УДК 517.9

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КАУЗАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2002 А. Г. Баскаков, И. А. Криштал

Воронежский государственный университет

В настоящей работе с помощью представлений локально компактных абелевых групп вводится понятие каузальных (причинных) операторов и изучаются их спектральные свойства. Результаты данной статьи тесно связаны с теорией каузальных операторов, излагаемой в монографиях [1, 2]. Отметим также монографию [3], где излагается теория каузальных операторов в гильбертовом пространстве, и монографию [4], где каузальные операторы рассматриваются в связи с разрешимостью функционально-дифференциальных уравнений на конечном промежутке.

Пусть X_1, X_2 — комплексные банаховы пространства, $Hom(X_1, X_2)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на X_1 со значениями в X_2, $EndX = Hom(X, X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X. Пусть $\mathbb{G}$ — локально компактная абелева группа и $\widehat{\mathbb{G}}$ — двойственная к ней группа непрерывных унитарных характеров группы $\mathbb{G}$ (форма записи операции на группах — аддитивная). Символом $L_1(\mathbb{G})$ обозначим банахову алгебру (классов эквивалентности) комплексных суммируемых (относительно меры Хаара) функций со сверткой функций в качестве умножения, $\hat{f}: \widehat{\mathbb{G}} \to \mathbb{C}$ — преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{G})$.

Считается, что каждое рассматриваемое здесь (комплексное) банахово пространство X является (банаховым) $L_1(\mathbb{G})$-модулем, модульная структура которого невырождена и ассоциирована с некоторым изометрическим (не обязательно сильно непрерывным) представлением $T: \mathbb{G} \to EndX$. Это означает выполнение следующих двух условий: 1) из равенства $fx = 0$ для всех $f \in L_1(\mathbb{G})$ следует, что вектор $x \in X$ нулевой, 2) для любых $g \in \mathbb{G}$, $f \in L_1(\mathbb{G})$ и $x \in X$ имеют место равенства $T(g)(fx) = (S(g)f)x = f(T(g)x)$, где $S(g)$ — оператор сдвига на $g \in \mathbb{G}$ функций из $L_1(\mathbb{G})$. Отметим, что ассоциированное представление T единственно. Модуль X часто будет обозначаться через (X, T), а оператор $x \mapsto fx : X \to X$, $f \in L_1(\mathbb{G})$, — через $T(f)$.

Вектор $x \in (X, T)$ назовем *T-непрерывным*, если функция $\varphi: \mathbb{G} \to X$ вида $\varphi(g) = T(g)x$, $g \in \mathbb{G}$, непрерывна. Совокупность T-непрерывных векторов из $L_1(\mathbb{G})$-модуля (X, T) обозначим символом $(X, T)_c$ (или, короче X_c, если ясен выбор представления). Отметим, что $(X, T)_c$ — замкнутый подмодуль из X.

Лемма 1. Если x принадлежит (банахову) $L_1(\mathbb{G})$-модулю $(X, T)_c$, то

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{G}} f(g)T(-g)x dg, \ f \in L_1(\mathbb{G}), x \in X. \quad (1)$$

Определение 1. [5, 7] *Спектром Берлинга* вектора x из $L_1(\mathbb{G})$-модуля (X, T) называется подмножество из $\widehat{\mathbb{G}}$ вида

$$\Lambda(x) = \Lambda(x, T) = \{\gamma \in \widehat{\mathbb{G}} : fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L_1(\mathbb{G}) \text{ с } \hat{f}(\gamma) \neq 0\}.$$

Лемма 2. [6, 7] Для векторов из $L_1(\mathbb{G})$-модуля (X, T) имеют место следующие свойства спектра Берлинга:

1) $\Lambda(x)$ замкнуто и $\Lambda(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\Lambda(Ax + By) \subset \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$ для всех $x, y \in X$ и любых операторов $A, B \in EndX$, перестановочных с операторами $T(f)x = fx$, $x \in X$, $f \in L_1(\mathbb{G})$, из $EndX$;

3) $fx = 0$, если $\mathrm{supp}\hat{f} \cap \Lambda(x) = \varnothing$ и $fx = x$, если $\hat{f} = 1$ в некоторой окрестности компактного множества $\Lambda(x)$; 4) $\lim f_\alpha x = x$ для всех $x \in X_c$ и для любой ограниченной аппроксимативной единицы (f_α) из алгебры $L_1(\mathbb{G})$.

Рассмотрим несколько примеров банаховых модулей.

Пример 1. Пусть H — (комплексное) гильбертово пространство, и на σ-алгебре Σ бо-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 01-01-00408.

релевских подмножеств из группы $\widehat{\mathbb{G}}$ задана ограниченная проекторнозначная мера $E:\Sigma\to EndH$. Тогда формула

$$T(g)x=\int_{\widehat{\mathbb{G}}}(\gamma,g)dE(\gamma)x,\ x\in H, \tag{2}$$

определяет сильно непрерывное изометрическое представление $T:\mathbb{G}\to EndH$, а формула (1) — структуру $L_1(\mathbb{G})$-модуля на H. В данном случае она имеет вид

$$T(f)x=fx=\int_{\widehat{\mathbb{G}}}\hat{f}(\gamma)dE(\gamma)x,\ x\in H, \tag{3}$$

где $f\in L_1(\mathbb{G})$ и $\hat{f}\in L_1(\widehat{\mathbb{G}})$. Из (3) следует, что множество $\Lambda(x)=\Lambda(x,T)$ совпадает с носителем функции $\gamma\mapsto E(\gamma)x:\widehat{\mathbb{G}}\to H$.

Пример 2. Пусть Δ — измеримое подмножество из $\mathbb{G}$ ненулевой меры, и $L_p(\Delta,Y)$, $p\in[1,\infty]$ — банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых со степенью p измеримых (по Бохнеру) векторных функций (существенно ограниченных при $p=\infty$), определенных на группе $\mathbb{G}$ со значениями в банаховом пространстве Y с нормой $\|x\|_p=\left(\int\|x(g)\|^p\,dg\right)^{1/p}$, $p\in[1,\infty)$, $\|x\|_\infty=\operatorname*{vraisup}_{g\in\mathbb{G}}\|x(g)\|$ для $x\in L_\infty(\Delta,Y)$. Структура $L_1(\widehat{\mathbb{G}})$-модуля на $L_p(\Delta,Y)$ определяется формулой

$$(V(f)x)(g)=(fx)(g)=\hat{f}(g)x(g),$$
$$f\in L_1(\widehat{\mathbb{G}}),\ x\in L_p(\Delta,Y),\ g\in\mathbb{G}$$

(при каноническом отождествлении $\widehat{\widehat{\mathbb{G}}}$ и $\mathbb{G}$). В этом случае ассоциированное представление $V:\widehat{\mathbb{G}}\to End\,L_p(\Delta,Y)$ имеет вид $(V(\gamma)x)(g)=\gamma(g)x(g)$, $g\in\mathbb{G}$, $\gamma\in\widehat{\mathbb{G}}$. Спектр Берлинга $\Lambda(x,V)$ функции $x\in L_p(\Delta,Y)$ совпадает с ее (существенным) носителем $\operatorname{supp}x$.

Пример 3. Пусть $\Delta=\mathbb{G}$. Тогда банахово пространство $L_p=L_p(\mathbb{G},Y)$, $p\in[1,\infty]$, наделяется с помощью формулы

$$(S(f)x)(g)=(f*x)(g)=\int_G f(s)x(g-s)ds,$$
$$g\in\mathbb{G},\ f\in L_1(\mathbb{G}),\ x\in L_p$$

структурой $L_1(\mathbb{G})$-модуля, ассоциированной с представлением $S:\mathbb{G}\to EndL_p$, $(S(g)x)(s)=x(s+g)$, $s,g\in\mathbb{G}$, $x\in L_p$, т.е. группой сдвигов функций. Той же формулой (с помощью свертки) наделяется структурой (банахова) $L_1(\mathbb{G})$-модуля банахово пространство $C_b(\mathbb{G},Y)$ непрерывных функций из пространства $L_\infty(\mathbb{G},Y)$. Если $x\in L_p(\mathbb{R}^n,Y)$, $p\in[1,\infty]$, то $\Lambda(x,S)$ совпадает с носителем ее преобразования Фурье (при рассмотрении x в качестве обобщенной функции умеренного роста).

Пример 4. Пусть $T_i:\mathbb{G}\to EndX_i$, $i=1,2$ — два сильно непрерывных изометрических представления. В пространстве $Hom(X_1,X_2)$ рассмотрим непрерывное в сильной операторной топологии изометрическое представление $T_0:\mathbb{G}\to EndHom(X_1,X_2)$ вида

$$T_0(g)A=T_2(g)AT_1(-g),\ g\in\mathbb{G},\ A\in Hom(X_1,X_2).$$

По этому представлению с помощью формулы (1) на банаховом пространстве $Hom(X_1,X_2)$ вводится структура $L_1(\mathbb{G})$-модуля. В дальнейшем мы часто обозначаем этот модуль символом $\mathfrak{U}$.

На $Hom(X_1,X_2)$ с помощью формулы (1) и представления $\tilde{T}:\mathbb{G}\times\mathbb{G}\to EndHom(X_1,X_2)$, определенного равенствами

$$\tilde{T}(g_1,g_2)A=T_2(g)AT_1(g_1),$$
$$g_1,g_2\in\mathbb{G},\ A\in Hom(X_1,X_2),$$

вводится также структура банахова $L_1(\mathbb{G}\times\mathbb{G})$-модуля.

В следующей теореме используются обозначения из примера 4.

Теорема 1. Спектр Берлинга $\Lambda(A,T_0)$ любого линейного оператора $A\in Hom(X_1,X_2)$ представим в виде

$$\Lambda(A,T_0)=\overline{\{\gamma_2-\gamma_1:(\gamma_1,\gamma_2)\in\Lambda(A,\tilde{T})\}}.$$

Следствие 1. Для любых $x\in X_1$ и $A\in\mathfrak{U}$ имеет место включение

$$\Lambda(Ax,T_2)\subseteq\overline{\Lambda(A,T_0)+\Lambda(x,T_1)}.$$

В условиях этого следствия и в дальнейшем символ $\sigma_1+\sigma_2$, где σ_1,σ_2 — некоторые множества, обозначает множество $\{\gamma_1+\gamma_2;\gamma_1\in\sigma_1,\gamma_2\in\sigma_2\}$.

Пусть (X,T) — банахов $L_1(\mathbb{G})$-модуль и σ — замкнутое подмножество из $\widehat{\mathbb{G}}$. Тогда множество

$$X(\sigma)=\{x\in X:\Lambda(x)\subseteq\sigma\},$$

являющееся замкнутым подмодулем из X, называется *спектральным подмодулем* или *подпространством* (см. [6, 7]).

Определение 2. Пусть (X_i,T_i), $i=1,2$ — банаховы $L_1(\mathbb{G})$-модули из примера 4 и $\mathbb{S}\subset\widehat{\mathbb{G}}$ — замкнутая полугруппа, такая что 0 лежит в замыкании внутренности $\operatorname{Int}\mathbb{S}$ полугруппы $\mathbb{S}$.

Линейный оператор $A \in \mathfrak{U}$ назовем *каузальным* (или *причинным*) относительно полугруппы $\mathbb{S}$ (и представления T_0), если для любого x из X_1 имеет место включение

$$\Lambda(Ax, T_2) \subseteq \Lambda(x, T_1) + \mathbb{S}.$$

Множество $\Lambda(A, T_0) \setminus \{0\} \subseteq \widehat{\mathbb{G}}$ назовем *памятью* линейного оператора $A \in \mathfrak{U}$ (ср. [1, 2]). Из теоремы 1 и ее следствия получаем, что линейный оператор $A \in \mathfrak{U}$ каузален относительно полугруппы $\mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда его память содержится в $\mathbb{S}$. Таким образом, множество каузальных относительно $\mathbb{S}$ операторов из $\mathfrak{U}$ совпадает со спектральным подмодулем $\mathfrak{U}(\mathbb{S})$, который мы обозначим символом $\mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$. Кроме того, если $X_1 = X_2 = X$ и $T_1 = T_2 = T$, то $\mathfrak{Caus}(X, X)$ образует замкнутую (в сильной операторной топологии) подалгебру из $(EndX, T_0)$, которую будем обозначать одним из символов $\mathfrak{Caus}(X, T_0)$ или $\mathfrak{Caus}(X)$.

Если $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, или $\mathbb{G} = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, то в качестве полугруппы $\mathbb{S} \subset \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{S} \subset \mathbb{Z} = \widehat{\mathbb{T}}$) обычно выступают множества $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$. Из теоремы 1 следует, что для $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ каузальность оператора $A \in \mathfrak{U}$ относительнно $\mathbb{R}_+$ эквивалентна выполнению включений $AX_1([t, \infty)) \subseteq X_2([t, \infty))$, $t \in \mathbb{R}$. В частности, если $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ в примере 1, то для $A \in EndH$ указанные включения имеют место, если $P_t A = AP_t$, $t \in \mathbb{R}$, где $P_t = E([t, \infty))$. Из отмеченного следует, что введенное нами определение каузального оператора обобщает соответствующие определения из [1—4].

Пример 5. Пусть $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ и $\Delta \subseteq \mathbb{Z}$. Рассмотрим банахову алгебру $Endl_p$, где $l_p = l_p(\Delta) = L_p(\Delta, \mathbb{C})$, $p \in [1, \infty)$ — банахово пространство комплексных последовательностей, определенных на множестве Δ. Рассмотрим представление $T = V : \mathbb{T} \to Endl_p$ из примера 2 и соответствующие представления $\tilde{T} : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to End(Endl_p)$, $T_0 : \mathbb{T} \to End(Endl_p)$ из примера 4. Тогда для любого оператора $A \in Endl_p$ множество $\Lambda(A, \tilde{T})$ совпадает с множеством $\{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a_{ij} \neq 0\}$, где $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $i, j \in \Delta$ — матрица оператора A относительно стандартного базиса в l_p, а множество $\Lambda(A, T_0)$ состоит из тех $k \in \Delta - \Delta$, для которых существуют $i, j \in \Delta$ такие, что $i - j = k$ и $a_{ij} \neq 0$. Таким образом, оператор A каузален относительно $\mathbb{Z}_+$ тогда и только тогда, когда его матрица $\mathcal{A} = (a_{ij})$ нижнетреугольна, т.е. $a_{ij} = 0$ для всех $j > i$.

Пусть $\gamma_0 \in \widehat{\mathbb{G}}$. Ограниченную направленность (f_α) из алгебры $L_1(\mathbb{G})$ назовем γ_0*-направленностью*, если $\hat{f}_\alpha(\gamma_0) = 1$ для всех α и $\lim_\alpha f_\alpha * f = 0$ для всех $f \in L_1(\mathbb{G})$ с $\hat{f}(\gamma_0) = 0$. В частности 0-направленностью является любой инвариантный интеграл на $\mathbb{G}$, т.е. направленность (f_α) из $L_1(\mathbb{G})$ со свойствами: 1) $\hat{f}_\alpha(0) = 1$ для всех α и 2) $\lim_\alpha \int_G |f_\alpha(g + u) - f_\alpha(g)| dg = 0$ для любого $u \in \mathbb{G}$.

Точку $\gamma_0 \in \Lambda(x, T) \subseteq \widehat{\mathbb{G}}$ назовем *эргодической* для вектора x из $L_1(\mathbb{G})$-модуля (X, T), если существует $\lim_\alpha f_\alpha x$ для некоторой γ_0-направленности (f_α). Отметим, что предел $x_0 = \lim_\alpha f_\alpha x$ не зависит от выбора конкретной γ_0-направленности. Множество эргодических точек будем обозначать символом $\Lambda_{erg}(x, T)$. Если $x_0 = 0$, то точку γ_0 назовем точкой *непрерывного спектра* Берлинга вектора x. Если $x_0 \neq 0$, то он является собственным вектором модуля X, т.е. $T(g)x_0 = \gamma_0(g)x_0$, $g \in \mathbb{G}$, и, в частности, $fx_0 = \hat{f}(\gamma_0)x_0$, $f \in L_1(\mathbb{G})$, откуда $\Lambda(x_0) = \{\gamma_0\}$. В этом случае характер γ_0 назовем *собственным характером*, а их совокупность назовем *спектром Бора* вектора x и обозначим $\Lambda_B(x, T)$.

Отметим, что вектор y_0 из $L_1(\mathbb{G})$-модуля (X, T) имеет одноточечный спектр Берлинга тогда и только тогда, когда y_0 — собственный вектор, и тогда $\Lambda(y_0, T) = \Lambda_B(y_0, T)$.

Лемма 3. Если $\gamma_0 \in \widehat{\mathbb{G}}$ — эргодическая точка вектора $x \in (X, T)$, и $x_0 = \lim_\alpha f_\alpha x$, где (f_α) — некоторая γ_0-направленность из $L_1(\mathbb{G})$, то вектор $x - x_0$ является пределом некоторой последовательности x_n векторов из X со свойством $\gamma_0 \notin \Lambda(x_n)$, $n \geq 1$.

Теперь рассмотрим $L_1(\mathbb{G})$-модуль $\mathfrak{U} = (Hom(X_1, X_2), T_0)$ из примера 4. Если $\Lambda(A_0, T_0) = \{0\}$ для $A_0 \in \mathfrak{U}$, то из только что сделанных замечаний следует, что $T_2(g)A_0 = A_0 T_1(g)$, $g \in \mathbb{G}$ (оператор A_0 перестановочен с операторами $T(g)$, если $X_1 = X_2, T_1 = T_2 = T$). Такой оператор A_0 назовем оператором *без памяти*, и для их множества будем использовать обозначение $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathfrak{U})$. Каузальный оператор A со свойством $M(A) = A_0 = \lim_\alpha T_0(f_\alpha)A = 0$, где (f_α) — некоторая o-направленность, назовем равномерно каузальным. Множество таких операторов обозначим символом $\mathcal{UC}$.

Положим $\Lambda'_{erg}(A, T_0) = (\widehat{\mathbb{G}} \setminus \Lambda(A, T_0)) \cup \Lambda_{erg}(A, T_0)$. Отметим равенство $\Lambda'_{erg}(A, T_0) = \widehat{\mathbb{G}}$ для любого почти периодического оператора $A \in \mathfrak{U}$, т.е. A — T_0-непрерывный оператор и множество значений функции $g \mapsto T_0(g)A : \mathbb{G} \to \mathfrak{U}$ предкомпактно в $\mathfrak{U}$. Такое же равенство имеет место для операторов из примера 5.

Оператор $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$ называется *каузально обратимым*, если оператор $A^{-1} \in Hom(X_2, X_1)$ является каузальным относительно представления $T_0^{-1} : \mathbb{G} \to EndHom(X_2, X_1)$, определенного формулой $T_0^{-1}(g)B = T_1(g)BT_2(-g)$, $B \in Hom(X_2, X_1)$. Если $X_1 = X_2 = X$, то символом $\sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$ будем обозначать спектр оператора A в алгебре $\mathfrak{Caus}(X)$. Отметим, что спектр $\sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$ совпадает со спектром $\sigma(A)$ любого оператора A из $\mathcal{M}$ и $0 \in \sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$ для всех $A \in \mathcal{UC}$. Условия каузальной обратимости операторов из $\mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$ имеют важное значение при изучении свойств устойчивости дифференциальных уравнений ([1, 2]) и систем с обратной связью ([3]). Отметим также, что небольшой обзор условий каузальной обратимости содержится в [9].

Теорема 2. Пусть $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$ — каузально обратимый оператор и $0 \in \Lambda'_{erg}(A, T_0)$. Тогда $0 \in \Lambda_{erg}(A^{-1}, T_0^{-1})$, оператор $M(A)$ обратим и $(M(A))^{-1} = M(A^{-1})$.

Следствие 2. Имеет место включение $\sigma(M(A)) = \sigma_{\mathfrak{Caus}}(M(A)) \subseteq \sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$.

Теорема 3. Пусть $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$, и $\Lambda(A, T_0) \subset \{0, \gamma\} \subset \mathbb{S}$. Оператор A каузально обратим тогда и только тогда, когда оператор $A_0 = M(A)$ обратим и спектральный радиус $r(A_0^{-1}(A - A_0))$ оператора $A_0^{-1}(A - A_0) = A_0^{-1}A - I \in EndX_1$ меньше единицы.

Приведем несколько достаточных условий принадлежности оператора A радикалу $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{C}}(X)$ алгебры $\mathfrak{Caus}(X)$. В этом случае $X_1 = X_2 = X$ и $T_1 = T_2 = T$.

Теорема 4. Оператор A из алгебры $\mathfrak{Caus}(X)$ принадлежит радикалу этой алгебры, если выполнены условия:

1) $A \in \mathcal{UC}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi \in L_1(\mathbb{G})$ такая что $\|T(\varphi)A - A\| < \varepsilon$.

Следствие 3. Пусть $A \in \mathcal{UC}$ — компактный оператор и представление T сильно непрерывно. Тогда $A \in \mathfrak{Rad}_{\mathfrak{C}}(X)$.

Для компактных операторов можно сформулировать и другое достаточное условие принадлежности радикалу, обобщающее результаты из [1, 2, 4].

Теорема 5. Пусть $A \in \mathfrak{Caus}(X)$ — компактный оператор, причем $X = X_c$, и спектр Бора $\Lambda_B(x)$ каждого вектора из банахова $L_1(\mathbb{G})$-модуля (X,T) пуст. Тогда $A \in \mathfrak{Rad}_{\mathfrak{C}}(X)$.

Следствие 4. Пусть $A = M + K \in \mathfrak{Caus}(X, T_0)$, причем $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{U})$, K — компактный оператор, $X = X_c$, и спектр Бора $\Lambda_B(x)$ каждого вектора x из банахова $L_1(\mathbb{G})$-модуля (X,T) пуст. Тогда $\sigma(A) = \sigma(M)$.

В оставшейся части заметки считается, что $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{S} = \mathbb{R}_+$. Двойственную к $\mathbb{S}$ полугруппу $\hat{\mathbb{S}}$ непрерывных полухарактеров естественным образом отождествим с $\mathbb{C}_+ = \mathbb{R} + i\mathbb{R}_+$.

Теорема 6. Для $A \in \mathfrak{U}$ следующие два утверждения эквивалентны:

1) $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$;

2) функция $\varphi_A(t) = T_0(t)A$, $t \in \mathbb{G}$, допускает голоморфное продолжение в $\mathrm{Int}\mathbb{C}_+$, непрерывное (в сильной операторной топологии) на $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяющее оценке $\|\varphi_A(z)\| \le \|A\|$, для всех $z \in \mathbb{C}_+$. При этом продолжение $\varphi_A(z)$, $z = \alpha + i\beta \in \mathrm{Int}\mathbb{C}_+$, единственно и допускает представление в виде $\varphi_A(z) = T_0(f_z)A$, где $f_\alpha \in L_1(\mathbb{R})$.

Теорема 7. Для оператора $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$ следующие утверждения эквивалентны:

1) $A^{-1} \in \mathfrak{Caus}(X_2, X_1)$;

2) $\varphi_A(z) = T_0(f_z)A \in \mathfrak{U}$ обратим для всех $z \in \mathbb{C}_+$, и $z \in \sup\limits_{\mathbb{C}_+} \|(\varphi_A(z))^{-1}\| < \infty$.

Теорема 8. Пусть $A \in \mathfrak{Caus}(X)$ и $0 \in \Lambda'_{erg}(A, T_0)$. Тогда каждая компонента связности в $\sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$ содержит по крайней мере одну компоненту связности множества $\sigma(M(A))$. В частности, $\sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$ — односвязное множество и $0 \in \sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$, если $A \in \mathcal{UC}$.

Введем в рассмотрение два подпространства из $\mathfrak{U}$ операторов с суммируемой и экспоненциально убывающей памятью. Рассмотрим функцию $f \in L_1(\mathbb{R})$ со свойствами: $\hat{f}(0) = 1$, $\mathrm{supp}\hat{f} \subset [-1/2, 1/2]$. Для каждого оператора $A \in \mathfrak{U}$ определим функцию $d_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, положив $d_A(\lambda) = \|T_0(f_\lambda)A\|$, где $\{f_\lambda = fe_\lambda, e_\lambda(t) = e^{it\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Определение 3. Будем говорить, что оператор $A \in \mathfrak{U}$ имеет *экспоненциально убывающую* положительную (отрицательную) память, если существуют такие константы $M, \omega > 0$, что $d_A(\lambda) \le Me^{-\omega|\lambda|}$ для всех $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$). Положительную (отрицательную) память оператора $A \in \mathfrak{U}$ будем называть *суммируемой*, если $\int_0^\infty d_A(\lambda)d\lambda < \infty$ (соответственно, $\int_{-\infty}^0 d_A(\lambda)d\lambda < \infty$).

Если и положительная, и отрицательная память оператора $A \in \mathfrak{U}$ экспоненциально убывают (суммируемы), то слова «положительная» и «отрицательная» будем опускать. Можно показать [10], что введенные характеристики убывания памяти не зависит от выбора конкретной функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ с указанными свойствами.

Теорема 9. Пусть $A \in \mathfrak{U}$ — обратимый оператор. Тогда

1) $A^{-1} \in Hom(X_2, X_1)$ имеет экспоненциально убывающую (суммируемую) память, если соответствующим свойством обладает A.

2) Если $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$, то отрицательная память оператора A^{-1} экспоненциально убывает.

Замечание. Случай $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ сводится к рассмотренному путем замены представления $T_0 : \mathbb{T} \to Hom(X_1, X_2)$ на 2π-периодическое представление $T_0' : \mathbb{R} \to Hom(X_1, X_2)$, вида $T_0'(t) = T_0(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$. В этом случае (см. пример 5), введенные в определении 2 классы операторов совпадают соответственно с классами операторов, матрицы которых имеют экспоненциально убывающие и суммируемые диагонали (см. [10]). Отметим еще, что для $\mathbb{G} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$ имеют место соответствующие аналоги теорем 6—8 (вместо $\mathbb{C}_+$ используется $\hat{\mathbb{S}}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд. ВГУ, 1990.

2. *Kurbatov V.G.* Functional Differential Operators and Equations. Kluwer Academic Publishers, 1999.

3. *Feintuch A., Saeks R.* System Theory. A Hilbert Space Approach. Academic press, 1982.

4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Методы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

5. *Domar Y., Lindahl L.-A.* Three Spectral notions for representations of commutative Banach algebras. Ann. Inst. Fourier, 1975, 25, № 2, P. 1—32.

6. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.

7. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд. ВГУ, 1987.

8. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. М.: Мир, 1972.

9. *Криштал И.А.* О критериях обратимости в алгебре каузальных операторов. Вестник ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 1, С. 143—150.

10. *Баскаков А.Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ. Сиб. мат. журнал, 1997, Т. 38, № 1, С. 14—28.