УДК 519.854.33

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К КАЧЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ НА ПЛОСКОСТИ СЛОЖНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РЕНТНООРИЕНТИРОВАННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

© 2002 г. Н. А. Жданкина

Воронежский государственный университет

Предлагается динамическая модель, обеспечивающая сопряжение интересов торговых агентов и фирмы. Главной особенностью модели является введение оригинального параметра, определяющего долю от объема заключенных договоров, которую должен получать торговый агент, чтобы обеспечить максимизацию суммарного дохода фирмы. Доказана теорема о существовании единственной точки устойчивого роста для двумерной интерпретации данной модели и две вспомогательные леммы. Определен вид особой точки и достаточные условия ее существования.

Важнейшей проблемой успешной жизнедеятельности крупной фирмы в условиях переходной экономики является ее выживание. Проблема выживания многоаспектна. Ее решение связано с исследованиями эффективной тарифной, кредитной, банковской, рекламной, информационной политики управления и т.д. Некоторые из этих направлений достаточно хорошо изучены, например, влияние рекламы на сбыт и эффект конкуренции достаточно хорошо освещены в [11—14], другие же — нет, такие, например, как сопровождение эффективной экономической политики фирмы. Однако, с нашей точки зрения, особого внимания требуют следующие два направления: совершенствование работы с потребителями, т.к. именно их средства являются основой поступления надежного денежного потока; стимулирование деятельности собственных сотрудников, отвечающих за продвижение товара фирмы.

Рассматривается фирма, состоящая из нескольких отдельных подразделений с независимым управлением и/или территориально разделенных, занимающихся реализацией имеющейся в их распоряжении продукции. Каждое подразделение имеет свой отдел сбыта, проводит независимую маркетинговую политику и имеет в своем распоряжении собственный оборотный капитал, при этом собственник отделен от управления организацией и распоряжается только принадлежащей ему частью прибыли. Будем считать, что фирма имеет прочные торговые связи с потребителями и торговыми посредниками, т.е. собственный достаточно устойчивый рынок сбыта. Предполагается, что каждое подразделение отвечает за сбыт определенной категории продукции фирмы и реализует эту продукцию с помощью группы менеджеров, являющихся штатными сотрудниками отделов сбыта подразделений, и торговых агентов, доход которых складывается из двух составляющих: минимального гарантированного заработка, выплачиваемого из фонда заработной платы фирмы, и доли от объема продаж, осуществляемых на основе договоров с потребителями, обслуживаемыми именно этими агентами. Таким образом, будем считать, что отдел сбыта каждого подразделения имеет две группы сотрудников:

- штатных сотрудников (бухгалтеров, управленческий персонал и т.д.);
- сотрудников, работающих по контракту (торговых агентов).

Всех торговых агентов отдела будем рассматривать объединенными в группу и предполагать, что политика выплат администрации относительно каждого из входящих в эту группу агентов одинакова. Эту группу впредь будем называть обобщенным торговым агентом (ОТА). Таким образом, ОТА — не физическое лицо, а некоторая их совокупность, которая образует динамически стабильную структуру в системе сложившихся экономических отношений внутри отдела. Фирмы с такой организацией системы сбыта будем называть фирмами с *рентноориентированным управлением процессом реализации продукции*.

Будем, кроме того, считать, что общая выручка фирмы, т.е. объем заключенных договоров, зависит от количества посещений ее клиентов торговыми агентами подразделений в текущем периоде. Зарплата торгового агента при этом складывается из доли от размера оборотного капитала данного отдела и размера премиального фонда вознаграждения работников. Математическая модель максимизации выручки для такой фирмы имеет вид:

$$J = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^M R_i(t)] e^{-rt} \right) dt \to \max, \tag{1}$$

$$J_i = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^M \beta_i [\mu_i R_i(t) + \gamma_i K_i(t) + c_i L(t)] e^{-rt} \right) dt \to \max, \quad i = 1..M$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^M (1-\mu_i) R_i(t) = \sum_{i=1}^M (\gamma_i K_i(t) + c_i L(t)) + W_L L(t) + \bar{\delta} K(t) + \pi_c K(t) + \frac{\partial K(t)}{\partial t}, \tag{2}$$

$$R(t) = \sum_{i=1}^M R_i(t) = \sum_{i=1}^M p_i F(K_i(t), L(t)) E_i(p_i, n_i), \tag{3}$$

$$W_i(t) = \gamma_i K_i(t) + c_i L_i(t), \tag{4}$$

$$\underline{W}_i \le W_i(t) \le \overline{W}_i,\ i = 1..M, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^M n_i (b_i + l_i d_i) \le \overline{B}, \tag{6}$$

$$0 \le n_i \le N_i \ \forall i, \tag{7}$$

и начальных условиях: $L(0) = L_0 > 0$, $K_i(0) = K_{i0} > 0$, $n_i(0) = n_{i0}$, где $t \in [0..T]$, $i \in [0..\mathrm{M}]$, $0 < \sum_{i=1}^M \mu_i < 1$;

$0 < \underline{\gamma}_i \le \gamma_i \le \bar{\gamma}_i; 0 < \underline{c}_i \le c_i \le \bar{c}_i; 0 < \sum_{i=1}^M \gamma_i + \bar{\delta} + \pi_c < 1.$

Здесь: $R(t)$ — функция реализации продукции фирмы, т.е. общий объем проданной потребителю продукции (в денежном выражении) за период t, $R_i(t)$ — функция реализации i-го отдела фирмы (количество продукции, проданной потребителю за период t); $K(t)$ — размер основного капитала фирмы в целом, $K_i(t)$ — размер основного капитала i-го подразделения; $L(t)$ — размер общего фонда оплаты труда работников, $W_i(t)$ — зарплата i-го торгового агента; r — положительный уровень дисконтирования; π_c — константа минимальной прибыли, а именно: π_c — прибыль держателей акций, если $\pi_c > 0$, и их потери, если $\pi_c < 0$, в расчете на единицу вложений; $\bar{\delta} K$ — амортизация, где $\bar{\delta}$ — уровень амортизации капитала $K(t)$; $\dfrac{\partial K(t)}{\partial t}$ — чистые инвестиции.

Управляющими параметрами здесь являются: γ_i — доля капитала i-го отдела, отведенная на покрытие расходов, связанных с процессом и обслуживанием заключения договоров на поставку продукции, c_i — коэффициент, характеризующий часть заработной платы агента, выделяемую ему из фонда оплаты труда; μ_i — доля i-го торгового агента в общем объеме продаж; n_i — количество посещений торговым агентом i-го клиента за определенный период времени; p_i — цена продукции для i-го клиента.

Введем функции: $E_i(p_i, n_i)$ — часть объема продукции i-го подразделения, которую можно реализовать по цене p_i соответствующему клиенту в результате n_i поездок, $F(K_i, L)$ — функция, характеризующая масштаб деятельности подразделения, т.е. объем продукции, имеющийся в распоряжении его отдела сбыта. Очевидно, что:

$$R_i(t) = p_i E_i(p_i, n_i) * F(K_i(t), L(t)) \ \forall i.$$

На основании полученных от группы экспертов субъективных оценок строятся общие оценки предпочтительности работы с каждым из клиентов (коэффициенты предпочтительности) — β_j, такие, что: $\beta_j > 0; \sum_{j=0}^M \beta_j = 1$.

В модели предполагается, что выручка, получаемая от каждого агента, делится на две части. Первая часть с весовым коэффициентом m_i в целевой функции состоит из дохода i-го торгового агента. Вторую часть с весом $(1 - m_i)$ составляют расходы на продолжение жизнедеятельности предприятия.

Ограничения системы имеют следующий экономический смысл: бюджетное ограничение (2) показывает, по каким статьям затрат распределяется доход фирмы; ограничение (3) определяет доход фирмы; ограничение (4) определяет зарплату торгового агента; ограничение (5) задает верхнюю и нижнюю границы затрат соответствующего отдела в текущем периоде на торгового агента (включающих в себя заработную плату, командировочные расходы и комиссионные, полученные от объема заключенных им договоров); и, наконец, ограничение (6) задает верхнюю границу на суммарный объем затрат фирмы в текущем периоде, связанных с выплатами торговым агентам.

Введем понятие *порядка динамической системы*, важное для дальнейшего изложения. Динамическая система вида (1)—(7) является *системой M-го порядка*, если фирма имеет ровно M подразделений, реализующих свою продукцию, т.е. i принимает значения от 1 до M. Сделаем, далее, некоторые дополнительные предположения.

1. Функция масштаба деятельности подразделения $F(K,L)$ является производственной функцией в смысле классического определения, т.е. однородной функцией первого порядка, удовлетворяющей следующим свойствам:
а) $F'_K(K,L) > 0$; $F''_L(K,L) > 0$;
б) $F''_K(K,L) < 0$; $F''_L(K,L) < 0$;
в) $F'_K(K,L) \to \infty$ для $K \to 0$;
г) $F'_K(K,L) > 0$ для $K \to \infty$.

2. Будем считать, что коэффициенты предпочтительности $\beta = 1$ для всех потребителей, а также, $c_i = \tilde{c}\ \forall i$, причем $\sum_{i=1}^{M} c_i = \bar{c} = const$.

Систему с так введенными предположениями назовем *динамической системой с регулированием спроса и безразличными предпочтениямии (ДСРС).*

Перейдем от многокритериальной задачи оптимального управления к однокритериальной, взяв в качестве целевой функции α-свертку критериев оптимальности. Рассмотрим систему второго порядка:

$$J = \int_0^T \Big(\Big[\alpha\big(\mu_1 R_1(t) + \mu_2 R_2(t)\big) + \alpha\big(\sum_{i=1}^{2} \gamma_i K_i(t) + \bar{c}L\big) + (1-\alpha)\big(R_1(t) + R_2(t)\big)\Big] e^{-rt} \Big) dt \to \max \quad (8)$$

при ограничениях:

$$(1-\mu_1)R_1(t) + (1-\mu_2)R_2(t) = \left(\sum_{i=1}^{2} \gamma_i K_i(t) + \bar{c}L(t)\right) + W_L L + \bar{\delta}K + \pi_c K + \frac{\partial K(t)}{\partial t}, \quad (9)$$

$$R(t) = \sum_{i=1}^{2} R_i(t) = \sum_{i=1}^{2} p_i F(K_i(t), L(t)) E_i(p_i, n_i), \quad (10)$$

$$W_i(t) = \gamma_i K_i(t) + \bar{c}L(t), i = 1..2, \quad (11)$$

$$\underline{W}_i \le W_i(t) \le \overline{W}_i, i = 1..2, \quad (12)$$

$$n_1(b_1 + l_1 d_1) + n_2(b_2 + l_2 d_2) \le \bar{B}, \quad (13)$$

$$0 \le n_i \le N_i, i = 1..2, \quad (14)$$

и начальных условиях: $L(0) = L_0 > 0$, $K_i(0) = K_{i0} > 0$, $n_i(0) = n_{i0}$, где $t \in [0..T]$, $0 < \mu_1 + \mu_2 < 1$; $0 < \underline{\gamma} \le \gamma_i \le \bar{\gamma}$; $0 < \gamma_1 + \gamma_2 + \bar{\delta} + \pi_c < 1$.

Модель представляет собой задачу оптимального управления с параметрами управления: γ_i, $\tilde{n}$, μ_i, n_i, p_i и управляющими функциями $K_i(t)$, $L(t)$. Для дальнейшего анализа и решения этой задачи применим принцип максимума Понтрягина. Для этого, учитывая тот факт, что производственная функция $F(K_i,L)$ однородна, построим функцию Гамильтона и канонические уравнения для задачи (8)—(14):

$$H(K, K_1, K_2, L, t) = \Phi(t)e^{-rt} + \lambda(t)\Psi(t), \quad (15)$$

где

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{2} (1-\alpha+\alpha\mu_i) p_i L(t) \varphi\Big(\frac{K_i(t)}{L(t)}\Big) E_i(p_i, n_i) + \alpha\Big(\sum_{i=1}^{2} \gamma_i K_i(t) + \bar{c}L(t)\Big);$$

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^{2} (1-\mu_i) p_i L(t) \varphi\Big(\frac{K_i(t)}{L(t)}\Big) E_i(p_i, n_i) - (\bar{\delta} + \pi_C)K(t) - (\bar{c} + W_L)L - \sum_{i=1}^{2} \gamma_i K_i(t),$$

$$\begin{cases} K'_t - \Psi(t) = 0 \\ \lambda'(t) = \lambda(t)\big(\bar{\delta} + \pi_c\big). \\ K(0) = K_0 \end{cases} \quad (16)$$

В результате исходная модель приводится к виду:

$$H(K, K_1, K_2, L, t) \to \max_{K_i, L} \quad (17)$$

при ограничениях:

$$\Omega \begin{cases} R(t) = \sum_{i=1}^{2} R_i(t) = \sum_{i=1}^{2} p_i F(K_i(t), L(t)) E_i(p_i, n_i), & (18) \\ W_i(t) = \gamma_i K_i(t) + \bar{c}L(t), i = 1..2, & (19) \\ \underline{W}_i \le W_i(t) \le \overline{W}_i, i = 1..2, & (20) \\ n_1(b_1 + l_1 d_1) + n_2(b_2 + l_2 d_2) \le \bar{B}\ , & (21) \\ 0 \le n_i \le N_i, i = 1..2, & (22) \end{cases}$$

и начальных условиях: $L(0)=L_0>0$, $K_i(0)=$ $=K_{i0}>0$, $n_i(0)=n_{i0}$, где $t\in[0..T]$, $0<\mu_1+\mu_2<1$; $0<\underline{\gamma}\le\gamma_i\le\overline{\gamma}$; $0<\gamma_1+\gamma_2+\overline{\delta}+\pi_c<1$.

При этом должна выполняться система канонических уравнений (16).

В каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно величин K, K_1, K_2, L. Заметим, что на значения K_1, K_2, L не накладываются дополнительные ограничения, за исключением их неотрицательности. Это приводит к необходимым условиям существования внутреннего максимума, а именно: $\dfrac{\partial H}{\partial L}=0, \dfrac{\partial H}{\partial K_1}=0, \dfrac{\partial H}{\partial K_2}=0$,

или, в развернутом виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial L}(t)e^{-rt}+\lambda(t)\dfrac{\partial\Psi}{\partial L}(t)=0; \\ \left[(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1\varphi'(\dfrac{K_1}{L})E_1+\alpha\gamma_1\right]e^{-rt}+ \\ +\lambda(t)((1-\mu_1)p_1\varphi'(\dfrac{K_1}{L})E_1-\gamma_1=0; \\ \left[(1-\alpha+\alpha\mu_2)p_2\varphi'(\dfrac{K_2}{L})E_2+\alpha\gamma_2\right]e^{-rt}+ \\ +\lambda(t)((1-\mu_2)p_2\varphi'(\dfrac{K_2}{L})E_2-\gamma_2=0. \end{cases} \tag{23}$$

Обозначим: $k(t)=K(t)/L(t)$ и, дифференцируя по t, получим:

$$k'(t)=\frac{K'(t)}{L(t)}-\frac{K(t)}{L(t)}\frac{L'(t)}{L(t)}.$$

Отсюда, учитывая, что $l(t)=\dfrac{L'(t)}{L(t)}$, имеем:

$$\frac{K'(t)}{L(t)}=k'(t)+k(t)l(t). \tag{24}$$

Для упрощения выписанных выше выражений введем еще одно обозначение:

$$z(k_j(t))=\varphi'(k_j(t))k_j(t)-\varphi(k_j(t)) \quad j=1,\ 2, \tag{25}$$

откуда следует, что производная $z_t'(k_j(t))=$ $=\varphi''(k_j(t))k_j'(t)k_j(t)$. В результате имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial L}(t)=-\sum_{i=1}^{2}(1-\alpha+\alpha\mu_i)p_i z(k_i(t))E_i(p_i,n_i)+\alpha\overline{c};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial L}(t)=-\sum_{i=1}^{2}(1-\mu_i)p_i z(k_i(t))E_i(p_i,n_i)-(\overline{c}+W_L),$$

Подставляя полученные выражения в (23), и, учитывая введенные обозначения, перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{2}(1-\alpha+\alpha\mu_i)p_i z(k_i)E_i-\alpha\overline{c}\right)e^{-rt}+ \\ +\lambda(t)\left(\sum\limits_{i=1}^{2}(1-\mu_i)p_i z(k_i)E_i+\overline{c}+W_L\right)=0; \\ \left((1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1\varphi'(\dfrac{K_1}{L})E_1+\alpha\gamma_1\right)e^{-rt}+ \\ +\lambda(t)((1-\mu_1)p_1\varphi'(\dfrac{K_1}{L})E_1-\gamma_1)=0; \\ \left((1-\alpha+\alpha\mu_2)p_2\varphi'(\dfrac{K_2}{L})E_2+\alpha\gamma_2\right)e^{-rt}+ \\ +\lambda(t)((1-\mu_2)p_2\varphi'(\dfrac{K_2}{L})E_2-\gamma_2)=0. \end{cases} \tag{26}$$

Функция $\varphi(k)$ построена на основе $F(K/L,1)$, и поэтому для нее выполняются следующие свойства:

а) $\varphi'(k)>0$;
б) $\varphi''(k)<0$;
в) $\varphi'(k)\to\infty$ для $k\to 0$;
г) $\varphi'(k)\to 0$ для $k\to\infty$.

Объединяя (16) и (26), и учитывая введенные обозначения, а также проделав некоторые преобразования, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} k'(t)-\sum\limits_{i=1}^{2}(1-\mu_i)p_iE_i\varphi(k_i(t))+(\overline{\delta}+\pi_c+l)k(t)+ \\ +(c+W_L)+\sum\limits_{i=1}^{2}\gamma_i k_i(t)=0; & 27 \\ \lambda'(t)=\lambda(t)\left(\overline{\delta}+\pi_c\right); & 28 \\ \lambda(t)=-\dfrac{\left[(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t))+\alpha\gamma_1\right]e^{-rt}}{(1-\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t))-\gamma_1}; & 29 \\ \lambda(t)=-\dfrac{\left[(1-\alpha+\alpha\mu_2)p_2E_2+\varphi'(k_2(t))\alpha\gamma_2\right]e^{-rt}}{(1-\mu_2)p_2E_2+\varphi'(k_2(t))-\gamma_2}; & 30 \\ \lambda(t)=-\dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{2}(1-\alpha+\alpha\mu_i)p_iE_iz(k_i(t))-\alpha\overline{c}\right]e^{-rt}}{\sum\limits_{i=1}^{2}(1-\mu_i)p_iE_iz(k_i(t))+\overline{c}+W_L}; & 31 \\ k_i(0)=k_{i0},\ n_i(0)=n_{i0},\ i=1..2. & 32 \end{cases}$$

Продифференцируем (29) по t:

$$\lambda'(t)=\frac{e^{-rt}\gamma_1p_1E_1(p_1,n_1)\varphi''(k_1(t))k_1'(t)}{\left[(1-\mu_1)p_1E_1(p_1,n_1)\varphi'(k_1(t))-\gamma_1\right]^2}-r\lambda(t). \tag{33}$$

Подставляя в (33) соотношения (28), (29), получим, что темп изменения капиталовооруженности первого отдела вычисляется по формулам:

$$k_1'(t)=-\frac{(r+\overline{\delta}+\pi_c)U_1(t)V_1(t)}{\gamma_1p_1E_1\varphi''(k_1(t))}, \tag{34}$$

где: $U_1(t) = (1-\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t)) - \gamma_1$,
$V_1(t) = (1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t)) + \alpha\gamma_1$.

Проводя аналогичные преобразования, получим, что темп изменения капиталовооруженности второго отдела имеет вид:

$$k_2'(t) = -\frac{(r+\bar{\delta}+\pi_c)U_2(t)V_2(t)}{\gamma_2 p_2 E_2\varphi''(k_2(t))}, \qquad (35)$$

где: $U_2(t) = (1-\mu_2)p_2E_2\varphi'(k_2(t)) - \gamma_2$,
$V_2(t) = (1-\alpha+\alpha\mu_2)p_2E_2\varphi'(k_2(t)) + \alpha\gamma_2$.

Таким образом, если заданы параметры $\mu_1, \mu_2, \bar{c}, \gamma_1, \gamma_2$, то может быть рассчитана капиталовооруженность по каждому отделу реализации продукции.

Справедлива следующая теорема.

Теорема I.

Система:

$$\begin{cases} k_1'(t) = -\dfrac{(r+\bar{\delta}+\pi_c)U_1(t)V_1(t)}{\gamma_1 p_1 E_1\varphi''(k_1(t))}; \\ k_2'(t) = -\dfrac{(r+\bar{\delta}+\pi_c)U_2(t)V_2(t)}{\gamma_2 p_2 E_2\varphi''(k_2(t))}; \end{cases} \qquad (36)$$

1) имеет единственную особую точку;

2) эта точка может представлять собой *устойчивый узел, неустойчивый узел* или *седло.*

Доказательство

Доказательство теоремы будем проводить в два этапа. На первом этапе докажем, что система (36) имеет единственную особую точку. Найдем особые точки системы, т.е. такие значения капиталовооруженностей (k_1, k_2), для которых:

$$\begin{cases} k_1'(t) = 0; \\ k_2'(t) = 0. \end{cases} \qquad (37)$$

Для этого первое уравнение системы: $k_1'(t) = 0$ перепишем в развернутом виде:

$$\frac{(r+\bar{\delta}+\pi_c)U_1(t)V_1(t)}{\gamma_1 p_1 E_1\varphi''(k_1(t))} = 0. \qquad (*)$$

Выделим числитель дроби:
$(r+\bar{\delta}+\pi_c)U_1(k_1)V_1(k_1) = 0 \Leftrightarrow U_1(k_1) = 0$ или $V_1(k_1) = 0$.
В силу того, что функции $U_1(k_1)$ и $V_1(k_1)$ зависят от k_1 косвенно, через $\varphi'(k_1)$, решим данные уравнения относительно $\varphi'(k_1)$. Обозначим эту величину через x, а $r+\bar{\delta}+\pi_c = \bar{r}$. Тогда уравнения примут следующий вид:

$$(1-\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t)) - \gamma_1 = 0,$$
$$(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t)) + \alpha\gamma_1 = 0. \qquad (38)$$

Отсюда следует, что уравнение (*) имеет два действительных корня, принимающих разные знаки:

$$x_1 = \frac{\gamma_1}{(1-\mu_1)p_1E_1};\ x_2 = -\frac{\alpha\gamma_1}{(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1}.$$

В силу монотонности функции $\varphi'(k_1)$, уравнение: $\varphi'(k_1) = x$ имеет единственный корень. Учитывая условие неотрицательности функции $\varphi'(k_1)$ на всей области определения, точку x_2, меньшую нуля, можно отбросить. Затем для оставшейся точки из уравнения $\varphi'(k_1) = x$ найдем искомый корень k_1^0.

Аналогично показывается существование двух различных корней для второго уравнения системы: $k_2'(t) = 0$. Обозначим их через k_2^0 и k_2^1. В силу того, что функция $\varphi'(k_2)$ неотрицательна, можно отбросить один из корней, соответствующий $\varphi'(k_2) < 0$. Таким образом, первоначальная система имеет одну особую точку или состояние равновесия: (k_1^0, k_2^0). Первый этап теоремы доказан.

Перейдем к доказательству второго этапа. Покажем, что найденная особая точка может представлять собой *устойчивый узел, неустойчивый узел* или *седло*.

Для дальнейшего анализа введем обозначения: $k_1'(t) = P(k_1^0, k_2^0)$, $k_2'(t) = Q(k_1^0, k_2^0)$, $\sigma = P_{k1}'(k_1^0, k_2^0) + Q_{k2}'(k_1^0, k_2^0)$. Построим матрицу первых производных для системы (36):

$$\Delta(k_1^0, k_2^0) = \begin{vmatrix} P_{k1}'(k_1^0, k_2^0) & P_{k2}'(k_1^0, k_2^0) \\ Q_{k1}'(k_1^0, k_2^0) & Q_{k2}'(k_1^0, k_2^0) \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} P_{k1}'(k_1^0, k_2^0) & 0 \\ 0 & Q_{k2}'(k_1^0, k_2^0) \end{vmatrix} =$$
$$= P_{k1}'(k_1^0, k_2^0) * Q_{k2}'(k_1^0, k_2^0);$$

$$P_{k1}'(k_1^0, k_2^0) =$$
$$= \bar{r}\left(1 - 2\alpha(1-\mu_1) - \frac{(1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1^0)}{\gamma_1}\right) *$$
$$* \left(1 - \frac{\varphi'(k_1^0)\varphi'''(k_1^0)}{(\varphi''(k_1^0))^2}\right) - \bar{r}\left(\frac{\alpha\gamma_1\varphi'''(k_1^0)}{p_1E_1(\varphi''(k_1^0))^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1^0)}{\gamma_1}\right);$$

$$Q'_{k2}(k_1{}^0,k_2{}^0)=$$
$$=\bar{r}\left(1-2\alpha(1-\mu_2)-\frac{(1-\mu_2)(1-\alpha+\alpha\mu_2)p_2E_2\varphi'(k_2{}^0)}{\gamma_2}\right)*$$
$$*\left(1-\frac{\varphi'(k_2{}^0)\varphi'''(k_2{}^0)}{(\varphi''(k_2{}^0))^2}\right)-$$
$$-\bar{r}\left(\frac{\alpha\gamma_2\varphi'''(k_2{}^0)}{p_2E_2(\varphi''(k_2{}^0))^2}+\frac{(1-\mu_2)(1-\alpha+\alpha\mu_2)p_2E_2\varphi'(k_2{}^0)}{\gamma_2}\right).$$

Характеристическое уравнение [4, стр. 68], очевидно, может быть записано в виде: $\lambda^2-\sigma\lambda+\Delta=0$. Состояние равновесия, для которого $\Delta(k_1{}^0,k_2{}^0)\neq 0$, называется простым. Для простого состояния равновесия возможны следующие случаи:

I. $\Delta>0,\ \sigma^2-4\Delta>0$, корни характеристического уравнения действительны и одинаковых знаков. В этом случае состояние равновесия представляет собой *устойчивый узел*, когда $\lambda_1<0,\ \lambda_2<0$, и *неустойчивый узел*, когда $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0$.

II. $\Delta<0$, корни характеристического уравнения действительны и различных знаков: $\lambda_1\lambda_2<0$. Состояние равновесия является *седлом*.

III. $\Delta>0,\ \sigma^2-4\Delta<0,\ \sigma\neq 0$, корни характеристического уравнения комплексные сопряженные: $\lambda_1=\alpha+i\beta,\ \lambda_2=\alpha-i\beta$, причем действительные части этих корней отличны от нуля. В этом случае состояние равновесия является *фокусом* и при этом *устойчивым*, когда $\alpha<0$, и *неустойчивым*, когда $\alpha>0$.

Заметим, что ситуация, когда выражение $\sigma^2-4\Delta<0$, невозможна, т.к. $\sigma^2-4\Delta=(P'_{k1}-Q'_{k2})^2\geq 0$, поэтому состояние равновесия фокусом быть не может. Учитывая это, будем исследовать только знак Δ. Случай I, т.е. узел, имеет место, если:

$$\Delta>0\Leftrightarrow P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)*Q'_{k2}(k_1{}^0,k_2{}^0)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)>0,\ Q'_{k2}(k_1{}^0,k_2{}^0)>0;\\ P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)<0,\ Q'_{k2}(k_1{}^0,k_2{}^0)<0.\end{cases}$$

Аналогичным образом, случай II, или седло, имеет место, если:

$$\Delta<0\Leftrightarrow P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)*Q'_{k2}(k_1{}^0,k_2{}^0)<0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)<0,\ Q'_{k2}(k_1{}^0,k_2{}^0)>0;\\ P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)>0,\ Q'_{k2}(k_1{}^0,k_2{}^0)<0.\end{cases}$$

Т.о., теорема доказана.

Покажем, далее, что динамическая система ДСРС вида (8)—(14) имеет единственную точку устойчивого роста. Для доказательства последующей ниже теоремы предварительно докажем две следующие важные леммы:

Лемма 1.

Пусть выполнено условие: $\varphi'''(k_1)<0$, тогда существуют такие параметры управления $\mu_1,\ \gamma_1$, что $P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)>0$.

Доказательство.

В силу того, что общий знаменатель выражения $P'_{k1}(k_1{}^0,k_2{}^0)$ положителен, исследуем знак числителя:

$$\left(\gamma_1-2\alpha\gamma_1(1-\mu_1)-(1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1^0)\right)\times$$
$$\times p_1E_1\left((\varphi''(k_1^0))^2-\varphi'(k_1^0)\varphi'''(k_1^0)\right)-$$
$$-\left(\alpha\gamma_1^2\varphi'''(k_1^0)+(1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)\times\right.$$
$$\left.\times(p_1E_1)^2\varphi'(k_1^0)(\varphi''(k_1^0))^2\right)>0.$$

Для осуществления дальнейших преобразований перепишем неравенство в виде:

$$\left(\gamma_1-2\alpha\gamma_1(1-\mu_1)-2(1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1^0)\right)\times$$
$$\times p_1E_1\left((\varphi''(k_1^0))^2-\varphi'(k_1^0)\varphi'''(k_1^0)\right)-$$
$$-\left(\alpha\gamma_1^2+(1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)\times\right.$$
$$\left.\times(p_1E_1)^2(\varphi'(k_1^0))^2\right)\varphi'''(k_1^0)>0.$$

Обозначим для удобства: $D_1=\varphi''(k_1{}^0))^2-\varphi'(k_1{}^0)\varphi'''(k_1{}^0)$. Заметим, что, если имеет место $\varphi'''(k_1)<0$, то, соответственно, $D_1=\varphi''(k_1{}^0))^2-\varphi'(k_1{}^0)\varphi'''(k_1{}^0)>0$. (Здесь учитывается предположение о том, что функция выпуска является монотонно возрастающей функцией капиталовооруженности, т.е. $\varphi'(k_1{}^0)>0$). В силу того, что множитель $\left(\alpha\gamma_1{}^2+(1-\mu_1)(p_1E_1)^2(\varphi'(k_1{}^0))^2\right)$ положителен, остается исследовать знак:

$$\gamma_1-2\alpha\gamma_1(1-\mu_1)-2(1-\mu_1)(1+\alpha-\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1{}^0). \tag{39}$$

Перепишем (39) в виде:

$$\gamma_1-2(1-\mu_1)\left(\alpha\gamma_1+p_1E_1(1-\alpha+\alpha\mu_1)\varphi'(k_1{}^0)\right)>0$$

Т.к. $1-\alpha+\alpha\mu_1<1$, то $\gamma_1>2(1-\mu_1)\times\left(\alpha\gamma_1+p_1E_1\varphi'(k_1{}^0)\right)$. Тогда всегда можно подобрать такое μ, что:

$$\mu_1>1-\frac{\gamma_1}{2\left(\alpha\gamma_1+p_1E_1\varphi'(k_1{}^0)\right)}. \tag{40}$$

В качестве m_1 можно взять, например, величину: $\mu_1 = 1 - \dfrac{\gamma_1}{2\left(\alpha\gamma_1 + p_1 E_1 \varphi'(0)\right)}$. Заметим, что при этом параметр γ_1 может быть любым числом, меньшим 1. Таким образом, существуют такие параметры управления μ_1, γ_1, что $P'_{k1}(k_1^0, k_2^0) > 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $0 < \varphi'''(k) \le C_1$ $|\varphi''(k)| \ge C_2$ $\forall k;$;

2) $C_1 \varphi'(0) < C_2{}^2$

тогда существуют такие параметры управления μ_1, γ_1, что $P'_{k1}(k_1{}^0, k_2{}^0) > 0$.

Доказательство.

Обозначим, как и в предыдущей лемме: $D_1 = \varphi''(k_1{}^0))^2 - \varphi'(k_1{}^0)\varphi'''(k_1{}^0)$. Заметим, что:

1) $|\varphi''(k)| \le |\varphi''(0)|$, $\forall k$, так как $\varphi''(k) < 0$, и $\varphi''(k)$ — монотонно возрастающая функция, в силу положительности ее производной $\varphi'''(k)$.

2) $\varphi'(k) \le \varphi'(0)$, $\forall k$, так как $\varphi'(k) > 0, \varphi'(k)$ — монотонно убывающая функция, в силу отрицательности производной $\varphi''(k)$.

В этом случае: $\varphi''(k)^2 - \varphi'(k)\varphi'''(k) > 0$, $0 < C_2^2 - C_1\varphi'(0) < D_1$ $\forall k$ и, в силу того, чтослагаемое: $-(\alpha\gamma_1^2 + (1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)(p_1E_1)^2(\varphi'(k_1^0))^2)\times$ $\times\varphi'''(k_1^0) < 0$, знак выражения (39) должен быть положителен. При выполнении условия 3 леммы всегда можно подобрать параметр m_1 из неравенства (40), чтобы это имело место. Теперь найдем условия, при которых положителен знак всего выражения в целом, т.е.:

$$\left(\gamma_1 - 2\alpha\gamma_1(1-\mu_1) - 2(1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1^0)\right)\times$$
$$\times p_1E_1\left((\varphi''(k_1^0))^2 - \varphi'(k_1^0)\varphi'''(k_1^0)\right) -$$
$$-\left(\alpha\gamma_1^2 + (1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)(p_1E_1)^2(\varphi'(k_1^0))^2\right)\varphi'''(k_1^0) > 0$$

Для этого выберем параметр μ_1 так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\mu_1 > 1 - \frac{\gamma_1\left(1 - \dfrac{\alpha\gamma_1\varphi'''(k_1^0)}{D_1p_1E_1}\right)}{2\left(\alpha\gamma_1 + p_1E_1\varphi'(k_1^0)\left(1 + \dfrac{\varphi'(k_1^0)\varphi'''(k_1^0)}{2D_1}\right)\right)}. \qquad (41)$$

Выберем параметр μ, отвечающий одновременно неравенствам (40) и (41). Очевидно, что:

$$\frac{\gamma_1\left(1 - \dfrac{\alpha\gamma_1\varphi'''(k_1^0)}{D_1p_1E_1}\right)}{2\left(\alpha\gamma_1 + p_1E_1\varphi'(k_1^0)\left(1 + \dfrac{\varphi'(k_1^0)\varphi'''(k_1^0)}{2D_1}\right)\right)} <$$

$$< \frac{\gamma_1}{2\left(\alpha\gamma_1 + p_1E_1\varphi'(k_1^0)\right)}.$$

Поэтому из выполнения условия (41) следует справедливость (40). Параметр μ_1 может быть определен следующим образом:

$$\mu_1 = 1 - \frac{\gamma_1\left(1 - \dfrac{\alpha\gamma_1C_1}{(C_2^2 - C_1\varphi'(0))p_1E_1}\right)}{2\left(\alpha\gamma_1 + p_1E_1\varphi'(k_1^0)\left(1 + \dfrac{\varphi'(0)C_1}{2(C_2^2 - C_1\varphi'(0))}\right)\right)}.$$

Кроме этого, необходимо убедиться, что $\mu_1 < 1$. Это имеет место, если: $1 - \dfrac{\alpha\gamma_1C_1}{(C_2^2 - C_1\varphi'(0))p_1E_1} > 0$. Обозначая для удобства: $\bar{C} = C_2^2 - C_1\varphi'(0)$, получаем дополнительное условие, накладываемое на параметр γ_1:

$$\bar{C}p_1E_1 > \alpha\gamma_1C_1 \Leftrightarrow \gamma_1 < \frac{\bar{C}p_1E_1}{\alpha C_1}. \qquad (42)$$

При этом из условия 3 леммы следует, что $\exists\gamma_1 : 0 < \gamma_1 < \dfrac{\bar{C}p_1E_1}{\alpha C_1}$. В качестве параметра γ_1 возьмем: $\gamma_1 = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\bar{C}p_1E_1}{\alpha C_1}\right\}$. Лемма 2 доказана.

Из доказанных выше лемм следует:

Следствие 1.

Пусть выполнено следующее условие: $\varphi'''(k)\varphi'(k) > \varphi''(k)^2$ $\forall k$, тогда существуют такие параметры управления μ_1, γ_1, что $P'_{k1}(k_1^0, k_2^0) < 0$.

Доказательство.

Пусть $\varphi'''(k_1{}^0) > \dfrac{\varphi''(k_1{}^0)^2}{\varphi'(k_1{}^0)}$. Тогда $D_1 < 0$ и, в силу того, что слагаемое $-(\alpha\gamma_1^2 + (1-\mu_1)(1-\alpha+\alpha\mu_1)\times$ $\times(p_1E_1)^2(\varphi'(k_1^0))^2)\varphi'''(k_1^0) < 0$, знак (39) должен быть положителен. При выполнении условия 2 следствия всегда можно подобрать параметры γ_1 и μ_1 так, чтобы это имело место, при этом γ_1 = любое число, такое, что $\gamma_1 < 1 - \bar{\delta} - \pi$, а μ_1 выбирается из условия (40).

Следствие доказано.

Учитывая все, доказанное выше, сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема II.

Динамическая система ДСРС вида (8)—(14) имеет единственную точку устойчивого роста при выполнении следующих условий:

1) $\varphi'''(k) \le C_1 \quad |\varphi''(k)| \ge C_2 \quad \forall k$;

2) $C_1\varphi'(0) < C_2^2$.

Доказательство.

Подставляя в (33) соотношения (28), (29), получим, что темп изменения капиталовооруженности первого отдела вычисляется по формулам:

$$k_1'(t) = -\frac{(r+\bar{\delta}+\pi_c)U_1(t)V_1(t)}{\gamma_1 p_1 E_1 \varphi''(k_1(t))}, \tag{43}$$

где: $U_1(t) = (1-\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t)) - \gamma_1$,
$V_1(t) = (1-\alpha+\alpha\mu_1)p_1E_1\varphi'(k_1(t)) + \alpha\gamma_1$.

Проводя аналогичные преобразования, получим, что темп изменения капиталовооруженности второго отдела имеет вид:

$$k_2'(t) = -\frac{(r+\bar{\delta}+\pi_c)U_2(t)V_2(t)}{\gamma_2 p_2 E_2 \varphi''(k_2(t))}, \tag{44}$$

где: $U_2(t) = (1-\mu_2)p_2E_2\varphi'(k_2(t)) - \gamma_2$,
$V_2(t) = (1-\alpha+\alpha\mu_2)p_2E_2\varphi'(k_2(t)) + \alpha\gamma_2$.

Таким образом, если заданы параметры $\mu_1,\ \mu_2,\ \gamma_1, \gamma_2$, то может быть рассчитана капиталовооруженность по каждому отделу реализации продукции. Зная $k_1(t)$ и $k_2(t)$, из уравнения (27) можно найти общую величину капиталовооруженности фирмы $k(t)$.

Согласно теореме 1, система (36) имеет одну и только одну особую точку, причем эта точка может представлять собой *устойчивый узел, неустойчивый узел* или *седло*. При этом состояние равновесия является узлом, если $\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta > 0$, корни характеристического уравнения действительны и одинаковых знаков. В этом случае состояние равновесия представляет собой *устойчивый узел*, когда $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$. Заметим, что ситуация, когда выражение $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, невозможна, т.к. $\sigma^2 - 4\Delta = (P'_{k1} - Q'_{k2})^2 \ge 0$. Учитывая это, случай I , т.е. узел, имеет место, если:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow P'_{k1}(k_1^0,k_2^0) * Q'_{k2}(k_1^0,k_2^0) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P'_{k1}(k_1^0,k_2^0) > 0,\ Q'_{k2}(k_1^0,k_2^0) > 0; \\ P'_{k1}(k_1^0,k_2^0) < 0,\ Q'_{k2}(k_1^0,k_2^0) < 0 \end{cases}$$

$$\sigma = P'_{k1}(k_1^0,k_2^0) + Q'_{k2}(k_1^0,k_2^0) > 0$$

Получаем, что должно выполняться условие: $P'_{k1}(k_1^{\ 0},k_2^{\ 0}) > 0,\ Q'_{k2}(k_1^{\ 0},k_2^{\ 0}) > 0$.

Дальнейшее доказательство разобьем на два случая.

Во-первых, если $\varphi'''(k) < 0$, то, согласно лемме 1, существуют такие параметры управления $\mu_1,\ \gamma_1$, что $P'_{k1}(k_1^{\ 0},k_2^{\ 0}) > 0$. Аналогичным образом, существуют такие параметры управления $\mu_2,\ \gamma_2$, что $Q_{k2}(k_1^0,k_2^0)$.

Во-вторых, в случае, если $0 < \varphi'''(k) \le C_1 \quad |\varphi''(k)| \ge C_2 \quad \forall k;\ C_1\varphi'(0) < C_2^2$, согласно лемме 2, существуют такие параметры управления $\mu_1,\ \gamma_1$, что $P'_{k1}(k_1^0,k_2^0) > 0$, и существуют такие параметры управления $\mu_2,\ \gamma_2$, что $Q_{k2}(k_1^0,k_2^0)$. Теорема доказана.

Пример.

Приведем модельный численный пример. В качестве начальных значений параметров возьмем следующие величины (взятые так для удобства расчета): $k_{01}=1000,\ k_{02}=2000,\ a=0.5,\ \bar{\delta}=0.15,\ c=0.8,\ r=0.2,\ \pi_c=0.03,\ \gamma_1=0.3,\ \gamma_2=0.1,\ \mu_1=0.65,\ \mu_2=0.75$. В качестве функции $\varphi(k)$ рассмотрим функцию $\varphi(k)=\sqrt{k}$, получающуюся из производственной функции Кобба—Дугласа вида: $F(K,L)=K^{0.5}L^{0.5}$. Для простоты будем предполагать, что цены на продукцию каждого отдела и количество поездок не зависит от времени, и составляют: $p_1=5,\ p_2=10,\ E_1=0.8,\ E_2=0.5$. Тогда устойчивая точка модели (k_{10},k_{20}) имеет вид: (37.7, 270.52).

Покажем, что эта точка является устойчивым узлом. Для этого построим график зависимостей $(k_1(t),k_2(t))$ при разных начальных значениях. Данные функции имеют вид:

$$k_1(t) = 2.78\frac{\left(0.825e^{(-2t)}+0.35C_1e^{(0.18t)}\right)^2}{\left(0.5e^{(-2t)}+C_1e^{(0.18t)}\right)^2};$$

$$C_1 = \frac{3\sqrt{10}-0.825}{0.35-6\sqrt{10}};$$

$$k_2(t) = 25\frac{\left(0.875e^{(-2t)}+0.25C_2e^{(0.18t)}\right)^2}{\left(0.5e^{(-2t)}+C_2e^{(0.18t)}\right)^2};$$

$$C_2 = \frac{2\sqrt{5}-0.875}{0.25-4\sqrt{5}};$$

где

$$C_1 = \frac{2\gamma_1\sqrt{k_{01}}\alpha - \alpha\mu_1 + \alpha - 1}{1-\mu_1-2\gamma_1\sqrt{k_{01}}};$$

$$C_2 = \frac{2\gamma_2\sqrt{k_{02}}\alpha - \alpha\mu_2 + \alpha - 1}{1-\mu_2-2\gamma_2\sqrt{k_{02}}}.$$

Кроме этого, построим также графики для следующих пар начальных значений: (2000, 3000); (500, 1000); (1500,1000). Результаты построения представлены на следующем рисунке:

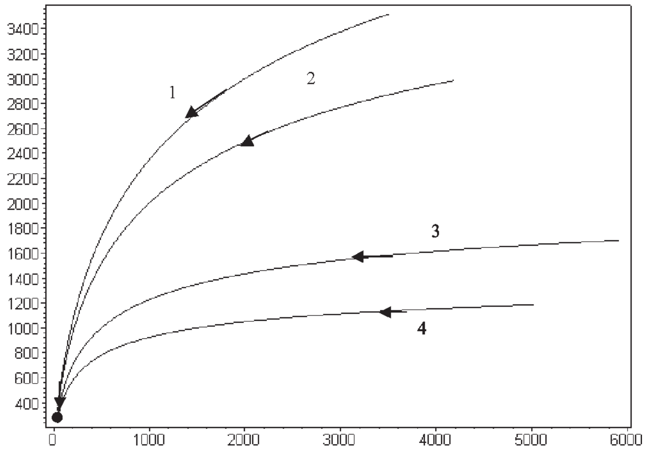

Рис.

Очевидно, что капиталовооруженности каждого подразделения стремятся к устойчивой точке при данных значениях управляющих параметров.

Таким образом, в настоящей работе предлагается модель, обеспечивающая сопряжение интересов торговых агентов подразделений и владельца фирмы. При этом главной особенностью модели является введение оригинального параметра, определяющий долю от величины суммы заключенных договоров, которую должен получать торговый агент, чтобы обеспечить максимизацию суммарного дохода фирмы. Модель разработана как задача оптимального управления лагранжевого типа, которая, может быть легко обобщена на случай наличия большого числа независимых подразделений и многих потребителей путем построения ее конечно-разностного аналога. Для любой крупной фирмы, имеющей подразделения, территориально расположенные в разных местах, может быть поставлена приведенная выше задача управления и найдены управляющие параметры и траектории изменения управляющих функций. Проведенные практические расчеты для одного из предприятий Воронежской области подтвердили эффективность предлагаемых методов анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баева Н. Б., Жданкина Н. А.* Математические методы поддержки процессов регулирования в сфере реализации продукции сложных экономических систем/Вестник ВГТУ. Сер. Моделирование и оптимизация в автоматизированных системах, 2000.

2. *Жданкина Н. А.* Математическое моделирование функций продаж продукции фирмы с рентноориентированным управлением / Труды Российской ассоциации «Женщины-математики». Математика. Образование. Экономика. Экология. Междисциплинарный семинар «Нелинейные модели в естественных и гуманитарных науках». Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2001, т. 9, вып. 1.

3. *Кузнецов В. В., Фирсакова В. В.* Об устойчивости рыночного положения фирмы. // Экономика и математические методы, 2000, т. 36, № 3, С. 136—139.

4. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1990.

5. *Яновский Л. П.* Динамическая модель выживания крупного предприятия с рентноориентированным менеджментом. // Экономика и математические методы, 2000, т. 36, № 2, С. 73—79.

6. Теория выбора и принятия решений

7. *Жак С. В.* Математические модели менеджмента и маркетинга. — Ростов-на-Дону, 1997.

8. *Кади Дж.* Количественные методы в экономике. — М.: Прогресс, 1977.

9. *Понтрягин Л.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

10. *Беллман Р.* Прикладные задачи динамического программирования./ Беллман Р., Дрейфус С. — М:Наука, 1965.

11. *Dorfman R., Steiner P. O.* Optimal advertising and optimal quality // Amer. Econ. Rev. 1959. V. 49. P. 826—836.

12. *Cooper L. G.* Competitive maps: the structure underlying asymetric cross-elasticities //Man. Sci. 1988. V. 34. P. 707—723.

13. *Peel P.* The non-uniqueness of the Dorfman-Steiner condition: a note // Economica. 1973. V. 40. P. 208—209.

14. *Cowling K., Cubbin J.* Price, quality and advertising competition : an econometric investigation of the UK car market // Economica. 1971. V. 38. P. 378—394.