено предположение 2.l. Для того чтобы $\widetilde{X} = X$, необходимо и достаточно, чтобы векторы из подпространства $\mathcal{X}_m = \mathcal{A}_l^m 0 \subset X$ разделяли функционалы из подпространства $(\mathcal{X}^*)_m = (\mathcal{A}_l^*)^m 0 \subset X^*$.*

Следствие 1.1. *В условиях предположения 2.l равенство $\widetilde{X} = X$ имеет место при выполнении одного из следующих условий:*

1) *X —рефлексивное банахово пространство;*

2) *$R(\lambda_0, A_l) \in End X$ — слабо компактный оператор при некотором $\lambda_0 \in \rho(A_l)$;*

3) *$dim \mathcal{X}_m = dim(\mathcal{X}^*)_m < \infty$.*

Предположение 3.l. Существуют такие числа $M > 0, \omega \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с $Re\lambda > \omega$ имеют место оценки

$$\|(R_l(\lambda; G, F))^{mn}\| \le \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^{mn}}\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \qquad (1.16)$$

Построение фазового пространства $\Phi(G, F)$ и вырожденных полугрупп линейных операторов, с помощью которых определяются решения задачи Коши для уравнения (1.3), проводилось в [1, 2] в условиях, когда выполнено предположение 3.l и $dim\, \mathcal{A}_l 0 = dim\, Ker\, F \ge 1$. Из предположения 3.l следует, что выполнено предположение 2.l. Поэтому можно рассматривать эргодическое подпространство $\widetilde{X} = Erg(X, (A_{l,n}))$, построенное по ограниченной последовательности $(A_{l,n}) \in End X$. Она определена формулой (1.14), где (λ_n) — произвольная последовательность из $\mathbb{R}_+ \cap \rho(\mathcal{A})$ со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Предположение 4.l. Справедливо равенство $\widetilde{X} = X$.

Замечание 1.2. Предположения 1.1, 4.l влекут равенство $\widetilde{Y} = Y$.

Следующее утверждение вытекает из [6] и служит конкретизацией формулируемых в ней свойств.

Теорема 1.5. *В условиях предположений 2.l, 4.l пространство X допускает разложение в прямую сумму*

$$X = X_0 \oplus X_\infty \qquad (1.17)$$

двух замкнутых инвариантных для пары операторов (G, F) подпространств X_0, X_∞, причем $X_0 = \overline{Im\, R_l(\,.\,; G, F)^m}$, $X_\infty = Ker\, R_l(\,.\,; G, F)^m$, соответствующее разложение пары (G, F)

$$(G, F) = (G_0, F_0) \oplus (G_\infty, F_\infty) \qquad (1.18)$$

обладает свойствами: $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_{l,\infty}) = \{\infty\}, (\mathcal{A}_{l,\infty}^{-1})^{m-1} \ne 0$, $(A_{l,\infty}^{-1})^m = 0, \mathcal{A}_{l,0} : D(\mathcal{A}_{l,0}) \subset X_0 \to X_0$ — линейный замкнутый оператор со спектром $\sigma(\mathcal{A}_{l,0}) = \sigma(\mathcal{A}_l)$ и с плотной в X_0 областью определения $D(\mathcal{A}_{l,0}^m)$ оператора $\mathcal{A}_{l,0}^m$.

Таким образом, для сужения $\mathcal{A}_{l,0} = \mathcal{A}_l \restriction X_0$ отношения $\mathcal{A}_l$ на X_0 остается выполненным предположение 2.l. Оно позволяет построить на X_0 полугруппу $\{T_0(t); t \ge 0\}$ класса C_0 с генератором $\mathcal{A}_{l,0}$, имеющим в силу теоремы 1.5 плотную в X_0 область определения $D(\mathcal{A}_{l,0})$.

В условиях следующей теоремы считается, что для пары (G, F) выполнено предположение 3.l и условие $KerF \ne \{0\}$, т. е. отношение $\mathcal{A}_l$ не является оператором. Следовательно, для $\mathcal{A}_l$ верно утверждение теоремы 1.5 о разложении (1.10) пространства X и разложении (1.11). В дальнейшем мы сохраним обозначения теоремы 1.5.

Теорема 1.6. *Пусть для линейного отношения $\mathcal{A}_l$ выполнены предположения 2.l, 4.l и $KerF \ne \{0\}$, Тогда справедливы равенства*

$$\Phi(G, F) \cap X = \overline{D(\mathcal{A}_l^m)} = \overline{X^{(m)}} = X_0,$$

и существует единственная вырожденная полугруппа операторов $T(t); t \ge 0\} \subset End X$, генератором которой служит отношение $\mathcal{A}_l$, определяемое равенствами $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{l,0}$ — сужение $\mathcal{A}_l$ на $X_0, D(\mathcal{A}_l) = X_0, \mathcal{A}_l 0 = X_\infty$. Полугруппа $\{T(t); t \ge 0\}$ обладает свойствами:

1) ее сужение $\{T_0(t); t \ge 0\} \subset End X_0$ на X_0 является полугруппой класса C_0, и любое решение $x : \mathbb{R}_+ \to X$ задачи $x(0) = x_0$ для уравнения (1.3) с $x_0 \in D(\mathcal{A}_{l,0}) \subset G^{-1}(ImF)$ имеет вид $x(t) = T_0(t) x_0, t \ge 0$;

2) $T(0)$ — проектор на подпространство X_0 параллельно X_∞.

Все утверждения теоремы 1.6 следуют из теоремы 1.5 с учетом описания подпространств $D(\mathcal{A}_l^m)$, $\mathcal{A}_l^m 0$ (см. формулы (1.12)).

Следствие 1.2. *Если вместо предположения 2.1 для $\mathcal{A}_l$ выполнено условие 3) теоре-*

мы 1.2, *то имеют место все утверждения теоремы* 1.5, *причем* $\mathcal{A}_{l,0} \in EndX_0$.

Замечание 1.3. Аналогичные утверждения имеют место для банахова пространства Y, если использовать правое отношение $\mathcal{A}_r$ и соответствующие условия на $R_r(\,.\,;G,F)$. При этом равенство

$$R(\lambda_0;G,F)(R_r(\,.\,;G,F))^m = (R_l(\,.\,;G,F))^m R(\lambda_0;G,F)$$

справедливое при любом $\lambda_0 \in \rho(G,F)$ позволяет обходиться одной из последовательностей $(1.8)_l$, $(1.8)_r$ и одним из подпространств $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ из $(1.5)_l$ $(1.5)_r$ соответственно.

§ 2. Об ограниченных решениях на оси

В этом параграфе будут получены достаточные условия существования ограниченных на $\mathbb{R}$ решений неоднородного ЛДУ вида

$$F\dot{x}(t) = Gx(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}, \qquad (2.1)$$

где $f:\mathbb{R} \to Y$ — функция, принадлежащая банахову пространству $C_b(\mathbb{R},Y)$ ограниченных функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве Y.

Дальнейшее исследование проводится при выполнении предположений 1.1, 3.1 и 4.1.

Определение 2.1. Систему уравнений вида

$$\begin{cases} F_0\dot{x}_0(t) = G_0x_0(t) + f_0(t), & (2.3_0) \\ F_\infty\dot{x}_\infty(t) = G_\infty x_\infty(t) + f_\infty(t) & (2.3_\infty) \end{cases}$$

назовем *расщеплением* уравнения (2.1).

Будем впредь обозначать через $C_b(\mathbb{R},Z)$ банахово пространство ограниченных функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве Z. Символом $C_{b,F_0}(\mathbb{R},Y_0)$ обозначим банахово пространство функций φ_0 из $C_b(\mathbb{R},Y_0)$, для которых

1) $\varphi_0(t) \in D(F_0^{-1})\ \ \forall t \in \mathbb{R}$,

2) $x_0 = F_0^{-1}\varphi_0 \in C_b(\mathbb{R},X_0)$,

и с нормой

$$\|\varphi_0\|_* = \sup_{t\in R}\|\varphi_0(t)\|_{Y_0} + \sup_{t\in R}\|x_0(t)\|_{X_0}.$$

Далее обозначим через $\mathbb{T} = \{\lambda \in C : |\lambda| = 1\}$ множество точек, лежащих на единичной окружности, через P_0, P_∞ проекторы на X_0, X_∞ соответственно, осуществляющие прямое указанное в теореме 1.5 разложение пространства X, а через Q_0, Q_∞ проекторы на Y_0, Y_∞ соответственно, осуществляющие прямое разложение пространства Y.

Определение 2.2. Обобщенным ограниченным решением уравнения (2.3_0) назовем функцию $x_0 \in C_b(\mathbb{R},X)$, являющуюся обобщенным решением уравнения

$$\dot{x}_0(t) = \mathcal{A}_{l,0}x_0(t) + g_0(t),$$
$$g_0 = F^{-1}f_0 \in C_{b,F_0}(\mathbb{R},X_0),$$

т. е. для всех $s \le t$ представимую в виде

$$x_0(t) = \mathcal{U}_0(t-s)x_0(s) - \int_s^t \mathcal{U}_0(t-\tau)g_0(\tau)d\tau,$$

где $\mathcal{U}_0 : \mathbb{R} \to EndX_0$ — полугруппа с генератором $\mathcal{A}_{l,0}$.

Замечание 2.1. При отсутствии в системе (2.3) второго уравнения вопросам обратимости оператора $\mathcal{L} = \dfrac{d}{dt} - \mathcal{A}$ посвящены работы [8, 9].

Далее наряду с $C_{b,F_0}(\mathbb{R},Y_0)$ введем в рассмотрение банахово пространство $C^{m-1}_{b,G_\infty}(\mathbb{R},Y_\infty)$ функций $\varphi_\infty : \mathbb{R} \to Y_\infty$ таких, что их обобщенные производные обладают следующими свойствами (в них принадлежность подпространствам понимается в смысле равенства распределений):

1) $\varphi_\infty^{(r)}(t) \in D((G_\infty^{-1}F_\infty)^i G_\infty^{-1})$ при всех $t \in \mathbb{R}$, всех $i = 0,1,\dots,m-1$ и всех $r \le i$;

2) $(G_\infty^{-1}F_\infty)^i G_\infty^{-1}\varphi_\infty^{(i)}(t) \in C_b(\mathbb{R},Y_\infty)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $i = 0,1,\dots,m-1$.

Формулой для $\varphi_\infty \in C^{m-1}_{b,G_\infty}(\mathbb{R},Y_\infty)$

$$\|\varphi_\infty\|_* = \sup_{t\in R}\|\varphi_\infty(t)\|_{Y_\infty} + \sup_{t\in R}\sum_{i=0}^{m-1}\left\|(\mathcal{A}_{l,\infty}^{-1})^i G_\infty^{-1}\varphi_\infty^{(i)}(t)\right\|_{X_\infty}$$

зададим норму в этом пространстве.

Определение 2.3. Ограниченным решением уравнения (2.3_∞) назовем функцию $x_\infty \in C_b(\mathbb{R},X_\infty)$, являющуюся *классическим* решением этого уравнения, т. е. x_∞ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению (2.3_∞).

Определение 2.4. Ограниченным решением системы (2.3_0), (2.3_∞) назовем пару функций $x_0 : \mathbb{R} \to X_0$, $x_\infty : \mathbb{R} \to X_\infty$, где x_0 — обобщенное ограниченное решение уравнения (2.3_0), x_∞ — ограниченное решение уравнения (2.3_∞).

Определение 2.5. Ограниченным решением уравнения (2.1) назовем функцию $x \in C_b(\mathbb{R},X)$ такую, что компоненты пары $x_0(t) = P_0x(t)$, $x_\infty(t) = P_\infty x(t)$ являются обобщенными ограниченными решениями уравнений (2.3_0) и (2.3_∞) соответственно.

Основным результатом заметки является

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения* 1.1, 3.l, 4.l *и пусть* $\sigma(\mathcal{U}_0(1)) \cap T = \varnothing$ *(в частности,* $\sigma(G, F) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$ *). Тогда для любой функции* $f \in C_b(\mathbb{R}, Y)$ *со свойствами:* $Q_0 f \in C_{b,F_0}(\mathbb{R}, Y_0)$, $Q_\infty f \in C^{m-1}_{b,G_\infty}(\mathbb{R}, Y_\infty)$, *уравнение* (2.1) *имеет единственное обобщенное ограниченное решение.*

Обозначим через $G_0 : \mathbb{R} \to X_0$ функцию Грина для однородного уравнения $\dfrac{dx}{dt} = \mathcal{A}_{l,0} x$, обладающего экспоненциальной дихотомией (более подробно см. [7]). Это означает, что после применения эргодической теоремы и расщепления эргодического подпространства, совпадающего с исходным пространством, получены прямые разложения подпространства X_0 вида

$$X_0 = X_{0,0} \oplus X_{0,1}$$

двух замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A}_{l,0}$ подпространств $X_{0,0}$, $X_{0,1}$, причем $X_{0,0} = P_{0,0} X_0$, $X_{0,1} = Im(I - P_{0,0})$, где $P_{0,0} = P_{0,0}(\sigma_0, \mathcal{U}_0(1))$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ для оператора $\mathcal{U}_0(1)$.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *обобщенное ограниченное решение уравнения* (2.1) *определяется формулой* $x(t) = x_0(t) + x_\infty(t)$, *где*

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_0(t-s) F_0^{-1} Q_0 f(s) ds,$$

$$x_\infty(t) = -\sum_{i=0}^{m-1} (\mathcal{A}_{l,\infty}^{-1})^i G_\infty^{-1} Q_\infty f^{(i)}(t).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Упорядоченные пары операторов и полугруппы // Изв. РАЕН. МММИУ. 1998. Т. 2. 3. С. 39—69.

2. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Построение фазового пространства и решений линейных уравнений, не разрешенных относительно производной // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 3. С. 295—298.

3. *Cross R.* Multivalued linear operators. N-Y: M. Dekker, 1998.

4. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks / 215. N-Y: M. Dekker, 1998.

5. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сборник, 2002, № 11, С. 3—42.

6. *Баскаков А.Г.* Операторные эргодические теоремы и дополняемость подпространств банаховых пространств // Изв. вузов, сер. матем. 1988. Т. 11(318). С. 3—11.

7. Баскаков А.Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его приложения. 1996. Т. 30. Вып. 3. С. 1—11.

8. *Чернышов М.К.* О спектральных свойствах абстрактных параболических операторов // Сб. работ студентов и аспирантов ф-та ПММ ВГУ. 1997. Вып. 1. С. 88—101.

9. *Чернышов М.К.* Об обратимости линейных дифференциальных операторов первого порядка // Матем. заметки, 1998. Т. 64. № 5. С. 796—800.