

УДК 519.216

## САМОПОДОБНЫЕ СВОЙСТВА ТРАФИКА СИСТЕМ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

© 2002 г. И. А. Зюльков

*Воронежский государственный университет*

Измерения на локальных сетях передачи данных, в WWW сети интернет и других сетях привели к открытию того, что трафик в них является самоподобным случайным процессом с показателем Херста  $H \neq 1/2$ . На качественном уровне самоподобие проявляется в том, что имеется медленно убывающая зависимость между величинами трафика в разные моменты времени, а число переданных пакетов (обслуженных требований) имеет сходный вид в различных временных масштабах. Такие свойства трафика оказывают значительное влияние на характеристики систем связи. В частности, как установлено с помощью измерений, при увеличении размера буфера на входе канала вероятность потерь падает значительно медленнее, чем по экспоненциальному закону, свойственному широко используемым классическим моделям телетрафика.

В [1—3 и др.] в качестве причины самоподобия трафика называется интегральный характер сетей передачи данных, используемых для передачи речи, цифровых данных, изображений и других видов информации, представляемых в форме стандартных пакетов. В некоторых работах самоподобие трафика пытаются объяснить тем, что время обработки требований на обслуживание имеет вероятностное распределение с утяжеленными хвостами.

В работе показано, что самоподобными свойствами обладает повторная нагрузка в простейшей одноканальной системе передачи однотипных данных с повторными требованиями при выполнении классических предположений. Вычисление ее фрактальной размерности дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с результатами моделирования.

В первом разделе рассмотрен способ вычисления размерностей Хаусдорфа реализация коррелированного гауссовского случайного процесса. Далее теоретически и методом

имитационного моделирования исследована модель радиосистемы с повторными вызовами.

### Фрактальная размерность гауссовского случайного процесса

Трафик систем передачи данных описывается случайным процессом. Наряду с детерминированными, понятия самоподобия и самоафинности (самоподобия при аффинных преобразованиях) применимо и к случайным процессам [2, 3 и др.]. Причем возможно введение этих понятий в широком и узком смысле. Последнее означает, что самоподобными будут нестационарные случайные процессы для которых одномерная плотность вероятности  $w(x, t)$  сохраняет свой вид при согласованном изменении масштабов по  $x$  и  $t$ . Например, для обобщенного винеровского процесса  $w(b^{-H}x, bt) = b^{-H}w(x, t)$ . Здесь  $0 < H < 2$ , а при  $H = 1/2$  приходим к винеровскому процессу. Если же коэффициенты при  $x$  и  $t$  в плотностях вероятности одинаковы, то такие процессы называются самоподобными.

Различные размерности самоподобных и самоаффинных фракталов вычислены в [4]. Однако воспользоваться этими результатами можно лишь если известна величина показателя Херста, которая в [4] находится на основе модели генератора со стрелками для фрактала. Ввиду сложности построения подобной конструкции в некоторых случаях проще непосредственно вычислить размерность по определению.

В [5] таким способом оценена самоподобная размерность Хаусдорфа гауссовского коррелированного случайного процесса — решения уравнения Ланжевена первого и второго порядка. Рассмотрим [6] метод вычисления этой размерности существенно более простой, чем в [5], применимый также для вычисления самоаффинной размерности.

Размерность Хаусдорфа множества  $X$  определяется следующим образом [7 и др.]. Введем

$\delta$  — покрытие  $X - K(\delta) = \{X_j, j = 1, 2, \dots\}$  такое, что  $X \subseteq \bigcup_j X_j$  и  $0 < \text{diam}(X_j) \leq \delta$  для всех  $j$ , где  $\text{diam}(X_j)$  — характерный размер множества  $X_j$ . Тогда  $s$  — мера Хаусдорфа определяется как

$$K_s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \inf_{K(\delta)} [\sum_j (\text{diam}(X_j))^s] \}. \quad (1)$$

Критическое значение величины  $s$  такое, при котором  $K_s(x)$  изменяет значение от нуля до бесконечности и называется хаусдорфовой размерностью  $D_H$  множества  $X$ . Первоначально фракталы были определены как множества, хаусдорфова размерность которых больше топологической.

При определении размерности самоподобия траектории случайного процесса предполагается, что коэффициенты при  $x$  и  $t$  в плотности вероятности одинаковы. Это означает, что траектория случайного процесса покрывается множествами, имеющими одинаковый характерный размер по осям  $x$  и  $t$ , например, квадратами.

Поэтому  $\text{diam}(X_j) = |X(t_j) - X(t_{j-1})|$ , т.е. мерой Хаусдорфа (1) является  $s$ -длина [5]

$$K_s(X) \equiv L_s[X(t)] = \lim_{\delta \rightarrow 0} a(s, \delta),$$

$$a(s, \delta) = \inf \left[ \sum_{j=1}^N |X(t_j) - X(t_{j-1})|^s; |t_j - t_{j-1}| < \delta \right], \quad (2)$$

где  $N = T/\delta$  — число интервалов дискретизации реализации случайного процесса за время наблюдения  $T$ .

Для самоафинных процессов попытка определения «искусственной» размерности самоподобия, т.е. величины не учитывающей свойств процесса, приведет к некоторым аномальным результатам, как они и трактуются в [4]. В этом случае надо покрывать траекторию множествами, учитывающими различные масштабные коэффициенты по различным осям, например прямоугольниками с размером  $|X(t_j) - X(t_{j-1})| \cdot |t_j - t_{j-1}|^s$ . Тогда

$$K_s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} b(s, \delta),$$

$$b(s, \delta) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k [ |X(t_j) - X(t_{j-1})| \cdot |t_j - t_{j-1}|^s ]^{1/2}; |t_j - t_{j-1}|^{s/2} < \delta \right\}, \quad (3)$$

Размерность  $D_H$  в обоих случаях (2) и (3) определяется как критическое значение  $s$  перехода между нулем и бесконечностью ве-

личины  $\langle K_s(X) \rangle$  — усредненной по ансамблю реализаций меры Хаусдорфа [5]. Таким образом, расчет самоподобной  $D_{Hc}$  и самоафинной  $D_{Ha}$  хаусдорфовых размерностей связан с вычислением  $s$ -ого абсолютного момента приращений случайного процесса.

Для гауссовского случайного процесса  $X(t)$  с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $K(t_1, t_2)$  приращения  $\Delta X_j = X(t_j) - X(t_{j-1})$  также имеют нулевое среднее и дисперсию, совпадающую со структурной функцией процесса

$$\begin{aligned} \langle \Delta X_j^2 \rangle &= K(t_j, t_j) + K(t_{j-1}, t_{j-1}) - 2 \cdot K(t_{j-1}, t_j) = \\ &= \Psi(t_{j-1}, t_j) \equiv \Psi_{j-1,j}. \end{aligned}$$

Далее рассматриваются лишь процессы, структурная функция которых имеет следующее локальное поведение

$$\Psi(t, t + \delta) = A(t)\delta^\alpha + O(\delta^{\alpha+1}),$$

где  $A(t)$  ограничена величиной  $M$ , а  $0 < \alpha \leq 2$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \langle |\Delta X_j|^s \rangle &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\Psi_{j-1,j}}} \int_0^\infty y^s \exp\left(-\frac{y^2}{2\Psi_{j-1,j}}\right) dy = \\ &= \frac{2^{s/2+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Psi_{j-1,j}^{s/2}, \\ \left\langle \sum_{j=1}^N |\Delta X_j|^s \right\rangle &= f(s) \sum_{j=1}^N \Psi_{j-1,j}^{s/2}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция, а функция  $f(\cdot)$  зависит от  $s$  и не зависит от  $\delta$ , то ввиду (2) с точностью до сомножителя, зависящего лишь от  $s$  и  $M$

$$\langle a(s, \delta) \rangle \sim (\delta^\alpha)^{s/2} \cdot N \sim \delta^{\alpha s/2-1}.$$

Предел этого выражения при  $\delta \rightarrow 0$ , определяющий  $\langle K_s(X) \rangle$  в (2) конечен лишь при  $\alpha s_0/2 - 1 = 0$ , т.е.  $s_0 = 2/\alpha$ . Следовательно, в соответствии с ранее изложенным

$$D_{Hc} = 2/\alpha. \quad (4)$$

Аналогичные вычисления, проведенные для меры, задаваемой соотношением (3) дают

$$\langle b(s, \delta) \rangle \sim \delta^{\alpha/2-1/2} \cdot \delta^{s/2} \cdot N \sim \delta^{\alpha/4+s/2-1},$$

что приводит к хаусдорфовой самоафинной размерности

$$D_{Ha} = 2 - \alpha/2. \quad (5)$$

Рассмотрим фрактальное броуновское движение (обобщенный винеровский процесс)

$$B_H(t) = \int_0^t (t - \tau)^{H-1/2} n(\tau) d\tau, \quad (6)$$

приращение которого пропорционально  $|t_1 - t_2|^H$ ,  $0 < H < 1$ , а корреляционная функция имеет вид

$$K_H(t_1, t_2) = \left[ t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} \right] / 2.$$

В выражении (6)  $n(\tau)$  — белый гаусовский шум. При  $H = 1/2$  получим винеровский процесс с приращением порядка  $|t_1 - t_2|^{1/2}$  и корреляционной функцией

$$K_{1/2}(t_1, t_2) = \left[ t_1 + t_2 - |t_1 - t_2| \right] / 2 = \min(t_1, t_2).$$

Структурная функция для  $B_H(t)$  задается соотношением  $\Psi(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|^{2H}$ .

Поэтому  $\Psi(t, t + \delta) = \delta^{2H}$ ,  $\delta > 0$  и, следовательно  $\alpha = 2H$ ,

$$D_{Hc} = 1/H, D_{Ha} = 2 - H. \quad (7)$$

В частности для винеровского процесса ( $H = 1/2$ ) имеем  $D_{Hc} = 2$ ,  $D_{Ha} = 3/2$ . Второе из приведенных соотношений для винеровского процесса широко известно. Первое же встречается гораздо реже. В [4] эта размерность называется аномальной и интерпретируется как размерность следа многомерного броуновского движения.

Другие примеры расчета размерностей гауссовских случайных процессов, результаты моделирования, и способ оценки размерности по результатам моделирования приведены в [6].

### Модель радиосистемы с повторными требованиями

Исследуем фрактальные свойства трафика радиосистем с повторными вызовами, каковыми являются, например, системы радиотелефонной связи. Радиотехническая подсистема радиотелефонной системы связи состоит из подсистемы передачи служебной информации (обеспечивающей регистрацию и соединение пользователей) и подсистемы обслуживания требований (обеспечения разговора). Рассмотрим модель, описывающую взаимодействие радиотехнической подсистемы передачи служебной информации и подсистемы массового обслуживания.

Ввиду наличия шумов в радиоканале радиотехническая подсистема передачи служебной информации подвержена ошибкам. Их вероятностные характеристики при определенных

предположениях определяются отношением сигнал-шум и принятым способом кодирования служебного сообщения (кодограммы). Сбои при передаче кодограммы приводят к возникновению повторных запросов на обслуживание в подсистему массового обслуживания. Запросы должны регистрироваться и обслуживаться, поэтому повторные требования возникают также в связи с занятостью устройства регистрации в дальнейшем считаемого одноканальным.

Структура рассматриваемой подсистемы передачи служебной информации представлена на рис. 1. Здесь 1 — источник требований на обслуживание (нагрузки), 2 — приемник служебной информации, 3 — одноканальное устройство регистрации требований на обслуживание.

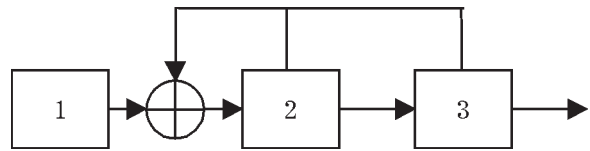


Рис. 1

В схеме рис. 1 считается, что источник генерирует пуассоновский поток первичных требований с интенсивностью  $\lambda$ , которые обслуживаются устройством регистрации случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром равным единице ( $\mu = 1$ ). Если устройство регистрации занято, то возникают повторные требования на обслуживание. Для описания поведения абонента при отказе в обслуживании используем модель абсолютно настойчивого пользователя, повторяющего требование до тех пор, пока оно не будет обслужено. Число повторных требований в единицу времени задается соотношением  $Y = Y_1 Y_2$ , где  $Y_1$  — число источников повторных вызовов, а  $Y_2$  — число требований в единицу времени, создаваемых одним источником, генерирующим пуассоновский поток с интенсивностью  $\nu$ . Число повторных требований в момент времени  $t$  задается соотношением

$$Z(t) = \int_0^t Y(t - \tau) d\tau. \quad (8)$$

Для системы, представленной на рис. 1, могут быть получены динамические уравнения для временной зависимости среднего (по ансамблю) числа обслуженных  $x(t)$  и повторных  $y(t)$  требований в единицу времени. Поскольку их вывод не является целью настоящей работы,

опишем кратко способ получения уравнений. На основе уравнений для переходных вероятностей [8 и др.] выводятся законы сохранения средних значений количества обслуженных и повторных вызовов, что позволяет получить следующие соотношения для первоначально пустой системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= q\lambda + \nu y - x - (1 + \nu) \left( \frac{x^2}{1-x} + \frac{p}{q} x \right), \\ \dot{y} &= -\nu y + (1 + \nu) \left( \frac{x^2}{1-x} + \frac{p}{q} x \right), \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $p$  — вероятность ошибок при передаче служебного сообщения,  $q = 1 - p$ ,  $\lambda$  и  $\nu$  — интенсивность потока первичных и повторных требований, а среднее время обслуживания требования полагается равными единице ( $\mu = 1$ ). Стационарное решение этой системы

$$x_0 = q\lambda \quad y_0 = \frac{\nu + 1}{\nu} \left( \frac{q^2 \lambda^2}{1 - q\lambda} + p\lambda \right).$$

На рис. 2 приведены типичные графики зависимостей  $x(t)$  и  $y(t)$ . Исследования системы (9) показали, что при  $p \neq 0$  она имеет единственную стационарную точку — устойчивый узел в точке  $(x_0, y_0)$  при  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \nu < \infty$ . Из рис. 2 и результатов исследования (9) следует, что характерные времена сходимости к устойчивому состоянию равновесия существенно различаются для  $x(t)$  и  $y(t)$  (на 1—2 порядка). Таким образом, если стационарное состояние обслуженной нагрузки  $x(t)$  достигается достаточно быстро, то «очередь» из повторных требований долго находится в неравновесном состоянии. Следует отметить, что соотношения (9) достаточно просто могут быть обобщены для произвольного распределения времени обслуживания требований и произвольного типа поведения устойчивого пользователя.

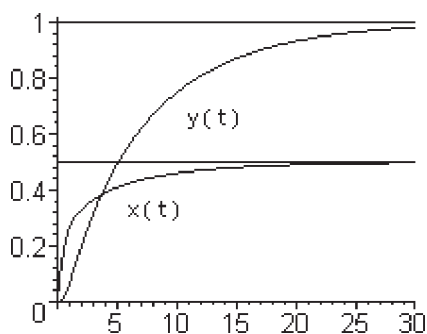


Рис. 2

На рис. 3 приведены зависимости  $x(t)$  и  $y(t)$ , построенные в двойном логарифмическом масштабе. Как следует из рисунка, при  $x < 0,5$   $x(t) \sim t^\beta$  ( $\beta \sim 1$ ) и  $y(t) \sim t^\alpha$  ( $\alpha \sim 3$ ).

Оценим фрактальную размерность процесса  $Z(t)$  (8) при высокой интенсивности потока поступающих требований. Поскольку каждый источник повторных требований генерирует пуассоновский поток с интенсивностью  $\nu$ , то зависимость числа требований от времени описывается пуассоновским процессом. При больших интенсивностях он аппроксимируется диффузионным винеровским процессом. Поэтому число требований за малый интервал времени (приращения винеровского процесса) есть гауссовский белый шум и, следовательно, в рассматриваемом приближении  $Y_2(t) = n(t)$ .

В связи с существенным различием характерных времен изменения процессов  $Y_1(t)$  и  $Y_2(t)$  в (8) можно приближенно заменить  $Y_1(t)$  на среднее число  $\langle Y_1(t) \rangle$  источников поступающих требований в момент  $t$ . Поэтому в силу стационарности  $n(t)$  соотношение (8) может быть записано в виде интеграла Дюамеля

$$Z(t) = \int_0^t h(t - \tau)n(\tau)d\tau, \quad h(t) = \langle Y_1(t) \rangle,$$

где  $n(t)$  — импульсная характеристика. Решения системы уравнений (9) определяют переходные процессы первоначально пустой системы, однако по ним можно оценить и характеристики переходного процесса в непустой системе. В самом деле, среднее число повторных требований в момент времени  $t$  возрастает пропорционально  $y(t)$  и убывает как  $x(t)$  (за счет роста числа обслуженных требований), т.е. пропорционально  $t^{\alpha-\beta}$ . Поэтому среднее число повторных требований в единицу времени (производная) задает переходную характеристику системы  $g(t) \sim t^{\alpha-\beta-1}$ . Поскольку  $h(t) = g'(t)$ , то окончательно получим

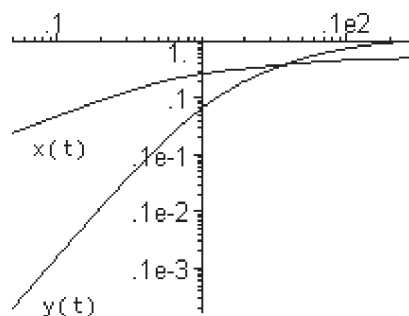


Рис. 3

$$Z(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \beta - 2} n(\tau) d\tau, \quad (10)$$

выражение, определяющее модель числа повторных требований в момент времени  $t$  на основе характеристик решения системы уравнений (9) в условиях высокой интенсивности потока поступающих и повторных требований.

В соответствии с (10)  $Z(t)$  представляет собой процесс фрактального броуновского движения (6) с показателем Херста

$$H = \alpha - \beta - 3/2 \quad (11)$$

и хаусдорфовой самоафинной размерностью  $D_{Ha} = 2 - H$ . Система уравнений (9) может быть решена численно. Например при  $\lambda = 0.75$ ,  $\nu = 10$ ,  $\mu = 1$ ,  $p = 0$  получим  $\alpha \approx 2.86$ ,  $\beta \approx 0.96$  и  $H \approx 0.4$ .

**Имитационное моделирование**

Проиллюстрируем результаты теоретического расчета с помощью имитационного моде-

лирования системы рис. 1 при  $p = 0$ . Программа имитационного моделирования радиосистемы с повторными вызовами реализована на основе событийного подхода [9 и др.] и выполнена в виде консольного приложения для Delphi. Поскольку состояние системы изменяется лишь при приходе и обслуживании очередного требования, то моменты наступления этих событий планировались в соответствии с заданными вероятностными распределениями и помещались в календарь событий. Он представляет собой односторонний список записей, реализованный с помощью динамических переменных. При каждом продвижении времени модели в соответствии с записями в календаре выполняется одно из двух событий — приход нового требования или обслуживание.

На рис. 4—6 приведены результаты моделирования. Рис. 4 задает зависимость числа повторных требований на обслуживание в единицу времени от времени при  $\lambda = 0.75$ ,  $\nu = 10$ ,  $\mu = 1$

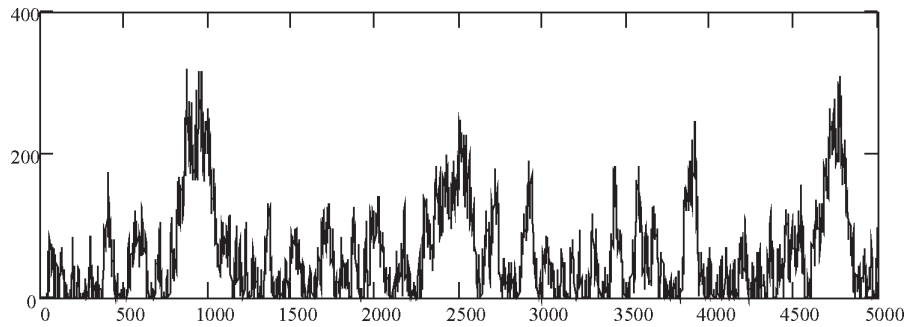


Рис. 4

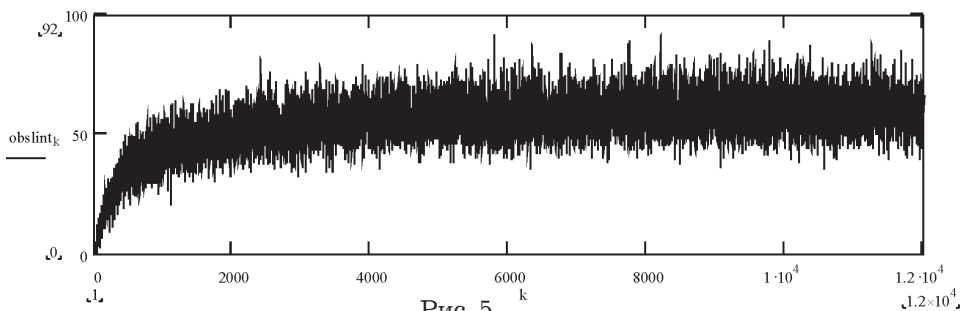


Рис. 5

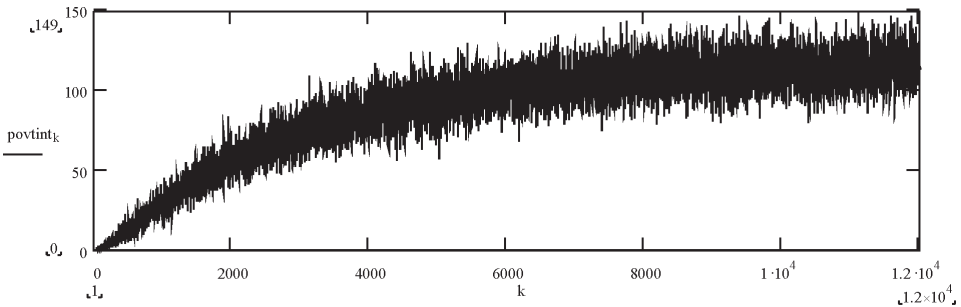


Рис. 6

и времени работы 5000. Приведенная реализация имеет самоподобную структуру, характерную для трафика сетей передачи данных [1—3 и др.]. На рис. 5, 6 приведены зависимости обслуженной и повторной нагрузки от времени, построенные по 50000 реализациям. Средние значения обслуженной и повторной нагрузок качественно совпадают с теоретическими результатами (рис. 2), а наличие флуктуирующих составляющих с переменной дисперсией и малым временем корреляции подтверждает правомерность теоретических приближений, сделанных в предыдущем разделе.

Оценка фрактальных размерностей реализаций случайных процессов, полученных в результате моделирования производилась двумя способами

– на основе расчета статистики  $R/S$  [3 и др.];

– по определению размерности Хаусдорфа—Безиковича [6].

На рис. 7 приведены зависимости логарифма нормированного размаха ( $R/S$ ) от логарифма длины серии, построенная по реализации рис. 4 длиной 8192 отсчета, линейная аппроксимация полученной зависимости (сплошная линия) и зависимость статистики  $R/S$  для винеровского процесса (штриховая линия). На рис. 8 приведены зависимости  $s$ -длины (2), (3) от  $s$ , построенные по 4096 точкам реализации рис. 4 для различных интервалов выборки [6]. Самоафинная размерность определяется координатами точки пересечения кривых. Оба рассмотренные метода дают значения  $H \approx 0.4$ ,  $D_{Ha} \approx 1.6$  хорошо совпадающие с результатами теоретического анализа.

### Выводы

В работе показано теоретически и доказано экспериментально, что радиосистема с повторными вызовами и одноканальным устройством обслуживания имеет фрактальный трафик с  $H \neq 1/2$  даже при выполнении классических предположений об экспоненциальности распределения времени обслуживания требований и пуассоновском входном потоке однотипных требований. Это связано с большим временем установления стационарного состояния повторных требований.

Полученные значения показателя Херста ( $H < 1/2$ ) отличаются от результатов измерений в сетях передачи данных ( $H > 1/2$ ). Ско-

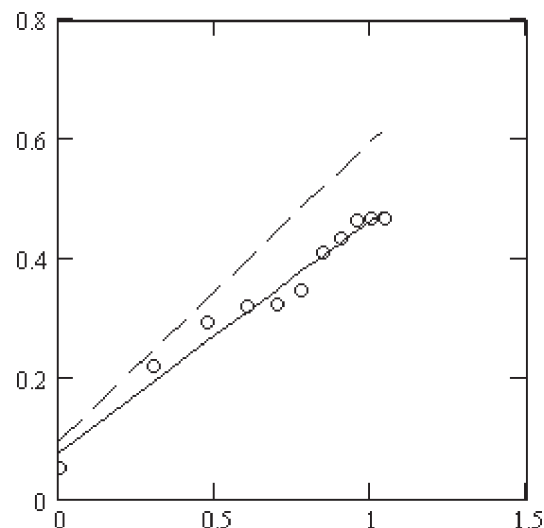


Рис. 7

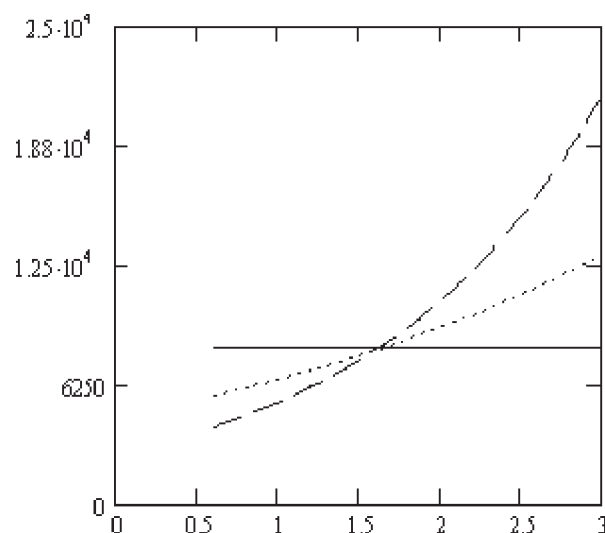


Рис. 8

рее всего это связано с тем, что в работе рассмотрено одноканальное устройство обслуживания. Однако приведенные во втором разделе результаты объясняют, почему для моделирования самоподобного трафика хорошо подходит обобщенное броуновское движение.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыбаков Б. С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса // Радиотехника, 1999, № 5 С. 24—31.
2. Tsybakov B., Georganas N. P. Self-Similar Processes in communications networks // IEEE Trans. on Inform. Theory, V. 44, № 5, September 1998, p. 1713—1725.
3. Taqqu M. S., Teverovsky V., Willinger W. Is network traffic self-similar or multifractal? // Preprint, 1996, 15 p.

4. *Мандельброт Б.* Самоафинные фрактальные множества. Ч. 1—3 в кн. “Фракталы в физике”, М.: — Мир, 1988.

5. *Losa J. L., Masoliver J.* Fractal dimension for Gaussian colored processes //Phys. Rev. A, V. 42, № 8, October 1990, p. 5011—5014.

6. *Зюльков И. А., Парфенов В. И.* Фрактальные размерности гауссовских случайных процессов // Тр. 6 Междунар. н.-т. конф. «Радиолокация, навигация, связь», Воронеж, 2000, Т. 1. С. 261—266.

7. Математическая энциклопедия, Т. 5, М. — Советская энциклопедия, 1985. — 1247 с.

8. *Cohen J. W.* Basic problems of telephone traffic theory and influence of repeated calls //Phillips Telecommunication Review Vol. 18. № 2, 1957, p. 49—100.

9. *Прицкер А.* Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ-II, М. — Мир, 1987. — 646 с.