УДК:517.988.6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2002 Р. Бадер, Б. Д. Гельман, В. В. Обуховский[1]

Technische Universität, München
Воронежский государственный университет

В настоящей заметке вводится некоторый класс полунепрерывных снизу многозначных отображений, для которого корректно определена топологическая степень. Дается оценка снизу топологической размерности множества неподвижных точек отображения из данного класса. Отметим работу [5], в ней подобные теоремы доказаны для непрерывных многозначных отображений с замкнутыми выпуклыми образами. Необходимые дополнительные сведения по теории многозначных отображений могут быть найдены, например, в монографиях [4], [10].

1. Класс $\mathcal{M}(X,Y)$.

Пусть X — метрическое пространство; Y — банахово пространство; $C(Y)$ $[Cv(Y)]$ обозначает совокупность всех непустых замкнутых [замкнутых выпуклых] подмножеств Y. Напомним (см., например, [4, 10]), что многозначное отображение (мультиотображение) $F: X \to C(Y)$ называется полунепрерывным снизу (пн. сн.), если $F^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \cap V \neq \varnothing\}$ открыто для любого открытого $V \subset Y$. Напомним также, что непрерывное однозначное отображение $f: X \to Y$ называется непрерывным сечением мультиотображения F, если $f(x) \in F(x)$ для всех $x \in X$.

Рассмотрим следующий класс мультиотображений.

Определение 1.1. *Пн. сн. мультиотображение $F: X \to C(Y)$ принадлежит классу $M(X,Y)$, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$\mathcal{M}1$ *)* ***Свойство продолжения сечения.*** *Если $A \subset X$ — замкнутое подмножество, то любое непрерывное сечение сужения $F|_A$ может быть продолжено до непрерывного сечения мультиотображения F;*

$\mathcal{M}2$ *)* ***Свойство обходящего сечения.*** *Для любого компакта $A \subset X$ с топологической размерностью $dim(A) \leq n-1$, где $n \geq 1$ (см., например, [1]) и любого непрерывного сечения $g: A \to Y$ мультиотображения $F|_A$ условие*

$$dim(F(x)) \geq n \text{ для всех } x \in A$$

влечет существование непрерывного сечения $f: A \to Y$ мультиотображения $F|_A$ такого, что $f(x) \neq g(x)$ для всех $x \in A$;

$\mathcal{M}3$ *)* ***Свойство цилиндрического продолжения.*** *«Цилиндрическое продолжение» $F': X \times [0,1] \to C(Y)$, определенное как $F'(x,\lambda) = F(x)$ для всех $(x,\lambda) \in X \times [0,1]$ обладает свойством продолжения сечения.*

Мы приведем два примера мультиотображений класса $\mathcal{M}(X,Y)$.

Прежде всего, каждое пн.сн. мультиотображение $F: X \to Cv(Y)$ принадлежит указанному семейству. Действительно, свойства ($\mathcal{M}1$) и ($\mathcal{M}3$) являются следствиями классической теоремы Майкла о непрерывном сечении (E. Michael [11]). Свойство ($\mathcal{M}2$) вытекает из следующего утверждения, являющегося следствием Теоремы 3.1 из [12].

Теорема 1.1. *Пусть X — паракомпактное пространство, Y — банахово пространство, $F: X \to Cv(Y)$ — пн. сн. мультиотображение, и $g: X \to Y$ — его непрерывное сечение. Если $dim(X) < dim(F(x))$ для всех $x \in X$, то существует непрерывное сечение $f: X \to Y$ мультиотображения F такое, что $f(x) \neq g(x)$ для всех $x \in X$.*

Для того, чтобы привести пример невыпуклозначных мультиотображений из класса $\mathcal{M}(X,Y)$ нам понадобятся некоторые предварительные сведения.

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; $L^1([0,d];E)$ обозначает банахово пространство суммируемых по Бохнеру функций $f:[0,d] \to E$. Напомним, что непустое мно-

[1] Работа поддержана DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst) во время пребывания В. Обуховского в Техническом Университете Мюнхена, а также грантами РФФИ 01-01-00425 и 02-01-00189.

жество $M \subset L^1([0,d];E)$ называется разложимым, если для любых $f, g \in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m \subset [0,d]$, выполнено

$$f\kappa_m + g\kappa_{([0,d]\setminus m)} \in M,$$

где κ_m — характеристическая функция множества m.

Символом $D(L^1([0,d];E))$ мы будем обозначать совокупность всех замкнутых разложимых подмножеств пространства $L^1([0,d];E)$. Следующий аналог теоремы Майкла является обобщением A. Bressan'a—G.Colombo [7] теоремы A. Fryszkowski [8].

Теорема 1.2. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн.сн. мультиотображение $F : X \to D(L^1([0,d];E))$ имеет непрерывное сечение.*

Нам будет нужна также следующая теорема о плотности (В. В. Гончаров — А. А. Толстоногов [6]), обобщающая результаты A. Ornelas'a [13] и A.Fryszkowski [9].

Рассмотрим на пространстве $Y = L^1([0,d];E)$ норму

$$\| y \|_w = \sup_{t\in[0,d]} \| \int_0^t y(s)\, ds \|,$$

порождающую на Y топологию, не являющуюся более сильной, чем обычная.

Теорема 1.3. *Пусть A — компактное метрическое пространство; $F : A \to D(Y)$ — пн. сн. мультиотображение. Тогда для любого непрерывного сечения $g : A \to Y$ мультиотображения $\overline{co}F : A \to Cv(Y)$, $(\overline{co}F)(x) = \overline{co}(F(x))$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывное сечение $f : A \to Y$ мультиотображения F такое, что $\| g - f \|_w < \varepsilon$.*

Теперь мы можем предложить второй пример мультиотображения из класса $\mathcal{M}(X,Y)$.

Теорема 1.4. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство; $Y = L^1([0,d];E)$. Тогда любое пн.сн. мультиотображение $F : X \to D(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{M}(X,Y)$.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$ — замкнутое подмножество и $f : A \to Y$ — непрерывное сечение мультиотображения $F|_A$. Тогда для проверки свойства ($\mathcal{M}1$) достаточно применить Теорему 1.2 к пн. сн. мультиотображению $\tilde{F} : X \to D(Y)$ определенному как

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A, \\ F(x), & \text{если } x \notin A; \end{cases}$$

Справедливость ($\mathcal{M}3$) проверяется аналогично.

Предположим теперь, что компакт $A \subset X$ таков, что $dim(A) \le n-1$, $dim(F(x)) \ge n$ для всех $x \in A$ и $g : A \to Y$ — непрерывное сечение мультиотображения $F|_A$. Ясно, что та же оценка для размерности образов на A верна и для мультиотображения $\overline{co}F : X \to Cv(Y)$, которое, как нетрудно проверить, также является пн. сн.

Применяя свойство ($\mathcal{M}2$) к мультиотображению $\overline{co}F$, мы получаем существование непрерывного сечения $\tilde{f} : A \to Y$, «обходящего» сечение g. Поскольку A компактно, существует $\eta > 0$ такое, что $\| g(x) - \tilde{f}(x) \|_w > \eta$ для всех $x \in A$. Но из Теоремы 1.3 мы получаем, что существует непрерывное сечение $f : A \to Y$ мультиотображения F такое, что

$$\| \tilde{f}(x) - f(x) \|_w > 0$$

для всех $x \in A$. Поэтому мы получаем

$$\tilde{f}(x) \ne f(x)$$

для всех $x \in A$ и, следовательно, сечение f является искомым. □

Отметим, что класс $\mathcal{M}(X,Y)$ является замкнутым относительно композиций с гомеоморфизмами. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть $F \in \mathcal{M}(X,Y)$; X' — метрическое пространство; Y' — банахово пространство и $\alpha : X' \to X$ и $F(X) \to \gamma F(X) \le Y'$ — гомеоморфизмы. Тогда $\gamma \cdot F \cdot \alpha \in \mathcal{M}(X',Y')$.*

2. Топологическая степень и размерность множества неподвижных точек

Наша цель теперь — определить топологическую степень для мультиотображений класса $\mathcal{M}(X,Y)$. Фактически мы представим степень даже для более широкого класса мультиотображений, поскольку для нашей конструкции нам понадобятся только свойства ($\mathcal{M}1$) и ($\mathcal{M}3$).

Пусть Y — банахово пространство, $K(Y)$ обозначает совокупность всех непустых компактных множеств Y, β — монотонная несингулярная мера некомпактности (МНК) в Y (см., например, [2], [10]). Напомним следующее понятие (см. [3], [10]).

Определение 2.1. *Пусть $X \subset Y$ — замкнутое подмножество; L — компактное топологическое пространство. Мультиотображение $F : X \to K(Y)$ или семейство мультиотображений $G : X \times L \to K(Y)$ называется* *уплотняющим относительно МНК* β *(или* β *-уплотняющим), если*

$$\beta(F(\Omega)) \geq \beta(\Omega)$$

или, соответственно,

$$\beta(G(\Omega \times L)) \geq \beta(\Omega)$$

влечет относительную компактность Ω *для* $\Omega \subset X$.

Пусть теперь $U \subset Y$ — ограниченное открытое множество.

Определение 2.2. *Пусть* $F \in \mathcal{M}(\overline{U}, \Gamma)$ — β *-уплотняющее мультиотображение такое, что* $x \notin F(x)$ *для всех* $x \in \partial U$. *Тогда топологическая степень* F *определяется как*

$$Deg(F, \overline{U}) := Deg(f, \overline{U}),$$

где $f : \overline{U} \to Y$ *— произвольное непрерывное сечение* F.

Прежде всего ясно, что f — β -уплотняющее отображение, которое не имеет неподвижных точек на границе ∂U и следовательно, его топологическая степень корректно определена (см., напрмер, [2]). Далее, данное выше определение корректно и в следующем смысле.

Предложение 2.1. *Пусть* $f, g : \overline{U} \to Y$ *— два непрерывных сечения* F. *Тогда* $Deg(f, \overline{U}) = Deg(g, \overline{U})$.

Доказательство. Рассмотрим «цилиндрическое продолжение»

$$F' : \overline{U} \times [0,1] \to K(Y), \ \ F'(x, \lambda) = F(x),$$

$$\text{для любых} \ \ (x, \lambda) \in \overline{U} \times [0,1].$$

Из (M3) вытекает, что отображение $\tilde{h} : (\overline{U} \times \{0\}) \cup (\overline{U} \times \{1\}) \to Y$ определенное как

$$\tilde{h}(x, i) = \begin{cases} f(x), & \text{если } i = 0, \\ g(x), & \text{если } i = 1 \end{cases}$$

может быть продолжено до непрерывного сечения $h : \overline{U} \times [0,1] \to Y$ мультиотображения F', которое реализует гомотопию отображений f и g.

Действительно, ясно, что $h(x, 0) = f(x)$, $h(x, 1) = g(x)$ для всех $x \in \overline{U}$ и h не имеет неподвижных точек на $\partial U \times [0,1]$. Далее, если $\beta(h(\Omega \times [0,1])) \geq \beta(\Omega)$ для некоторого $\Omega \subset \overline{U}$, то из монотонности МНК β и определения F следует

$$\beta(h(\Omega \times [0,1])) \leq \beta(F'(\Omega \times [0,1])) = \beta(F(\Omega))$$

и, таким образом Ω относительно компактно.

Теперь утверждение следует из свойства гомотопической инвариантности топологической степени уплотняющего отображения. □

Введенная характеристика обладает всеми обычными свойствами топологической степени. Отметим лишь два из них.

(i) Свойство неподвижной точки. *Если* $F \in \mathcal{M}(\overline{U}, Y)$, *является* β *-уплотняющим, не имеет неподвижных точек на* ∂U *и* $Deg(F, \overline{U}) \neq 0$, *то* $Fix(F) = \{x : x \in F(x)\} \neq \varnothing$.

(ii) Свойство гомотопической инвариантности. *Если семейство* $G \in \mathcal{M}(\overline{U} \times [0,1], Y)$ *является* β *-уплотняющим и* $x \notin G(x, \lambda)$ *для всех* $(x, \lambda) \in \partial U \times [0,1]$, *то*

$$Deg(G(\cdot, 0), \overline{U}) = Deg(G(\cdot, 1), \overline{U}).$$

Теперь мы можем привести основной результат, дающий оценку снизу для топологической размерности множества неподвижных точек $Fix(F)$ мультиотображения из класса $\mathcal{M}(\overline{U}, Y)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $F \in \mathcal{M}(\overline{U}, Y)$ *—* β*-уплотняющее мультиотображение, не имеющее неподвижных точек на* ∂U. *Пусть множество* $Fix(F)$ *замкнуто и выполнены следующие условия:*

(1) $Deg(F, \overline{U}) \neq 0$;

(2) $dim(F(x)) \geq n$ для всех $x \in U$, где $n \geq 1$.

Тогда $dim(Fix(F)) \geq n$.

Доказательство. Из (1) следует, что $\varnothing \neq Fix(F) \subset U$ и β -уплотняемость мультиотображения F влечет компактность этого множества.

Предполагая противное заключению теоремы, положим, что $dim(Fix(F)) \leq n-1$. Отображение вложения $j : Fix(F) \to Y$ является непрерывным сечением F и поэтому, используя свойство $(\mathcal{M}2)$, мы получаем непрерывное сечение $f : Fix(F) \to Y$ мультиотображения $F|_{Fix(F)}$, не имеющее неподвижных точек. Но из ($\mathcal{M}1$) вытекает существование непрерывного сечения $\tilde{f} : \overline{U} \to Y$ мультиотображения F, являющегося продолжением сечения f: $\tilde{f}|_{Fix(F)} = f$.

Из построения $\tilde{f}$ следует, что оно не имеет неподвижных точек и, таким образом, $Deg(\tilde{f}, \overline{U}) = 0$, но это противоречит тому, что, согласно Определению 2.2 $Deg(F, \overline{U}) = Deg(\tilde{f}, \overline{U})$. □

Следствие 2.1. *Пусть* $F \in \mathcal{M}(\overline{U}, Y)$ — β *-уплотняющее замкнутое мультиотображение, не имеющее неподвижных точек на* ∂U. *Тогда условия (1) и (2) Теоремы 2.1 влекут* $dim(Fix(F)) \geq n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности, Наука, М., 1975.

2. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы, Наука, Новосибирск, 1986.

3. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи мат. наук, 35, 1, 1980, 59—126.

4. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений, Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986.

5. *Гельман Б.Д.* Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений // Математ. сборник, 188, 12, 1997, 33—56.

6. *Гончаров В.В., Толстоногов А.А.* Совместные непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпуклыми значениями и их приложения// Мат. сборник, 182, 7, 1991, 946—969.

7. *Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia Math. 90, 1988, 69—86.

8. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 76, 1983, 163—174.

9. *Fryszkowski A.* Continuous selections of Aumann integrals // J. Math. Anal. Appl. 145, 1990, 431—446.

10. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.*, Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Walter de Gruyter, Berlin—New York, 2001.

11. Michael E. Continuous selections I // Ann. Math. 63, 1956, 361—382.

12. Michael E. Continuous selections avoiding a set // Topology and its Appl. 28, 1988, 195—213.

13. *Ornelas A.* Approximation of relaxed solutions for lower semicontinuous differential inclusions// Ann. Polon. Math. 56, 1, 1991, 1—10.