МАТЕМАТИКА

УДК 517.947

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ АБСТРАКТНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

© 2002 С. Н. Афанасьев

Воронежский государственный университет

Настоящая работа посвящена доказательству коэрцитивной разрешимости вырождающейся краевой задачи со слабо позитивным оператором в пространстве Бохнера $B_p, p>1$. В работе [1] была установлена однозначная разрешимость данной задачи и получена явная формула решения. Обоснование коэрцитивной разрешимости этой задачи сводится к доказательству ограниченности интегрального оператора $\tau^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}A\int\limits_0^{\overline{T}} G(\tau,s)\varphi(s)ds$, α>0 в некотором весовом пространстве. Здесь $G(\tau,s)$ — функция Грина эквивалентной задачи. Главная часть этого оператора оказывается точно такой же, как и в случае невырожденной краевой задачи. Используемая методика доказательства позволяет рассматривать и более общую ситуацию, допуская в качестве коэффициента при $Au(t)$ функции вида $b(t)t^{2\alpha}$, где $b(t)$ положительная и достаточно гладкая при $t\in[0;T]$ функция.

Введение

Рассмотрим в банаховом пространстве E краевую задачу

$$u''(t)-t^{2\alpha}Au(t)=f(t), \alpha>0, t\in[0;T], \quad (1)$$

$$u(0)=0, u(T)=0. \quad (2)$$

Здесь A — слабо позитивный оператор. Напомним, что действующий в E линейный неограниченный оператор A называется слабо позитивным (см. [2]), если его область определения $D(A)$ плотна в E и

$$\left\|(\lambda I-A)^{-1}\right\|\le\frac{M}{1+|\lambda|}, \lambda\le 0. \quad (3)$$

Из (3) вытекает существование таких $\sigma_0>0$, $\psi_0\in(0;\pi)$, что контур $\Gamma=\Gamma_+\cup\Gamma_0\cup\Gamma_-$, где $\Gamma_\pm=\{\lambda:\lambda=\rho e^{\pm i\psi_0}, \rho\ge\sigma_0\}, \Gamma_0=\{\lambda:\lambda=\sigma_0 e^{i\varphi}, |\varphi|\le \le\psi_0\}$ лежит в резольвентном множестве A, причем (3) выполняется для всех $\lambda\in\Gamma$ и λ, лежащих левее Γ. Пусть $B_p=B_p([0;T],E)$, $p>1$ — пространство Бохнера.

Решением задачи (1)—(2) назовем функцию $u(t)\in W_p^2([0;T],E), p>1$, такую, что $t^{2\alpha}Au(t)\in B_p$, $u(t)$ удовлетворяет (2) и почти всюду на $[0;T]$ выполняется (1).

Задача (1)—(2) называется *коэрцитивно разрешимой* в $B_p, p>1$ (к. р.), если

1) она однозначно разрешима для любой $f(t)\in B_p$ и

2) справедливо неравенство

$$\left\|u''(t)\right\|_{B_p}+\left\|t^{2\alpha}Au(t)\right\|_{B_p}\le M\left\|f(t)\right\|_{B_p}.$$

В этой работе доказывается к. р. задачи (1)—(2) при условии к. р. соответствующей невырождающейся задачи. Положительные константы, значения которых не важны, обозначаются ниже одной буквой M.

Некоторые свойства модифицированных функций Бесселя

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, называемое модифицированным уравнением Бесселя

$$u''(z)+\frac{1}{z}u'(z)-(1+\frac{\nu^2}{z^2})u(z)=0, \nu>0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(z)=C_1I_\nu(z)+C_2K_\nu(z),$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя. Эти функции являются аналитическими во всей комплексной плоскости без отрицательной полуоси $(-\infty;0]$. В области $Re\, z>0$, $I_\nu(z)\ne 0$ и $K_\nu(z)\ne 0$. Если $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$, то

$$I_\nu(z)\sim\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, K_\nu(z)\sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)z^{-\nu}, \nu>0 \quad (4)$$

при малых значениях $|z|$ и

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}(1+O(z^{-1})),$$
$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}(1+O(z^{-1})) \qquad (5)$$

при больших значениях $|z|$ и $\nu > -1/2$. Здесь $\Gamma(x), x > 0$ — гамма-функция. Изложенные факты взяты из [4].

Коэрцитивная разрешимость вырождающейся краевой задачи

Прежде чем перейти к основному утверждению, введем элементарную лемму, которая потребуется нам в дальнейшем для доказательства ограниченности интегральных операторов специального вида в весовом пространстве Бохнера $B_{p,\gamma}$ с нормой

$$\|\varphi(s)\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\int_0^T \|\varphi(s)\|^p s^\gamma ds\right)^{1/p}. \qquad (6)$$

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(s) \in B_{p,\gamma}$ и $\alpha + \beta + 1 \ge 0$.
1) Если $\beta - \frac{\gamma+1}{p} > -1$, *то*

$$\| \tau^\alpha \int_0^\tau s^\beta \varphi(s)ds \|_{B_{p,\gamma}} \le M\|\varphi(s)\|_{B_{p,\gamma}};$$

2) Если $\beta - \frac{\gamma+1}{p} < -1$, *то*

$$\| \tau^\alpha \int_t^T s^\beta \varphi(s)ds \|_{B_{p,\gamma}} \le M\|\varphi(s)\|_{B_{p,\gamma}}.$$

Рассмотрим вспомогательную невырождающуюся задачу

$$u''(\tau) - Av(\tau) = g(\tau), \tau \in [0;\overline{T}], \qquad (7)$$

$$v(0) = 0, v(\overline{T}) = 0. \qquad (8)$$

Здесь $g(\tau) = f((\frac{\tau}{2\nu})^{2\nu})(2\nu)^{2-4\nu}$, $\overline{T} = 2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}$, $\nu = \frac{1}{2(\alpha+1)} \in (0;\frac{1}{2})$. Обозначим через $\overline{B}_p$ пространство $B_p([0;\overline{T}],E)$ и рассмотрим оператор

$$Fg(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\overline{T}}\int_\Gamma \sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}|\tau-s|}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\, g(s)ds =$$
$$= \int_0^{\overline{T}} A^{1/2}e^{-|\tau-s|A^{1/2}}g(s)ds. \qquad (9)$$

Лемма 2. *К. р. задачи (7)—(8) в пространстве* $\overline{B}_p$ *эквивалентна ограниченности оператора* F *в этом пространстве. Если* $-1 < \gamma < p-1$, *то из ограниченности оператора* F *в* $\overline{B}_p$ *вытекает его ограниченность в пространстве* $B_{p,\gamma}([0;\overline{T}],E)$.

Лемма 2 доказана в работе [5]. Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0, p > 1$ *и задача (7)—(8) к. р. в пространстве* $\overline{B}_p$. *Тогда задача (1)—(2) к. р. в* B_p.

Доказательство. Пусть вначале $f(t) \in D(A)$ и функции $f(t), Af(t)$ непрерывны на отрезке $[0;T]$. Тогда (см. [1]) задача (1)—(2) имеет единственное решение[1]

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \{-2\nu\sqrt{t}K_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})\int_0^t \sqrt{s}I_\nu(2\nu s^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})f(s)ds +$$
$$+2\nu\frac{K_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}\sqrt{t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})\int_0^T \sqrt{s}K_\nu(2\nu s^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})f(s)ds -$$
$$-2\nu\sqrt{t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})\int_t^T \sqrt{s}K_\nu(2\nu s^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})f(s)ds\}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda.$$

Здесь $\nu = \frac{1}{2(\alpha+1)}$. В задаче (1)—(2) выполним замену переменной $\tau = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}$ и перейдем к эквивалентной задаче

$$v''(\tau) - (2\nu-1)\frac{1}{\tau}v'(\tau) - Av(\tau) = g(\tau)\tau^{4\nu-2}, \qquad (10)$$

$$v(0) = 0, v(\overline{T}) = 0, \tau \in (0;\overline{T}], \qquad (11)$$

где $v(\tau) = u((\frac{\tau}{2\nu})^{2\nu})$, а $g(\tau)$ и $\overline{T}$ определены выше. Эта задача имеет единственное решение

$$v(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \{-\tau^\nu K_\nu(\tau\sqrt{\lambda})\int_0^\tau s^{3\nu-1}I_\nu(s\sqrt{\lambda})g(s)ds +$$
$$+\frac{K_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}\tau^\nu I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})\int_0^{\overline{T}} s^{3\nu-1}I_\nu(s\sqrt{\lambda})g(s)ds -$$
$$-\tau^\nu I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})\int_\tau^{\overline{T}} s^{3\nu-1}K_\nu(s\sqrt{\lambda})g(s)ds\}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda, \qquad (12)$$
$$\nu \in (0;1/2).$$

Отметим, что задача (10)—(11) рассматривается в весовом пространстве $B_{p,\gamma} = B_{p,\gamma}([0;\overline{T}],E)$ с нормой (6), в которой вместо T надо взять $\overline{T}$, а $\gamma = 2\nu - 1$. Действительно, $\| t^{2\alpha}Au(t)\|_{B_p} = (2\nu)^{-\frac{\beta}{p}} \| \tau^{2-4\nu}Av(\tau)\|_{B_{p,\gamma}}$ и $\| f(t)\|_{B_p} = (2\nu)^{-\frac{\beta}{p}} \| g(\tau)\|_{B_{p,\gamma}}$, где $\beta = (2p-1)(1-2\nu)$. Ясно, что $g(\tau) \in D(A)$, причем функции $g(\tau)$ и $Ag(\tau)$ непрерывны на отрезке $[0;\overline{T}]$. Для доказательства к. р. задачи (1)—(2) необходимо доказать, что

$$\|t^{2\alpha}Au(t)\|_{B_p} \le M\|f(t)\|_{B_p}, \qquad (13)$$

а это равносильно неравенству

$$\|\tau^{2-4\nu}Av(\tau)\|_{B_{p,\gamma}} \le M\|g(\tau)\|_{B_{p,\gamma}}. \qquad (14)$$

Используя формулы (9) и (12), мы имеем

[1] Здесь и далее любую функцию вида $f(\lambda) = \lambda^\gamma$, $\gamma \in R$ мы будем рассматривать как однозначную аналитическую в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси $(-\infty;0]$ функцию, такую, что $f(1)=1$.

$$\tau^{2-4\nu}Av(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^\tau\int_\Gamma\{\tau^\nu s^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{2-4\nu}K_\nu(\tau\sqrt{\lambda})I_\nu(s\sqrt{\lambda})\lambda - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}\}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda g(s)ds +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\tau\int_\Gamma \frac{K_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}\tau^\nu s^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{2-4\nu}I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})I_\nu(s\sqrt{\lambda})\lambda(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\, g(s)ds +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\tau^{\overline{T}}\int_\Gamma \frac{K_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}\tau^\nu s^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{2-4\nu}I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})I_\nu(s\sqrt{\lambda})\lambda(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\, g(s)ds - \quad (15)$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\tau^{\overline{T}}\int_\Gamma\{\tau^\nu s^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{2-4\nu}I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})K_\nu(s\sqrt{\lambda})\lambda - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}e^{(\tau-s)\sqrt{\lambda}}\}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\, g(s)ds - Fg(\tau) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\{-B_1g(\tau) + B_2g(\tau) + B_3g(\tau) - B_4g(\tau)\} - Fg(\tau).$$

Сходимость всех интегралов в (15) обосновывается полученными ниже оценками. Докажем ограниченность операторов $B_i, i = 1,2,3,4$ в $B_{p,\gamma}$. Положим

$$B_ig(\tau) = \int_0^\tau G_i(\tau,s)g(s)ds, i = 1,2,$$

$$B_ig(\tau) = \int_\tau^{\overline{T}} G_i(\tau,s)g(s)ds, i = 3,4$$

и оценим по норме функции $G_i(\tau,s), i = 1,2,3,4$. В качестве примера мы оценим функции $G_1(\tau,s)$ и $G_3(\tau,s)$. Разобьем контур Γ на 4 части

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{\lambda : \lambda\in\Gamma, \lambda = \sigma_0 e^{i\varphi}, |\varphi| \le \varepsilon\right\},$$

$$\Gamma_1 = \left\{\lambda : \lambda\in\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon, Re\sqrt{\lambda} \le \frac{1}{\tau}\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{\lambda : \lambda\in\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon, Re\sqrt{\lambda} \in \left[\frac{1}{\tau};\frac{1}{s}\right]\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{\lambda : \lambda\in\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon, Re\sqrt{\lambda} \ge \frac{1}{s}\right\},$$

чтобы можно было применить асимптотические формулы для модифицированных функций Бесселя. Здесь ε — достаточно малое положительное число и $0 \le s \le \tau \le \overline{T}$.

Легко видеть, что на контуре Γ_ε $\|G_i(\tau,s)\| < \varepsilon$, $i = 1,2,3,4$. А для $\lambda\in\Gamma_i, i = 1,2,3$ мы имеем $|d\lambda| \le M\rho d\rho$, где $\rho = Re\sqrt{\lambda} > 0$. Обозначим $\kappa = \nu - \frac{1}{2} < 0, \nu\in(0;\frac{1}{2})$. Если $\lambda\in\Gamma_1$, то имеем $0 \le Re(s\sqrt{\lambda}) \le Re(\tau\sqrt{\lambda}) \le 1$. При $\lambda\in\Gamma_2$ имеем $1 \le Re(\tau\sqrt{\lambda})$ и $0 \le Re(s\sqrt{\lambda}) \le 1$. Для $\lambda\in\Gamma_3$ получаем $1 \le Re(s\sqrt{\lambda}) \le Re(\tau\sqrt{\lambda})$. Соответственно выбираются и асимптотические формулы (4) и (5). Вначале оценим по норме функцию

$$G_1(\tau,s) = \int_\Gamma\{\tau^\nu s^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{2-4\nu}K_\nu(\tau\sqrt{\lambda})I_\nu(s\sqrt{\lambda})\lambda -$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}\}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda = J_\varepsilon + \sum_{i=1}^3 J_{1i},$$

где J_ε, J_{1i} — интегралы по соответствующим контурам: $\Gamma_\varepsilon, \Gamma_i, i = 1,2,3$. Если $\lambda\in\Gamma_3$, то, используя (5), мы имеем

$$J_{13} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_3}\{\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa}\sqrt{\lambda}e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}(1 + \frac{M}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{s}\right) +$$
$$+O(\tau,s,\lambda)) - \sqrt{\lambda}e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}\}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda =$$
$$= J'_{13} + J''_{13} + J'''_{13},$$

где

$$|O(\tau,s,\lambda)| \le \frac{M}{s^2|\lambda|}.$$

Используя (3), мы получаем, что

$$\|J'_{13}\| \le M\left|\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa} - 1\right|\int_{1/s}^{+\infty} e^{(s-\tau)\rho}d\rho.$$

Легко видеть, что $|\tau^{-3\kappa} - s^{-3\kappa}| = |3\kappa\int_s^\tau z^{-3\kappa-1}dz|$. Следовательно,

$$\left|\tau^{-3\kappa} - s^{-3\kappa}\right|s^{3\kappa} \le \begin{cases} M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa}(\tau - s)\frac{1}{\tau}, \nu\in(0;1/6), \\ M\frac{\tau}{s}(\tau - s)\frac{1}{\tau}, \nu\in[1/6;1/2). \end{cases}$$

Поэтому

$$\|J'_{13}\| \le \frac{M}{\tau}, \nu\in(0;1/2).$$

Далее,

$$\|J''_{13}\| \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{\tau}\right)\|\int_{\Gamma_3} e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\|\le$$

$$\le \frac{M}{\tau s}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa}(\tau - s)\int_{1/s}^{+\infty} e^{(s-\tau)\rho}\,\frac{d\rho}{\rho} \le \frac{M}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa} e^{-\frac{\tau}{s}} \le \frac{M}{\tau},$$

$$\nu \in (0;1/2).$$

Наконец,

$$\|J'''_{13}\| \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa}\left\|\int_{\Gamma_3}\sqrt{\lambda}e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}\,O(\tau,s,\lambda)(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\right\| \le$$

$$\le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa}\int_{1/s}^{+\infty} e^{(s-\tau)\rho}\,\frac{d\rho}{(s\rho)^2} \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-3\kappa} e^{1-\frac{\tau}{s}}s^{-2}\int_{1/s}^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2} \le$$

$$\le \frac{M}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{1-3\kappa} e^{-\frac{\tau}{s}} \le \frac{M}{\tau}, \nu \in (0;1/2).$$

Итак,

$$\|J_{13}\| \le \frac{M}{\tau},\ \nu \in (0;1/2). \qquad (16)$$

Пусть теперь $\lambda \in \Gamma_2$. Применяя формулы (4) и (5), мы имеем

$$J_{12} = M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa}\tau^{\kappa}s\int_{\Gamma_2}\lambda^{\frac{\kappa}{2}+1}e^{-\tau\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\sqrt{\lambda}e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda = J'_{12} + J''_{12}.$$

Используя свойства гамма-функции, мы получаем

$$\|J'_{12}\| \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa}\tau^{\kappa}s\int_{1/\tau}^{1/s}\rho^{\kappa+1}e^{-\tau\rho}d\rho \le$$

$$\le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa}\tau^{\kappa}s\int_{0}^{+\infty}\rho^{\kappa+1}e^{-\tau\rho}d\rho \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa}\tau^{\kappa}s\frac{1}{\tau^{\kappa+2}} \le$$

$$\le \frac{M}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa-1},\ \nu \in (0;1/2).$$

Сделаем замену $\xi = \tau\rho, d\xi = \tau d\rho$ и получим

$$\|J''_{12}\| \le M\int_{1/\tau}^{1/s} e^{(s-\tau)\rho}d\rho = \frac{M}{\tau}\int_{1}^{\tau/s} e^{(\frac{s}{\tau}-1)\xi}d\xi \le \frac{M}{\tau},$$

поскольку функция $f(z) = \int_1^{1/z} e^{(z-1)\xi}d\xi =$ $= \frac{1}{z-1}(e^{1-\frac{1}{z}}-1),\ z = \frac{s}{\tau}\in[0;1]$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, причем $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 1} f(z) = 1$. Следовательно,

$$J_{12} \le M\left\{\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa-1}\right\}, \nu \in (0;1/2). \qquad (17)$$

Для $\lambda \in \Gamma_1$ применим (4) и получим

$$J_{11} = M\tau^{\nu}s^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa}\int_{\Gamma_1}(\tau\sqrt{\lambda})^{-\nu}(s\sqrt{\lambda})^{\nu}\lambda(\lambda I - A)^{-1}d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\sqrt{\lambda}e^{(s-\tau)\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda = J'_{11} + J''_{11}.$$

Мы имеем

$$\|J'_{11}\| \le Ms\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa}\int_0^{1/\tau}\rho d\rho \le \frac{M}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa-1}, \nu \in (0;1/2),$$

$$\|J''_{11}\| \le M\int_0^{1/\tau} e^{(s-\tau)\rho}d\rho \le \frac{M}{\tau}.$$

Поэтому

$$\|J_{11}\| \le M\left\{\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa-1}\right\}, \nu \in (0;1/2). \qquad (18)$$

В результате из (16)—(18) мы получаем, что

$$\|G_1(\tau,s)\| \le M\left\{\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{1-4\nu}\right\},\ \nu \in (0;1/2). \qquad (19)$$

Чтобы оценить по норме функцию $G_3(\tau,s)$, представим контур Γ в виде $\Gamma = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, где

$$\Gamma_1 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon,\ Re\sqrt{\lambda} \le \frac{1}{s}\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon,\ Re\sqrt{\lambda} \in \left[\frac{1}{s};\frac{1}{\tau}\right]\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon,\ Re\sqrt{\lambda} \ge \frac{1}{\tau}\right\}, 0 \le \tau \le s \le \overline{T}.$$

В данном случае для $\lambda \in \Gamma_1$ имеем $0 \le Re(\tau\sqrt{\lambda}) \le Re(s\sqrt{\lambda}) \le 1$. При $\lambda \in \Gamma_2$ имеем $1 \le Re(s\sqrt{\lambda})$ и $0 \le Re(\tau\sqrt{\lambda}) \le 1$. Если $\lambda \in \Gamma_3$, то получаем $1 \le Re(\tau\sqrt{\lambda}) \le Re(s\sqrt{\lambda})$. Соответственно применяются формулы (4) или (5). Итак, оценим по норме функцию

$$G_3(\tau,s) = \int_{\Gamma}\frac{K_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}\tau^{\nu}s^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{-4\kappa}\times$$

$$\times I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})I_\nu(s\sqrt{\lambda})\lambda(\lambda I - A)^{-1}d\lambda = J_\varepsilon + \sum_{i=1}^{3} J_{3i},$$

где J_ε, J_{3i} — интегралы по контурам $\Gamma_\varepsilon, \Gamma_i$, $i = 1,2,3$ соответственно. Так как в данном случае $(\frac{\tau}{s})^{-4\kappa} \in [0;1], \nu \in (0;\frac{1}{2})$, то в дальнейших оценках этот множитель можно опустить. Пусть $\lambda \in \Gamma_3$.

Используя формулы (4) и (5), мы имеем

$$J_{33} = M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\kappa}\int_{\Gamma_3} e^{(\tau+s-2\overline{T})\sqrt{\lambda}}(1+O(\tau,s,\lambda))\times$$
$$\times\sqrt{\lambda}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda = J'_{33} + J''_{33},$$

где

$$|O(\tau,s,\lambda)| \le \frac{M}{|\tau\sqrt{\lambda}|}.$$

Применяя (3), мы получаем

$$\|J'_{33}\| \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\kappa}\left\|\int_{\Gamma_3} e^{(\tau+s-2\overline{T})\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\right\| \le$$
$$\le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\kappa}\int_{1/\tau}^{+\infty} e^{(\tau+s-2\overline{T})\rho}d\rho \le \frac{M}{2\overline{T}-\tau-s}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\kappa}e^{(\tau+s-2\overline{T})\frac{1}{\tau}} \le$$
$$\le \frac{M}{2\overline{T}-\tau-s}\left(\frac{\overline{T}}{\tau}\right)^{-\kappa}e^{-\frac{\overline{T}}{\tau}} \le \frac{M}{2\overline{T}-\tau-s}, \nu\in(0;1/2).$$

Далее,

$$\|J''_{33}\| \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\kappa}\left\|\int_{\Gamma_3} e^{(\tau+s-2\overline{T})\sqrt{\lambda}}O(\tau,s,\lambda)\sqrt{\lambda}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda\right\| \le$$
$$\le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\kappa}\int_{1/\tau}^{+\infty} e^{(\tau+s-2\overline{T})\rho}\frac{d\rho}{\tau\rho} \le M\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\kappa}\int_{1/\tau}^{+\infty} e^{(\tau+s-2\overline{T})\rho}d\rho \le$$
$$\le \frac{M}{2\overline{T}-\tau-s}.$$

Итак,

$$\|J_{33}\| \le \frac{M}{2\overline{T}-\tau-s}, \nu\in(0;1/2). \quad (20)$$

Пусть теперь $\lambda\in\Gamma_2$. Мы имеем

$$J_{32} = M\tau^{2\nu}s^{-\kappa}\int_{\Gamma_2} e^{(s-2\overline{T})\sqrt{\lambda}}\lambda^{\frac{\kappa}{2}+1}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda.$$

Следовательно, используя свойства гамма-функции, мы получаем

$$\|J_{32}\| \le M\tau^{2\nu}s^{-\kappa}\int_{1/s}^{1/\tau}\rho^{\kappa+1}e^{(s-2\overline{T})\rho}d\rho \le$$
$$\le M\tau^{2\nu}s^{-\kappa}\int_0^{+\infty}\rho^{\kappa+1}e^{-s\rho}d\rho \le M\tau^{2\nu}s^{-\kappa}\frac{1}{s^{\kappa+2}} = \quad (21)$$
$$= \frac{M}{s}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{2\nu} \le \frac{M}{s}, \nu\in(0;1/2).$$

Для $\lambda\in\Gamma_1$ мы имеем

$$J_{31} = M\left(\frac{\tau}{\overline{\overline{T}}}\right)^{2\nu}s\int_{\Gamma_1}\lambda(\lambda I - A)^{-1}d\lambda.$$

Таким образом,

$$\|J_{31}\| \le Ms\int_0^{1/s}\rho d\rho \le \frac{M}{s}, \nu\in(0;1/2). \quad (22)$$

В итоге из (20)—(22) мы получаем, что

$$\|G_3(\tau,s)\| \le M\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{2\overline{T}-\tau-s}\right\}, \nu\in(0;1/2). \quad (23)$$

Функции $G_2(\tau,s)$ и $G_4(\tau,s)$ оцениваются аналогично. Результаты приведены ниже.

$$\|G_2(\tau,s)\| \le M\left\{\frac{1}{2\overline{T}-\tau-s}+\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{1-4\nu}\right\}, \quad (24)$$

$$\|G_4(\tau,s)\| \le \frac{M}{s}, \nu\in(0;1/2). \quad (25)$$

Используя оценки (19) и (23)—(25), мы получим, что

$$\left\|\tau^{2-4\nu}Av(\tau)\right\| \le M\{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\|g(s)\|ds + \int_{\tau}^{\overline{T}}\frac{1}{s}\|g(s)\|ds +$$
$$+\int_0^{\overline{T}}\frac{\|g(s)\|}{2\overline{T}-s-\tau}ds + \tau^{-4\nu}\int_0^{\tau}s^{4\nu-1}\|g(s)\|ds + \|Fg(\tau)\|\}, \quad (26)$$
$$\nu\in(0;1/2).$$

Применяя леммы 1 и 2, мы получим, что при $p>\frac{1}{\alpha+1}$ каждый из интегральных операторов (26) ограничен в $B_{p,\gamma}$ (ограниченность третьего интегрального оператора следует из ограниченности первых двух операторов (26) в $B_{p,\gamma}$). Следовательно, мы получаем оценку (14) для любого $p>1$, так как $\alpha>0$.

Таким образом, оценка (13), а значит и к. р. задачи (1)—(2) доказана для плотного в B_p множества функций $f(t)\in D(A)$, таких, что $f(t), Af(t)$ непрерывны на отрезке $[0;T]$. Используя это обстоятельство, с помощью предельного перехода мы можем распространить полученный результат на любые $f(t)\in B_p$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афанасьев С. Н.* О разрешимости одной абстрактной вырождающейся краевой задачи, Труды матем. ф-та ВГУ, Выпуск 7, Воронеж, 2002.

2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М.: Наука, 1966.

3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука, 1967.

4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения, М.: Гостехиздат, 1963.

5. *Орлов В. П.* Коэрцитивная разрешимость слабо вырождающихся дифференциальных уравнений с неограниченным операторным коэффициентом // Известия вузов. — Математика, № 3(418), 1997.