ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 1

УДК 517.956+539.37

МЕТОД ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2002 г. Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

Для нелинейного волнового уравнения с нелокальным краевым условием строится сингулярный псевдопотенциал, с помощью которого находятся в явном виде решения задачи. Доказывается корректная разрешимость задачи в классе аналитических функционалов.

ВВЕДЕНИЕ

Ряд моделей классической и квантовой физики (теория рассеяния, квантово-полевое рассеяние, рассеяние мезонов на атомных ядрах и т.п.) описываются волновым уравнением с источником (потенциалом), явный вид которого неизвестен (см. [1]—[3] и ссылки), но задана какая-либо спектральная характеристика (например, суммарная амплитуда рассеяния), не позволяющая восстановить этот источник (потенциал) методом Гельфанда—Левитана—Марченко (см. [4], [5]). В настоящей работе для решения этих проблем предлагается другой метод — «метод псевдопотенциала», разработанный первоначально для случая монохроматической волны (см. [6]).

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ — вектор из R^3, $r = |x|$ — его евклидова длина, $\theta = x/r$ — точка единичной сферы $\omega = \{|x| = 1\}$, $R^4 = \{(t,x) : t \in R, x \in R^3\}$, $R^4_+ = \{(t,x) \in R^4 : t > 0\}$. Пусть $D = \{D_1, D_2, D_3\}$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $\Delta = D \cdot D$ — оператор Лапласа в R^3 (здесь выражение $x \cdot y$ означает скалярное произведение векторов $x, y \in R^3$). Пусть, как обычно, $Y^{(m)}(x)$, $m = 0,1,\dots$, означает однородный степени m гармонический полином, а его сужение $Y^{(m)}(\theta) = Y^{(m)}(x/r) \equiv r^{-m}Y^{(m)}(x)$ на единичную сферу ω будем называть сферической гармоникой порядка m. Через $Y^{(m)}(D)$ будем обозначать дифференциальный полином, порождаемый полиномом $Y^{(m)}(x)$ или сферической гармоникой $Y^{(m)}(\theta)$. Выражения $Y^{(m)}(t,x)$, $Y^{(m)}(t,\theta)$ будут означать, что коэффициенты этих полиномов зависят от переменной $t \in R$ как от параметра. Через $Z^{(m)}(\theta,\theta')$ будем обозначать зональную гармонику (см. [7]) порядка m.

Пусть, как обычно, $S'(R^n)$, $n = 1,3$ или 4, означает пространство Шварца распределений умеренного роста, а $Z'(R^n) \supset S'(R^n)$ — пространство аналитических функционалов, двойственное к пространству $Z(R^n) = FC_0^\infty(R^n)$ (Здесь F означает преобразование Фурье).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u(t,x) \equiv \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)u(t,x) = -Q, & (t,x) \in R^4_+, \quad (1) \\ u\,\big|_{t=+0} = u_t\,\big|_{t=+0} = 0, & x \in R^3. \quad (2) \end{cases}$$

При этом, для удобства, производные по переменным $x \in R^3$ будем рассматривать только в смысле теории распределений, а производные по переменной $t \in R$ — либо в смысле теории распределений, либо как производные по параметру. Функционал Q из правойчасти уравнения (1) в классическом случае не зависит явно от u, Du и является, по сути дела, источником: $Q = f(t,x)$. В квантовом случае Q уже может зависеть от u, Du (линейно или нелинейно) и является уже, вообще говоря, потенциалом: $Q = q(t,x,u,Du)$.

Сведем задачу (1), (2) к уравнению во всем пространстве R^4, продолжив Q и $u(t,x)$ нулем при $t \le 0$.

В классическом случае получаем задачу:

$$u(t,x) = -f(t,x), \qquad (t,x) \in R^4;$$

$$D(u(t + x\cdot\theta, x))\cdot\theta = o(|x|^{-1}), \quad x \to \infty, t \in R, \theta \in \omega; \tag{3}$$

где $u, f \in S'(R^4)$ (или $u(t,\cdot), f(t,\cdot) \in S'(R^3)$, $t \in R$).

Дополнительно предположим, что: $f \in L_1^{loc}(R^4)$ и

$$supp(f) \subset \{|x| \le R_0, t \ge 0\},\ R_0 > 0. \tag{4}$$

Замечание 1. Отметим, что задача (3), (4) корректно разрешима не только в классе $S'(R^n)$, но и в $Z'(R^n)$, $n = 3$ или 4.

Предположим теперь, что явный вид источника $f(t,x)$ **неизвестен**, а задана лишь суммарная амплитуда рассеяния на источнике $f(t,x)$:

$$\int_{R^3} f(t - x\cdot\theta, x)\,dx = F(t,\theta), \quad t \in R, \theta \in \omega. \quad (5)$$

Замечание 2. Нетрудно заметить, что, во-первых:

$$supp(F) \subset \{t \geq -R_0\}, \quad (6)$$

и, во-вторых, для любой заданной функции $F(t,\theta)$ существует бесконечно много источников $f(t,x)$, удовлетворяющих условию (5), поэтому задача (3)—(5) не является корректной в классическом смысле. Поэтому в дальнейшем под корректной разрешимостью задачи (3)—(5) будем понимать корректную разрешимость задачи (3) при каждом фиксированном источнике $f(t,x)$, удовлетворяющем условиям (4), (5).

Сформулируем задачу о построении мультипольного псевдоисточника для задачи (3)—(5):

По заданной суммарной амплитуде рассеяния $F(t,\theta)$ требуется построить сингулярный псевдоисточник $h(t,x)$, такой, что:

1. $supp(h) \subset \{t \geq -R_0, x = 0\}$;
2. *задача:*

$$w(t,x) = -h(t,x), \qquad (t,x) \in R^4.$$
$$D(w(t + x\cdot\theta, x))\cdot\theta = o(|x|^{-1}), \quad x \to \infty, t \in R, \theta \in \omega; \quad (7)$$

была бы корректно разрешима в каком-либо классе распределений **одновременно** *с задачей (3)—(5);*

3. *выполнялось бы тождество:*

$$w(x) \equiv u(x), \quad |x| > R_0, t \in R. \quad (8)$$

Замечания. 3. Задача о мультипольном псевдопотенциале для задачи (3), (4) (т.е. для случая **известного** источника $f(t,x)$) была решена в работе [8]. Однако результаты этой работы не могут быть использованы для решения задачи (3)—(5).

4. Отметим также, что задача (7), (8) для задачи (3)—(5) имеет смысл лишь тогда, если условие (5) обеспечивает однозначность сужения на область $\{|x| > R_0\}$ всех решений задачи (3)—(5); в противном случае сама постановка задачи (7), (8) некорректна.

Теорема 1. *1) Задача (3)—(5) корректно (в смысле Замечания 2) разрешима в классах $S'(R^n)$ и $Z'(R^n)$, $n = 3$ или 4; причем все ее решения $u(t,x)$ совпадают между собой в области $\{|x| > R_0\}$.*

2) Искомый псевдоисточник $h(t,x)$ задачи (7) может быть представлен сходящимся в слабой топологии пространства $Z'(R^n)$, $n = 3$ или 4 рядом:

$$h(t,x) = \sum_m h_m(t,x), \quad (9)$$

$$h_m(t,x) = Y_m(t,D)\delta(x), \quad (10)$$

где $\delta(\cdot)$ есть дельта-функция Дирака, а дифференциальные полиномы $Y_m(t,D)$ порождаются сферическими гармониками $Y_m(t,\theta)$, определяемыми равенствами:

$$Y_0(t,\theta) = Y^{(0)}(t,\theta);$$

$$Y_m(t,\theta) = Y^{(m)}(t,\theta) * \frac{t_+^{m-1}}{(m-1)!}; \quad m \geq 1; \quad (11)$$

$$Y^{(m)}(t,\theta) = \int_\omega F(t,\theta')Z^{(m)}(\theta,\theta')\,d\omega(\theta'),$$

где символ $*$ означает свертку по переменной $t \in R$, а функция $F(t,\theta)$ берется из условия (5). Кроме того:

$$supp(h_m) \subset \{t \geq -R_0, x = 0\}. \quad (12)$$

3) Задача (7) с псевдоисточником $h(t,x)$, определенным равенствами (9)—(11), корректно разрешима в классе $Z'(R^n)$, $n = 3$ или 4, а ее решение $w(t,x)$ может быть представлено в виде сходящегося в слабой топологии $Z'(R^n)$ ряда:

$$w(t,x) = \sum_m w_m(t,x), \quad x = r\theta, \quad (13)$$

$$w_m(t, r\theta) =$$
$$= H(t - r + R_0)\frac{r^m}{4\pi}\left(\frac{\partial}{r\partial r}\right)^m\left(\frac{Y_m(t-r,\theta)}{r}\right), \quad (14)$$

где $H(\cdot)$ — функция Хевисайда, а функции $Y_m(\cdot,\cdot)$ определены равенствами (11), (12).

4) Для всех решений $u(t,x)$ задачи (3)—(5) и решения $w(t,x)$ задачи (7) справедливо тождество (8).

Ввиду принципиальной важности этого утверждения, приведем краткую схему его доказательства.

Действительно, соотношение (12) следует непосредственно из формул (6), (10), (11). Далее, прямой проверкой можно установить, что компоненты $w_m(t,x)$ ряда (13), определенные равенством (14), удовлетворяют задаче (7) с псевдоисточниками $h_m(t,x)$, определенными равенствами (10), (11).

Самой трудоемкой является проверка тождества (8) и корректной разрешимости задачи (7). (Поскольку из формул (10), (11) и (14) следует, что $h_m(t,x)$ и $w_m(t,x)$ есть распределения класса $S'(R^n)$, $n=3$ или 4, но сами ряды (9) и (13), вообще говоря, не сходятся в слабой топологии этого пространства). Обозначим через $\hat{u}(k,x)$, $\hat{w}(k,x)$, $\hat{f}(k,x)$, $\hat{h}(k,x)$, $\hat{F}(k,\boldsymbol{\theta})$ и $\hat{Y}^{(m)}(k,\boldsymbol{\theta})$ ($k\in R$) прямое преобразование Фурье распределений (функций) $u(t,x)$, $w(t,x)$, $f(t,x)$, $h(t,x)$, $F(t,x)$ и $Y^{(m)}(t,\boldsymbol{\theta})$ соответственно. Нетрудно видеть, что задачи (3)–(5) и (7) редуцируются соответственно к задачам:

$$\begin{gathered}(\Delta+k^2)\hat{u}(k,x)=\hat{f}(k,x), x\in R^3;\\ \left(\frac{\partial}{\partial r}+ik\right)\hat{u}(k,x)=o(|\,x\,|^{-1}), x\to\infty;\\ supp(\hat{f})\subset\{|\,x\,|\le R_0\};\\ \int\limits_{R^3}\hat{f}(k,x)\exp(ikx\cdot\boldsymbol{\theta})\,dx=\hat{F}(k,\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\omega},\end{gathered}\tag{15}$$

и

$$\begin{gathered}(\Delta+k^2)\hat{w}(k,x)=\hat{h}(k,x),\ x\in R^3;\\ \left(\frac{\partial}{\partial r}+ik\right)\hat{w}(k,x)=o(|x|^{-1}),\ x\to\infty;\end{gathered}\tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}\hat{h}(k,x)=\sum_m (ik)^{-m}\hat{Y}^{(m)}(k,D)\boldsymbol{\delta}(x),\\ \hat{Y}^{(m)}(k,\boldsymbol{\theta})=\int\limits_{\boldsymbol{\omega}}\hat{F}(k,\boldsymbol{\theta}')Z^{(m)}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}')\,d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}').\end{gathered}\tag{17}$$

Справедливо следующее утверждение, доказанное в работе [6]:

1) Задачи (15) и (16), (17) корректно разрешимы в классе $Z'(R^3)$.

2) Все решения $\hat{u}(k,x)$ задачи (15) есть распределения класса $S'(R_{(k)})\times Z'(R^3_{(x)})$ и совпадают между собой в области $\{|x|>R_0\}$.

3) Сингулярный псевдоисточник $\hat{h}(k,x)$, определённый равенствами (17), и соответствующее ему решение $\hat{w}(k,x)$ задачи (16) есть распределение класса $S'(R_{(k)})\times Z'(R^3_{(x)})$.

4) Справедливо тождество:

$$\hat{w}(k,x)\equiv\hat{u}(k,x),\quad |\,x\,|>R_0,k\in R.\tag{18}$$

Откуда непосредственно следует корректная разрешимость задачи (8). Равенства (9)—(11) следуют из равенств (17) и свойств обратного преобразования Фурье. Тождество (8) следует из тождества (18). Что и завершает доказательство Теоремы 1.

Перейдем теперь к квантовому случаю. Рассмотрим в $S'(R^3)$ или $S'(R^4)$ следующую задачу:

$$\begin{gathered}u(t,x)+q(t,x,u,Du)=0,(t,x)\in R^4;\\ D(u(t+x\cdot\boldsymbol{\theta},x))\cdot\boldsymbol{\theta}=o(|x|^{-1}),\ x\to\infty,\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\omega};\end{gathered}\tag{19}$$

причем будем считать, что явный вид потенциала $q(\cdot)$ **неизвестен**. Будем предполагать, что:

1) потенциал $q(\cdot)$ бесконечно дифференцируем по совокупности переменных, причем:

$$f(t,x)\in L_1^{loc}(R^4)\cap S'(R^4),\tag{20}$$

$$f(t,x)\equiv q(t,x,u(t,x),Du(t,x))\tag{21}$$

для всех $u,Du\in L_1^{loc}(R^4)\cap S'(R^4)$.

2) потенциал $q(\cdot)$ финитен по пространственным переменным:

$$supp(q)\subset\{t\ge 0,|x|\le R_0\}.$$

Наконец, зададим амплитуду рассеяния $F(t,\boldsymbol{\theta})$ с помощью равенств (5), (21).

Замечание 5. Отметим (см. [4], [6]), что решение задачи (19)–(22), (5), вообще говоря, неединственно, а при заданном фиксированном потенциале $q(\cdot)$ — может не иметь решения. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь те потенциалы $q(\cdot)$, при которых задача (19)—(22), (5) разрешима.

Пусть теперь M — класс всех допустимых (в смысле Замечания 5) потенциалов $q(\cdot)$, $N(q)$ — множество всех решений $u(t,x)$ задачи (5), (19)—(22), соответствующих фиксированному потенциалу $q\in M$. Определим подмножество $T\subset L_1^{loc}(R^4)\cap S'(R^4)$ как множество вех функций $f(t,x)$, определенных равенством (21), где $q\in M$, $u\in N$. Но тогда, фиксируя поочередно эти $f(t,x)$, мы редуцируем задачу (19)—(22), (5) к задаче (3)—(5), лишь сужая при этом класс источников $f(t,x)$. Поэтому, рассматривая теперь для задачи (19)—(21) задачу (7), (8), мы немедленно устанавливаем справедливость следующего утверждения:

Теорема 2. *Если задача (19)–(22), (5) разрешима в классе* $S'(R^n)$ *или в классе* $Z'(R^n)$, $n = 3$ *или* 4, *то все ее решения* $u(t,x)$ *совпадают между собой в области* $\{|x| > R_0\}$ *и удовлетворяют тождеству (8), в котором распределение* $w(t,x)$ *определено равенствами (13), (14).*

Из Теоремы 2 следует важный для физических приложений вывод:

Следствие. *Структура волновой функции* $u(t,x)$, *описываемой задачей (19)—(22), (5) вне зоны действия потенциала* $q(\cdot)$ *не зависит от выбора самого потенциала и полностью определяется суммарной амплитудой рассеяния* $F(t,\boldsymbol{\theta})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 443 с.

2. *Балашов В. В., Коренман Г. Я., Эрамжян Р. А.* Поглощение мезонов атомными ядрами. М.: Атомиздат, 1978. 296 с.

3. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния. М.: Мир, 1971. 312 с.

4. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.// Изв. АН СССР (сер. мат.). 1951. Т. 15, № 4. С. 309—360.

5. *Марченко В. А.* О восстановлении потенциальной энергии по фазам рассеянных волн.// Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. С. 695—698.

6. *Засорин Ю. В.* Метод перенормировки потенциала для одной модели Хартри—Фока—Слейтера.// Теоретич. и математ. физика. 2002. Т. 130. № 3. С. 375—382.

7. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 336 с.

8. *Киприянов И. А., Засорин Ю. В.* Принцип Ньютона для волнового уравнения.// Мат. заметки. 1992. Т. 51. № 4. С. 36—42.