ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 1

УДК 517.988.63:532.51:532.135

О ДВИЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В $\mathbf{R}^n$

© 2002 г. Д. А. Воротников[1]

Воронежский государственный университет

Реальные материалы, особенно в определенных условиях, часто проявляют свойства, не похожие на те, которые должна проявлять ньютоновская жидкость. В то же время эти материалы по многим параметрам все-таки являются жидкостями [8]. Для описания таких веществ были разработаны различные реологические модели, в основе которых лежит отказ от гипотезы Ньютона [7], [14]. В данной работе мы будем изучать одну из таких моделей. Наша модель отличается высокой общностью зависимости между тензорами, определяющими движение жидкости. Важным частным случаем нашей модели является несжимаемая нелинейно-вязкая жидкость Рейнера—Ривлина.

Постановка задачи производится в пунктах 1, 2, 5. Мы переписываем уравнение движения жидкости как нелинейное параболическое уравнение в гильбертовом пространстве. Применяя технику разрешающих операторов и метод априорной оценки, получены утверждения о существовании решения. Исследован также вопрос о единственности решений и непрерывной зависимости решений от данных. Основные результаты сформулированы в п. 6. Подобные результаты для ньютоновской жидкости и уравнений Навье-Стокса можно найти в [5], [9].

1. Описание рассматриваемой модели

Мы рассматриваем жидкости, «находящиеся» в n-мерном пространстве, где n — фиксированное целое число. Текущие (эйлеровы) координаты в этом пространстве (которое можно отождествить с арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$) будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_n)$. Скорость жидкости в данный момент времени t в точке x можно считать n-мерным вектором

$$u = (u_1(t,x), u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$$

Тензором скоростей деформации $\mathcal{E}(u)$ называется тензор с компонентами

$$\mathcal{E}_{ij}(t,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)(t,x).$$

Гипотеза Стокса в гидромеханике заключается в том, что тензор определяющих напряжений в точке в данный момент времени полностью определяется скоростью деформации. Полный тензор напряжений T_H тогда имеет вид[2]:

$$T_H(t,x) = G(\mathcal{E}(t,x)) + N(t,x) \tag{1.1}$$

Мы будем накладывать на эту зависимость некоторые условия:

1) T_H можно представить в следующем виде:

$$T_H = -pI + 2\mu_0 \mathcal{E} + \overline{T}(\mathcal{E}), \tag{1.2}$$

где p — некоторая скалярная функция («давление»[3]), μ_0 — некоторая положительная константа, $\overline{T}$ — $n \times n$-матричная функция $n \times n$-матричного аргумента.

2) $\overline{T}(\xi)$ — C^3-гладкая функция своего матричного аргумента $\xi = (\xi_{ij})$. Для любых индексов $k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3 = 1, \dots, n$ выполняется условие Липшица:

$$\left\| \frac{\partial^3(\overline{T}(\xi) - \overline{T}(\eta))}{\partial \xi_{k_1 l_1} \partial \xi_{k_2 l_2} \partial \xi_{k_3 l_3}} \right\| \le L(\|\xi\| + \|\eta\|)\|\xi - \eta\| \tag{1.3}$$

Здесь ξ и η — две матрицы, $\|\cdot\|$ в этом пункте означает евклидову норму в пространстве матриц $R^{n \times n}$, L — неубывающая скалярная функция.

3). Для любых индексов $k, l = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial \overline{T}(0)}{\partial \xi_{kl}} = 0 \tag{1.4}$$

Пример. В качестве примера, в котором выполняются условия 1) — 3) рассмотрим не-

[1] Работа поддержана грантами № 01-01-00425 РФФИ и № VZ-010-0 Министерства образования РФ и CRDF.

[2] Здесь G — некая матричная функция матричного аргумента, N — тензор таких напряжений, для которых мощность напряжения равна нулю при любом движении, совместимом со связями; для несжимаемой жидкости $N = -qI$, где $q(t,x)$ — гидростатическое давление, I — единичный тензор [18].

[3] p не обязательно совпадает с q [8].

сжимаемую жидкость Рейнера—Ривлина в $\mathbb{R}^3$. В этом случае T_H имеет вид[4]

$$T_H = -pI + \varphi_1(I_2, I_3)\mathcal{E} + \varphi_2(I_2, I_3)\mathcal{E}^2 \quad (1.5)$$

Здесь $\mathcal{E}^2$ есть матричный квадрат тензора $\mathcal{E}$, $I_2 = Tr(\mathcal{E}^2)$ — его след; $I_3 = \det \mathcal{E}$ [11]. Отметим, что обычно [7], [12] коэффициенты при $\mathcal{E}^2$ и $\mathcal{E}$ гладко зависят не от I_2, а от $\sqrt{I_2} = \|\mathcal{E}\|$. Положим тогда $\widetilde{\varphi}_1(y_1, y_2) = \varphi_1(y_1^2, y_2); \widetilde{\varphi}_2(y_1, y_2) = \varphi_2(y_1^2, y_2)$. Имеем:

$$T_H = -pI + \widetilde{\varphi}_1(\|\mathcal{E}\|, I_3)\mathcal{E} + \widetilde{\varphi}_2(\|\mathcal{E}\|, I_3)\mathcal{E}^2 \quad (1.6)$$

Введем обозначения $\mu_0 = \frac{\widetilde{\varphi}_1(0,0)}{2}$, $\widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(y_1, y_2) = \widetilde{\varphi}_1(y_1, y_2) - 2\mu_0$. Предположим, $\mu_0 > 0$. Положим

$$\overline{T}(\mathcal{E}) = \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(\|\mathcal{E}\|, I_3)\mathcal{E} + \widetilde{\varphi}_2(\|\mathcal{E}\|, I_3)\mathcal{E}^2. \quad (1.7)$$

Тогда из (1.7) и (1.6) следует (1.2) и условие 1).

Предположим еще, что выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_1(0,0)}{\partial y_1} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_2(0,0)}{\partial y_2} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_1(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \quad (1.10)$$

Тогда $\widetilde{\widetilde{\varphi}}_1$ и $\widetilde{\varphi}_2$ можно разложить в ряд Тейлора и подставить в (1.7). Получим

$$\begin{aligned}
\overline{T}(\mathcal{E}) &= \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)\mathcal{E} + \frac{\partial \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_1}\|\mathcal{E}\| \cdot \mathcal{E} + \\
&+ \frac{\partial \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_2} I_3 \mathcal{E} + \frac{\partial^2 \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_1^2}\|\mathcal{E}\|^2 \mathcal{E} + \\
&+ \frac{\partial^2 \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2}\|\mathcal{E}\| I_3 \mathcal{E} + \frac{\partial^2 \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_2^2} I_3^2 \mathcal{E} + \\
&+ \frac{\partial^3 \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_1^3}\|\mathcal{E}\|^3 \mathcal{E} + \frac{\partial^3 \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_1^2 \partial y_2}\|\mathcal{E}\|^2 I_3 \mathcal{E} + \\
&+ \frac{\partial^3 \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2^2}\|\mathcal{E}\| I_3^2 \mathcal{E} + \frac{\partial^3 \widetilde{\widetilde{\varphi}}_1(0,0)}{\partial y_2^2} I_3^3 \mathcal{E} + \\
&+ \widetilde{\varphi}_2(0,0)\mathcal{E}^2 + \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2(0,0)}{\partial y_1}\|\mathcal{E}\|\mathcal{E}^2 + \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2(0,0)}{\partial y_2} I_3 \mathcal{E}^2 + \\
&+ \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_2(0,0)}{\partial y_1^2}\|\mathcal{E}\|^2 \mathcal{E}^2 + \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_2(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2}\|\mathcal{E}\| I_3 \mathcal{E}^2 + \\
&+ \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_2(0,0)}{\partial y_2^2} I_3^2 \mathcal{E}^2 + \omega_1(\mathcal{E}),
\end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\omega_1(E)$ — C^4-гладкая функция.

Понятно, что если выполнены (1.8)—(1.10), то при $\mathcal{E} \neq 0$ все слагаемые (1.11) C^4-гладкие, и все четвертые производные равномерно ограничены при $\mathcal{E} \to 0$. Отсюда и следует (1.3), т.е. 2). Условие 3) также просто следует из (1.11).

В частности, (1.8)—(1.10) выполнены, когда функции φ_1 и φ_2 дифференцируемы в точке $y_1 = y_2 = 0$, и φ_1 имеет смешанную производную по y_1 и y_2 в этой точке.

Действительно, в этом случае

$$\left.\frac{\partial \widetilde{\varphi}_1(y_1, y_2)}{\partial y_1}\right|_{y_1=y_2=0} = \left.\frac{\partial \varphi_1(y_1^2, y_2)}{\partial y_1}\right|_{y_1=y_2=0} = \left.= \frac{\partial \varphi_1(y_1^2, y_2)}{\partial (y_1^2)} 2y_1\right|_{y_1=y_2=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \widetilde{\varphi}_2(y_1, y_2)}{\partial y_1}\right|_{y_1=y_2=0} = \left.\frac{\partial \varphi_2(y_1^2, y_2)}{\partial y_1}\right|_{y_1=y_2=0} = \left.= \frac{\partial \varphi_2(y_1^2, y_2)}{\partial (y_1^2)} 2y_1\right|_{y_1=y_2=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_1(y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}\right|_{y_1=y_2=0} = \left.\frac{\partial^2 \varphi_1(y_1^2, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}\right|_{y_1=y_2=0} = \left.= \frac{\partial^2 \varphi_1(y_1^2, y_2)}{\partial (y_1^2) \partial y_2} 2y_1\right|_{y_1=y_2=0} = 0$$

Условия (1.8)—(1.10) выполнены также, например, для таких моделей, как модели Прандтля, Эйринга [10], раствора гидроксиэтилцеллюлозы [7] и др.

2. Уравнение движения

Для описания течения жидкости используют уравнение движения. Наиболее общее уравнение (в форме Коши) выглядит так [7], [8]:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - Div T_H(u) = \rho f_0(t, x) \quad (2.1)$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_n)$ — скорость жидкости, ρ — плотность жидкости, f_0 — внешняя сила, Div — построчная дивергенция тензора[5]. Бу-

[4] Из теоремы Ривлина—Эриксена [18] следует, что однородный несжимаемый изотропный материал, удовлетворяющий гипотезе Стокса, допускает описание уравнением (1.5) (см. также [7], [8], [11], [14]).

[5] Для тензора $\xi = \xi_{ij}(x,t)$

$$(Div \xi)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x_j}$$

дем рассматривать несжимаемые однородные жидкости. Тогда плотность ρ можно считать равной 1. Условие несжимаемости выглядит так:

$$div\, u = 0 \tag{2.2}$$

Мы ограничимся случаем, когда жидкость «течет» во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда $u = u(t,x), f_0 = f_0(t,x)$, где $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

Распишем T_H по формуле (1.2). Получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - Div(-pI + 2\mu_0 \mathcal{E}(u) + \overline{T}(\mathcal{E}(u))) = f_0 \tag{2.3}$$

Легко видеть, что $Div\, pI = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n}) = \nabla p$, а при условии (2.2) (см. [8])

$$Div\, \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\Delta u$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Тогда (2.3) перепишется в виде:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} - Div\, \overline{T}(\mathcal{E}(u(t,x))) - \\ -\mu_0 \Delta u(t,x) + \nabla p(t,x) = f_0(t,x) \tag{2.4}$$

К уравнениям (2.2) и (2.4) будем добавлять начальное условие:

$$u|_{t=0} = a \tag{2.5}$$

где $a = a(x)$ — некоторая известная функция. Неизвестными в системе (2.2), (2.4), (2.5) будут u и p. В дальнейшем (см. п. 5) система (2.2), (2.4), (2.5) будет переписана как параболическое уравнение в гильбертовом пространстве, и нас будет интересовать только нахождение u: p будет исключено из рассмотрения[6].

3. Разрешающий оператор

В этом пункте мы отметим некоторые свойства абстрактных параболических уравнений.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{A}(t)v = 0 \tag{3.1}$$

Здесь $v(t)$ — искомая функция, принимающая значения в некотором банаховом пространстве E. $\mathcal{A}(t)$ — действующий в E линейный неограниченный оператор, $t \in [0,T]$.

Напомним [3], что линейный неограниченный оператор $\mathcal{B}$ с плотной областью определения в E называется *сильно позитивным*, если при любом комплексном λ с $Re\lambda \geq 0$ оператор $\mathcal{B} + \lambda I$ имеет ограниченный обратный и

$$\left\| (\mathcal{B} + \lambda I)^{-1} \right\| \leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \tag{3.2}$$

где C не зависит от λ.

В этом случае $\mathcal{B}$ порождает аналитическую полугруппу $e^{-\mathcal{B}t}, t \geq 0$ и можно определить его дробные степени [1], [2], [3]:

$$\mathcal{B}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \tau^{-\alpha-1} e^{-\mathcal{B}t} d\tau (\alpha < 0), \tag{3.3}$$

где Γ — функция Эйлера;

$$\mathcal{B}^{\alpha} = (\mathcal{B}^{-\alpha})^{-1}\, (\alpha > 0) \tag{3.4}$$

Считается также, что $\mathcal{B}^0 = I$ — тождественный оператор. При $\alpha > 0$ операторы $\mathcal{B}^{\alpha}$ неограничены. Они имеют плотные в E области определения $D(\mathcal{B}^{\alpha})$, причем $D(\mathcal{B}^{\alpha}) \subset D(\mathcal{B}^{\beta})$ при $\alpha > \beta$.

Если оператор $\mathcal{A}(t)$ имеет плотную не зависящую от t область определения D, сильно позитивен при каждом t и C не зависит от t, то будем называть $\mathcal{A}(t)$ *сильно позитивным равномерно по* t.

Теорема 3.1. (Соболевский [1]). *Пусть оператор $\mathcal{A}(t)$ сильно позитивен равномерно по t. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ и любых $t, \tau, s \in [0,T]$:*

$$\left\| (\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(\tau))\mathcal{A}^{-1}(s) \right\| \leq C\, |t - \tau|^{\varepsilon} \tag{3.5}$$

(C в этом пункте означает различные константы, не зависящие от t, s, τ).

Тогда существует разрешающий оператор $U(t,\tau)$, определенный и сильно непрерывный по совокупности t и τ при $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

Эта оператор-функция равномерно дифференцируема по t при $t > \tau$, и

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t} + \mathcal{A}(t)U(t,\tau) = 0 \tag{3.6}$$

Справедливы тождества

$$U(t,\tau) = U(t,s)U(s,\tau), \tag{3.7}$$

$$U(t,t) = I, \tag{3.8}$$

$(0 \leq \tau \leq s \leq t \leq T)$.

[6] Если скорость $u(t,x)$ найдена, то из уравнения (2.4) можно сразу найти ∇p. Отсюда можно найти и p, но с точностью до константы [11]. Чтобы найти q, надо еще учитывать связь между p и q [8].

Формула

$$v(t) = U(t,0)v_0 \qquad (3.9)$$

при любом $v_0 \in E$ *определяет непрерывное на* $[0,T]$ *и непрерывно дифференцируемое при* $t > 0$ *решение уравнения (3.1). Если* $v_0 \in D$, *то* $v(t)$ *будет непрерывно дифференцируемой на всем* $[0,T]$.

Теорема 3.2. (Соболевский [1]). *В условиях теоремы 3.1 справедливы следующие оценки:*

$$\left\|\mathcal{A}^{\alpha}(t)U(t,\tau)\mathcal{A}^{-\beta}(\tau)\right\| \le C \mid t-\tau \mid^{\beta-\alpha}, \quad (3.10)$$

$(0 \le \beta \le \alpha < 1+\varepsilon)$

$$\left\|\mathcal{A}^{\alpha}(0)(U(t+\Delta t,0)-U(t,0))\mathcal{A}^{-\beta}(\tau)\right\| \le C\Delta t^{\beta-\alpha}, (3.11)$$

$(0 \le \alpha \le \beta \le 1)$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{A}(t)v = f(t) \qquad (3.12)$$

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathcal{A}(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Пусть* $f = f_1 + f_2$, *где* $f_1, f_2 \in C([0,T],E)$. *Пусть* $\mathcal{A}(0)f_1(t) \in L^1([0,T],E)$ *и найдется* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\|f_2(t) - f_2(\tau)\| \le \mathrm{C} \mid t-\tau \mid^{\delta} \qquad (3.13)$$

для всех $t,\tau \in [0,T]$.

Тогда

$$v(t) = U(t,0)v_0 + \int_0^t U(t,s)f(s)ds \qquad (3.14)$$

есть непрерывное при всех $t \in [0,T]$ *и непрерывно дифференцируемое при* $t > 0$ *решение (3.12). Функция* $\mathcal{A}(0)v(t)$ *непрерывна при* $t > 0$. *Если* $v_0 \in D$, *то*

$$v \in C^1([0,T],E), \qquad (3.15)$$

$$\mathcal{A}(0)v \in C([0,T],E). \qquad (3.16)$$

Замечание. Точка ноль в этих теоремах и далее в работе берется за начальную для определенности. Очевидно, ее можно заменить любой другой.

Доказательство теоремы 3.3.

Известно [1], что функция

$$v_1(t) = U(t,0)v_0 + \int_0^t U(t,s)f_2(s)ds \qquad (3.17)$$

непрерывна при $t \in [0,T]$ и непрерывно дифференцируема при $t > 0$,

$$\frac{dv_1}{dt} + \mathcal{A}(t)v_1 = f_2(t) \qquad (3.18)$$

Но имеем при $\Delta t \ge 0$, пользуясь (3.7)

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\int_0^{t+\Delta t} U(t+\Delta t,s)f_1(s)ds - \int_0^t U(t,s)f_1(s)ds\right] =$$
$$= \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U(t+\Delta t,s)f_1(s)ds +$$
$$+\frac{1}{\Delta t}(U(t+\Delta t,t)-I)\mathcal{A}^{-1}(t)\left[\mathcal{A}(t)\int_0^t U(t,s)f_1(s)ds\right]$$

(3.19)

Первое слагаемое при $\Delta t \to 0$ равномерно по t стремится к $f_1(t)$, а операторы $\frac{1}{\Delta t}(U(t+\Delta t,t)-I)\mathcal{A}^{-1}(t)$ равномерно по t сильно сходятся к $-I$ [1]. Функция

$$\mathcal{A}(t)\int_0^t U(t,s)f_1(s)ds \qquad (3.20)$$

абсолютно непрерывна по t при $t \in [0,T]$, что легко следует из (3.5), (3.10). Поэтому из (3.19) следует, что функция

$$v_2(t) = \int_0^t U(t,s)f_1(s)ds \qquad (3.21)$$

равномерно по t имеет правую непрерывную производную[7] при $t \in [0,T]$. Поэтому она [1] непрерывно дифференцируема при $t \in [0,T]$, и выполнено равенство

$$\frac{dv_2}{dt} + \mathcal{A}(t)v_2 = f_1(t) \qquad (3.22)$$

Тогда $v = v_1 + v_2$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке и удовлетворяет (3.12). Тогда из (3.12) следует $\mathcal{A}(t)v(t) \in C([\delta_0,T],E)$ при всяком малом δ_0.

Имеем тогда

$$\|\mathcal{A}(0)v(t+\Delta t) - \mathcal{A}(0)v(t)\| \le$$
$$\le \left\|\mathcal{A}(0)(\mathcal{A}(t))^{-1}\right\|\|\mathcal{A}(t)v(t+\Delta t) - \mathcal{A}(t)v(t)\| \le$$
$$\le C(\|\mathcal{A}(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \mathcal{A}(t)v(t)\| +$$
$$+\|(\mathcal{A}(t+\Delta t) - \mathcal{A}(t))v(t+\Delta t)\|) \le$$
$$\le C(\|\mathcal{A}(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \mathcal{A}(t)v(t)\| + \|(\mathcal{A}(t+\Delta t) -$$
$$-\mathcal{A}(t))(\mathcal{A}(t+\Delta t))^{-1}\|\|\mathcal{A}(t+\Delta t)v(t+\Delta t)\|)$$

при $t \ge \delta_0$.

В силу (3.5) оба слагаемых стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$. Поэтому

$$\mathcal{A}(0)v(t) \in C([\delta_0,T],E)$$

[7] Без ограничения общности можно считать, что функция f_1 определена в некоторой открытой окрестности сегмента $[0,T]$.

при всех малых δ_0, т.е. функция $\mathcal{A}(0)v(t)$ непрерывна при $t > 0$. При $v_0 \in D$ v_1 непрерывно дифференцируема в нуле [1], поэтому и $v \in C^1([0,T],E)$. Легко видеть, что в этом случае $\mathcal{A}(0)v(t)$ непрерывна в нуле. Теорема доказана.

Замечание. Если $\mathcal{A}(0)^{1+\delta_1} f_1(t) \in L^1([0,T],E)$, $\mathcal{A}(0)^{\delta_1} f(t) \in C([0,T],E)$ (где $\delta_1 > 0$ — некоторое число), то нетрудно убедиться (ср. [1]), что найдется $\delta_2 > 0$ такое, что если $v_0 \in D(\mathcal{A}(0)^{1+\delta_2})$, то $\mathcal{A}(0)^{\delta_2} v(t) \in C^1([0,T],E)$. Тогда из (3.5) и (3.12) следует, что

$$\left\|\mathcal{A}(0)^{1+\delta_2} v(t)\right\| \le C, t \in [0,T] \tag{3.23}$$

Этот факт нам понадобится ниже.

4. Пространства соленоидальных функций и проектор Лере

Рассмотрим пространство $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. В этом пространстве можно рассмотреть оператор $B_0 = I - \Delta$, с областью определения $D(B_0) = H^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Этот оператор самосопряжен, сильно позитивен и порождает шкалу соболевских пространств $H^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $m \ge 0$. А именно [2], [17] $H^m = D(B_0^{m/2})$ и скалярное произведение в H^m есть

$$(u,v)_m = (B_0^{m/2}u, B_0^{m/2}v)_{L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \tag{4.1}$$

Пространства H^m гильбертовы. Можно рассмотреть их подпространства

$$H_\sigma^m = \{u \in H^m_{(R^n,R^n)} \big| \, div\, u = 0\} \tag{4.2}$$

где div понимается в смысле распределений. H_σ^m совпадает с замыканием в $H^m_{(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$ множества гладких финитных функций с нулевой дивергенцией.

Можно задать еще одно представление пространства H_σ^m. Для этого рассмотрим проектор Лере P, который формально определяется так:

$$(Pu)_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}^{-1}(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2})\mathcal{F}(u_j), \tag{4.3}$$

где $\mathcal{F}_{x\to\xi}$ — преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$; δ_{ij} — символ Кронекера; $i,j = 1,\ldots,n$.

Выражение (4.3) можно переписать и так [13]:

$$(Pu)_i = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta^{-1})u_j \tag{4.4}$$

или

$$Pu = u - \nabla div \Delta^{-1} u \tag{4.5}$$

Из (4.3) легко следует, что $P^2 = P$ и P есть непрерывное отображение $H^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ в себя. Более того, $P(H^m) = H_\sigma^m$. Действительно, из (4.3) следует, что для всякого $u \in H^m$

$$div Pu = 0.$$

Отсюда следует включение $P(H^m) \subset H_\sigma^m$. Но легко также видеть, что $P|_{H_\sigma^m} = I$. Поэтому верно и включение $H_\sigma^m \subset P(H^m)$.

P коммутирует с оператором B_0. Поэтому [6] он коммутирует и со всеми дробными степенями B_0.

Покажем, что норма оператора P в H^m не превосходит 1. Для этого достаточно показать, что

$$(Pu,Pu)_m \le (u,u)_m \tag{4.6}$$

Т.к. P непрерывен, то можно доказывать (4.6) для гладких u. Имеем:

$$\begin{aligned}(u,u)_m &= (Pu,Pu)_m + 2((I-P)u,Pu)_m + \\ &+((I-P)u,(I-P)u)_m\end{aligned} \tag{4.7}$$

Но

$$\begin{aligned}((I-P)u,Pu) &= \int_{R^n} B_0^{\frac{m}{2}}(I-P)u(x)B_0^{\frac{m}{2}}Pu(x)dx = \\ &= \int_{R^n} (I-P)B_0^{\frac{m}{2}}u(x)PB_0^{\frac{m}{2}}u(x)dx = \\ &= \int_{R^n} \nabla div\,\Delta^{-1}B_0^{\frac{m}{2}}u(x)PB_0^{\frac{m}{2}}u(x)dx = \\ &= \int_{R^n} div\,\Delta^{-1}B_0^{\frac{m}{2}}u(x)\cdot div\,PB_0^{\frac{m}{2}}u(x)dx = 0\end{aligned}$$

(мы проинтегрировали по частям и воспользовались тем, что $div\,P \equiv 0$). Поэтому из (4.7) следует $(u,u)_m = (Pu,Pu)_m + ((I-P)u,(I-P)u)_m \ge$ $\ge (Pu,Pu)_m$.

Итак, $\|P\| \le 1$. Но $P^2 = P$. Поэтому [6] P является ортогональным проектором в H^m.

Оператор B_0 (точнее, его сужение) может быть рассмотрен как действующий в H_σ^0 с областью определения $D(B_0) = H_\sigma^2$. Тогда $H_\sigma^m = D(B_0^{\frac{m}{2}})$. Теперь оператор B_0 самосопряжен, сильно позитивен и его степени могут рассматриваться в этой шкале.

Отметим простое неравенство

$$\|B^{\alpha_1}u\|_{m_1} \le \|B^{\alpha_2}u\|_{m_2} \tag{4.8}$$

при $m_1 \le m_2, \alpha_1 \le \alpha_2$.

При целых m в H^m вводится эквивалентная норма[8]

[8] Евклидову норму в H^m мы также обозначаем $\|\cdot\|_m$. (4.8) имеет место и для нормы (4.9), и для евклидовой. Далее в работе мы обычно пользуемся евклидовой нормой.

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha|\le m} \left\| D^\alpha u \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \tag{4.9}$$

где D^α означает производную мультииндекса α.

5. Операторная трактовка задачи

В этом пункте мы перепишем систему (2.2), (2.4), (2.5) в операторном виде: как уравнение в гильбертовом пространстве; точнее, в любом из пространств H_σ^m.

Введем дифференциальный оператор $\widetilde{A}$ так:

$$(\widetilde{A}(u)v)_j = \sum_{i,k,l=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}} (\mathcal{E}(u)) \frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(v)}{\partial x_i}. \tag{5.1}$$

Положим теперь

$$A(u)v = -P\widetilde{A}(u)v + v - \mu_0 \Delta v \tag{5.2}$$

Введем еще билинейный оператор F.

$$F(u,v) = -P\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{5.3}$$

Положим

$$\widetilde{F}(u) = F(u,u) + u \tag{5.4}$$

Введем обозначение

$$f = P(f_0) \tag{5.5}$$

Замечание. Все введенные операторы и обозначения написаны формально. Ниже выяснится, из каких пространств берутся u, v, f_0.

Рассмотрим систему:

$$\frac{du(t)}{dt} + A(u(t))u(t) = \widetilde{F}(u(t)) + f(t) \tag{5.6}$$

$$u(0) = a, \tag{5.7}$$

где $u : [0,T] \to H_\sigma^{m_1}, m_1 \ge 0$ — некоторое число. Покажем, что система (5.6)—(5.7) адекватно отражает систему (2.2), (2.4), (2.5).

Предположим, что давление $p : [0,T] \to \to H^{m_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Применим P к обеим частям (2.4). Т.к. u теперь функция только от t, то будем писать не $\frac{\partial u}{\partial t}$, а $\frac{du}{dt}$. Из (4.3)—(4.5) также следует, что $P\, grad\, p = 0$. Получаем:

$$\frac{du}{dt} + P\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - P\, Div\, \overline{T}(\mathcal{E}(u)) - \mu_0 \Delta u = f. \tag{5.8}$$

Прибавим u к обеим частям (5.8) и воспользуемся тем, что $P\Delta u = \Delta P u = \Delta u$:

$$\frac{du}{dt} + u - \mu_0 \Delta u - P\, Div\, \overline{T}(\mathcal{E}(u)) = \\ = u - P\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f. \tag{5.9}$$

Осталось заметить, что

$$(Div\, \overline{T}(\mathcal{E}(u)))_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}_{ij}(\mathcal{E}(u))}{\partial x_i} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}_{ij}(\mathcal{E}(u))}{\partial \xi_{kl}} \frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(u)}{\partial x_i} = (\widetilde{A}(u)u)_j. \tag{5.10}$$

Сопоставляя (5.1),(5.2),(5.3),(5.4), (5.5),(5.10) и (5.9), получаем (5.6).

Все последующие пункты посвящены изучению системы (5.6)—(5.7). Коротко будем называть ее задачей (NV).

6. Основные результаты

В этом пункте мы сформулируем основные результаты работы. Они будут доказаны в последующих пунктах. Здесь и далее в работе везде размерность пространства $n = 2, 3$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия 1—3 из п. 1. Пусть* $a \in H_\sigma^3$, $f \in C([0,T], H_\sigma^1) \bigcap L^1([0,T], H_\sigma^3)$. *Тогда существует такая константа* K_1[9], *не зависящая от* T, *что при*

$$\|a\|_3 + \|f\|_{L^1([0,T], H_\sigma^3)} \le K_1 \tag{6.1}$$

существует единственное решение u *задачи (NV) в классе*

$$C^1([0,T], H_\sigma^1) \bigcap C([0,T], H_\sigma^3) \tag{6.2}$$

Теорема 6.2. *В условиях предыдущей теоремы решение непрерывно зависит от данных задачи. Именно: если пары* (a_i, f_i) *удовлетворяют (6.1),* $i = 0, 1, 2, \ldots$,

$$a_i \underset{i\to\infty}{\to} a_0$$

в H_σ^3

$$f_i \underset{i\to\infty}{\to} f_0$$

в $C([0,T], H_\sigma^1)$ *и в* $L^1([0,T], H_\sigma^3)$, *то для соответствующих решений* u_i *задач (NV) с данными* (a_i, f_i) *выполнено:*

$$u_i \underset{i\to\infty}{\to} u_0$$

в $C^1([0,T], H_\sigma^1)$ *и в* $C([0,T], H_\sigma^3)$.

Теорема 6.1 есть глобальная по t теорема существования: понятно, что если $f \in \in C([0,T], H_\sigma^1) \bigcap L^1([0,T], H_\sigma^3)$ для всякого $T \in \mathbb{R}_+$ и

$$\|a\|_3 + \|f\|_{L^1([0,\infty], H_\sigma^3)} \le K_1,$$

[9] Здесь и далее буквой K обозначаются положительные константы

то решение u существует на всем интервале $[0,+\infty)$. Впрочем, при более слабых условиях имеет место локальное существование решения задачи (NV). Утверждения об этом будут использоваться при доказательстве теоремы 6.1. Но так как они имеют независимое значение, то мы их сформулируем здесь.

Лемма 6.1. *Пусть выполнены условия 1—3 из п. 1. Тогда существует такая константа K_2, что выполняется следующее утверждение:*

Пусть $a \in H_\sigma^3, f \in C([0,T],H_\sigma^1)\bigcap L^1([0,T],H_\sigma^3)$, $\|a\|_3 < K_2$. Тогда найдется $t_0 > 0$, что решение u задачи (NV) существует и единственно в классе

$$C^1([0,t_0],H_\sigma^1)\bigcap C([0,t_0],H_\sigma^3), \qquad (6.3)$$

где $t_0 \le T$ зависит только от $\|a\|_3, \|f\|_{L^1([0,T],H_\sigma^3)}$ и $\|f\|_{C([0,T],H_\sigma^1)}$.

Лемма 6.2. *В условиях предыдущей леммы существует K_3 такое, что если $a \in H_\sigma^4$, $f \in C([0,T],H_\sigma^2)\bigcap L^1([0,T],H_\sigma^4), \|a\|_3 < K_3$, то найдется $t_0 > 0$, что решение u задачи (NV) существует и единственно в классе*

$$C^1([0,t_0],H_\sigma^2)\bigcap C([0,t_0],H_\sigma^4), \qquad (6.4)$$

где $t_0 \le T$ зависит только от $\|a\|_3, \|f\|_{L^1([0,T],H_\sigma^3)}$ и $\|f\|_{C([0,T],H_\sigma^1)}$ (т.е. t_0 можно взять тем же, что и в лемме 6.1).

Аналогичный результат имеет место и в условиях теоремы 6.1 (см. п.14).

7. Лемма о параболических уравнениях

В этом пункте будет доказана вспомогательная лемма о параболических уравнениях в банаховом пространстве. Общий ход рассуждений в ее доказательстве во многом повторяет доказательство одной из теорем [1].

Рассмотрим систему

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{A}(v)v = f_1(t) + f_2(t), \qquad (7.1)$$

$$v(0) = v_0 \qquad (7.2)$$

где $v(t)$ — искомая функция, принимающая значения в некотором банаховом пространстве $E; t \in [0,T]$. Норму в E будем обозначать просто $\|\cdot\|$.

Лемма 7.1. *Пусть α, β, R — некоторые числа, $0 \le \alpha < \beta \le 1; \mathcal{B}: D(\mathcal{B}) \to E$ — некоторый сильно позитивный оператор, действующий в E; $\overline{D(\mathcal{B})} = E$.*

Пусть для всякого v_0 такого, что

$$v_0 \in D(\mathcal{B}^\beta), \|B^\alpha v_0\| < R \qquad (7.3)$$

определен линейный оператор $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(v_0)$, причем $D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{B})$ и для всех $v \in D(\mathcal{B})$:

$$K_4 \|\mathcal{A}_0 v\| \le \mathcal{B}v \le K_5 \|\mathcal{A}_0 v\|, \qquad (7.4)$$

где K_4, K_5 не зависят от v и v_0.

Пусть $\mathcal{A}_0$ сильно позитивен равномерно по v_0, т.е. константа C в (3.2) не зависит от v_0.

Пусть при всяком $v \in D(\mathcal{B}^\alpha), \|\mathcal{B}^\alpha v\| < R$ определен линейный оператор $\mathcal{A}(v)(\cdot)$, действующий на $D(\mathcal{B})$, причем

$$\left\|(\mathcal{A}(v) - \mathcal{A}(w))\mathcal{A}_0^{-1}\right\| \le K_6 \|\mathcal{B}^\alpha(v-w)\| \qquad (7.5)$$

для всех $v,w \in D(\mathcal{B}^\alpha)$ таких, что $\|\mathcal{B}^\alpha v\|$, $\|\mathcal{B}^\alpha w\| < R$.

Пусть $f_2 : D(\mathcal{B}^\alpha) \to E$ и для всех $v,w \in D(\mathcal{B}^\alpha)$ таких, что $\|\mathcal{B}^\alpha v\|, \|B^\alpha w\| < R$

$$\|f_2(v) - f_2(w)\| \le K_7 \|\mathcal{B}^\alpha(v-w)\|, \qquad (7.6)$$

K_6, K_7 не зависят от v_0, v, w.

Пусть $f_1 : [0,T] \to D(\mathcal{B})$, причем

$$f_1 \in C([0,T],E), \mathcal{B}f_1 \in L^1([0,T],E). \qquad (7.7)$$

Тогда для всякого v_0, удовлетворяющего (7.3) существует решение v задачи (7.1)—(7.2), такое, что

$$v \in \bigcup_{\delta\in(0,t_0)} C^1([\delta,t_0],E) \qquad (7.8)$$

$$\mathcal{B}v \in \bigcup_{\delta\in(0,t_0)} C([\delta,t_0],E), \qquad (7.9)$$

где t_0 — некое число, которое при изменении f_1 и v_0 зависит лишь от $\|f_1\|_{C([0,T],E)}, \|\mathcal{B}f_1\|_{L^1([0,T],E)}$ и $\|B^\beta v_0\|$.

Если $v_0 \in D(\mathcal{B})$, то

$$v \in C^1([0,t_0],E) \qquad (7.10)$$

$$\mathcal{B}v \in C([0,t_0],E). \qquad (7.11)$$

Доказательство. Рассмотрим множество $Q = Q(t_0,\eta)$, которое состоит из тех функций $v \in C([0,t_0],E)$, у которых

$$v(0) = \mathcal{B}^\alpha(v_0) \qquad (7.12)$$

и для любых $t,\tau \in [0,t_0]$

$$\|v(t) - v(\tau)\| \le |t-\tau|^\eta \qquad (7.13)$$

(параметры $t_0, \eta \in \mathbb{R}_+$ будут определены позднее).

Множество Q является замкнутым в $C([0,t_0],E)$. Из (7.3), (7.12), (7.13) следует, что при достаточно малом t_0

$$\|v(t)\| < R \tag{7.14}$$

для всех $t \in [0, t_0], v \in Q$.

Следовательно, по любой такой функции v можно построить оператор-функцию

$$\mathcal{A}_v(t) = \mathcal{A}(\mathcal{B}^{-\alpha} v(t)), \tag{7.15}$$

определенную на $D(\mathcal{B})$ при всех $t \in [0, t_0]$. Из (7.5) и (7.13) следует

$$\|(\mathcal{A}_v(t) - \mathcal{A}_v(\tau))\mathcal{A}_0^{-1}\| \le K_6 \,|\, t - \tau\,|^{\eta} . \tag{7.16}$$

Т.к. в силу (7.12)

$$\mathcal{A}_v(0) = \mathcal{A}_0, \tag{7.17}$$

а $\mathcal{A}_0$ — сильно позитивен, то из (7.16) вытекает [1], что при достаточно малом t_0 и любом $t \in [0, t_0]$ оператор $\mathcal{A}_v(t)$ также сильно позитивен и

$$\|(\mathcal{A}_v(t) - \mathcal{A}_v(\tau))\mathcal{A}_v^{-1}(s)\| \le K_{10} \,|\, t - \tau\,|^{\eta} \tag{7.18}$$

для всех $t, \tau, s \in [0, t_0]$. По теореме 3.1 тогда существует разрешающий оператор $U_v(t, \tau)$ для оператора $\mathcal{A}_v$. Из (3.11) и (7.18) следует, что

$$\left\|\mathcal{A}_0^{\alpha}(U_v(t + \Delta t, 0) - U_v(t, 0))\mathcal{A}_0^{-\beta}\right\| \le K_{11} \Delta t^{\beta - \alpha} \tag{7.19}$$

при $0 \le t \le t + \Delta t \le t_0$.

Положим $f_v(t) = f_2(\mathcal{B}^{-\alpha} v(t))$. Тогда из (7.6), (7.13) следует:

$$\|f_v(t) - f_v(\tau)\| \le K_{12} \,\|t - \tau\|^{\eta} , \tag{7.20}$$

а из (7.6) и (7.14) следует:

$$\|f_v(t)\| \le K_{13} = K_7 R + f_2(0). \tag{7.21}$$

Т.к. K_6, K_{10} не зависят от s, t, τ, v, v_0, то [1] K_{11}, K_{12}, K_{13} также от этих переменных не зависят.

Из [1, формула (2.9)] следует неравенство:

$$\begin{gathered}\left\|\mathcal{A}_0^{\alpha}\left[\int_0^{t+\Delta t} U_v(t + \Delta t, s)(f_1(s) + f_v(s))ds -\right.\right.\\ \left.\left. - \int_0^t U_v(t, s)(f_1(s) + f_v(s))ds\right]\right\| \le \\ \le K_{14} \Delta t^{1-\alpha}(|\ln \Delta t\,| + 1)\|f_1 + f_v\|_{C([0,t_0],E)}\end{gathered} \tag{7.22}$$

Введем оператор $w : Q \to E$ по формуле:

$$\begin{gathered}w(v)(t) = \mathcal{B}^{\alpha} U_v(t, 0) v_0 + \\ + \mathcal{B}^{\alpha} \int_0^t U_v(t, s)(f_1(s) + f_v(s))ds\end{gathered} \tag{7.23}$$

Пусть $\alpha_1, \beta_1, \eta_1, \eta$ — такие числа, что $\alpha < \alpha_1 < \alpha_1 + \eta < \alpha_1 + \eta_1 < \beta_1 < \beta$. Напомним [3], что из (7.4) следует

$$\begin{gathered}\|\mathcal{A}_0^{\gamma_1} u\| \le K_{15}(\gamma_1, \gamma)\mathcal{B}^{\gamma} u, \\ \|\mathcal{B}^{\gamma_1} u\| \le K_{16}(\gamma_1, \gamma)\mathcal{A}_0^{\gamma} u.\end{gathered} \tag{7.24}$$

для всяких $0 < \gamma_1 < \gamma < 1$.

Из (7.19), (7.21), (7.22), (7.23), (7.24) следует

$$\begin{gathered}\|w(v)(t + \Delta t) - w(v)(t)\| \le \\ \le \|\mathcal{B}^{\alpha}\mathcal{A}_0^{-\alpha_1}\|(\|(\mathcal{A}_0^{\alpha_1}(U_v(t + \Delta t, 0) - \\ - U_v(t, 0))\mathcal{A}_0^{-\beta_1}\|\|\mathcal{A}_0^{\beta_1}\mathcal{B}^{-\beta}\|\|\mathcal{B}^{\beta} v_0\| + \\ + \|\mathcal{A}_0^{\alpha_1}(\int_0^{t+\Delta t} U_v(t + \Delta t, s)(f_1(s) + f_v(s))ds - \\ - \int_0^t U_v(t, s)(f_1(s) + f_v(s))\,ds)\|) \le \\ K_{17}(\Delta t^{\beta_1 - \alpha_1} + \Delta t^{1-\alpha_1}(|\ln \Delta t\,| + 1)) \le K_{18} \Delta t^{\eta} t_0^{\eta_1 - \eta},\end{gathered}$$

где K_{18} зависит лишь от $\|f_1\|_{C([0,T],E)}, \|\mathcal{B}^{\beta} v_0\|$. При достаточно малом t_0

$$\|w(v)(t + \Delta t) - w(v)(t)\| \le \Delta t^{\eta} \tag{7.25}$$

Но

$$w(v)(0) = \mathcal{B}^{\alpha} v_0 \tag{7.26}$$

Поэтому w переводит Q в себя.

Покажем, что w является сжатием.

Пусть $v_1, v_2 \in Q, z_1 = \mathcal{B}^{-\alpha} w(v_1), z_2 = \mathcal{B}^{-\alpha} w(v_2)$. Легко видеть, что

$$z_1(0) = z_2(0) = v_0 \tag{7.27}$$

Из теоремы 3.3 следует, что при $t > 0$ z_1, z_2 непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dz_i(t)}{dt} + \mathcal{A}_{v_i}(t) z_i(t) = f_{v_i}(t) + f_1(t) (i = 1, 2). \tag{7.28}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\frac{d(z_1 - z_2)}{dt} + \mathcal{A}_{v_1}(t)(z_1 - z_2) = \\ = (\mathcal{A}_{v_2}(t) - \mathcal{A}_{v_1}(t)) z_2 + f_{v_1}(t) - f_{v_2}(t).\end{gathered} \tag{7.29}$$

Покажем следующее

$$\|\mathcal{A}_0 z_2(t)\| \le K_{19} t^{\beta_1 - 1} \tag{7.30}$$

Действительно,

$$\|\mathcal{A}_0 z_2(t)\| \le \|\mathcal{A}_0 U_{v_2}(t,0)v_0\| +$$

$$+\left\|\mathcal{A}_0\int_0^t U_{v_2}(t,s)f_{v_2}(s)\,ds\right\| + \left\|\mathcal{A}_0\int_0^t U_{v_2}(t,s)f_1(s)\,ds\right\|. \quad (7.31)$$

Отметим следующие оценки, которые следуют из (7.4)

$$\left\|\mathcal{A}_{v_2}(t)\mathcal{A}_{v_2}^{-1}(\tau)\right\| \le K_{20} \quad (7.32)$$

$$\left\|\mathcal{A}_{v_2}^{\gamma_1}(t)\mathcal{A}_{v_2}^{-\gamma_2}(\tau)\right\| \le K_{21}, \gamma_2 > \gamma_1. \quad (7.33)$$

С помощью (3.10) тогда можно оценить первое слагаемое правой части (7.31).

$$\|\mathcal{A}_0 U_{v_2}(t,0)v_0\| \le$$

$$\le \|\mathcal{A}_0\mathcal{A}_{v_2}(t)^{-1}\|\|\mathcal{A}_{v_2}(t)U_{v_2}(t,0)\mathcal{A}_0^{-\beta_1}\|\|\mathcal{A}_0^{\beta_1}\mathcal{B}^{-\beta}\|\|\mathcal{B}^{\beta}v_0\| \le$$

$$\le K_{22}t^{\beta_1-1}.$$

Из теоремы 3.3 следует, что выражение $\mathcal{A}_0\int_0^t U_{v_2}(t,s)f_{v_2}(s)$ непрерывно по t. Поэтому второе слагаемое правой части (7.31) ограничено просто константой K_{23}.

Третье слагаемое оценится с помощью (3.10).

$$\left\|\mathcal{A}_0\int_0^t U_{v_2}(t,s)f_1(s)\right\| \le$$

$$\le \int_0^t \|\mathcal{A}_0 U_{v_2}(t,s)\mathcal{A}_0^{-1}\|\|\mathcal{A}_0\mathcal{B}^{-1}\|\|\mathcal{B}f_1(s)\|\,ds \le$$

$$\le K_{24}\|\mathcal{B}f_1\|_{L^1([0,T],E)} \le K_{25}.$$

Итак, (7.30) доказано.

Можно показать, что имеет место тождество (ср. [17]):

$$z_1(t) - z_2(t) =$$

$$= \int_0^t U_{v_1}(t,s)[(\mathcal{A}_{v_2}(s) - \mathcal{A}_{v_1}(s))z_2(s) + (f_{v_1}(s) - f_{v_2}(s))]\,ds. \quad (7.34)$$

Применяя к обеим частям $\mathcal{B}^{\alpha}$, получим, пользуясь (7.30), (3.10), (7.24), (7.5), (7.6):

$$\|w(v_1)(t) - w(v_2)(t)\| \le \|\mathcal{B}^{\alpha}\mathcal{A}_0^{-\alpha_1}\|\,\Big|\Big|\int_0^t \mathcal{A}_0^{\alpha_1}U_{v_1}(t,s)[(\mathcal{A}_{v_2}(s) -$$

$$-\mathcal{A}_{v_1}(s))\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_0 z_2(s) + (f_{v_1}(s) - f_{v_2}(s))]ds \le$$

$$\le K_{28}\int_0^t \left(|t-s|^{-\alpha_1}\|v_1(s) - v_2(s)\|s^{\beta_1-1} + \|v_1(s) - v_2(s)\|\right)ds, \quad (7.54)$$

откуда следует

$$\|w(v_1) - w(v_2)\|_{C([0,t_0],E)} \le K_{29}t_0^{\beta_1-\alpha_1}\|v_1 - v_2\|_{C([0,t_0],E)}. \quad (7.36)$$

При t_0 достаточно малом $K_{29}t_0^{\beta_1-\alpha_1} < 1$, и w является сжатием. В силу принципа сжимающих отображений [16] w имеет в Q неподвижную точку v_*. Функция

$$z(t) = \mathcal{B}^{-\alpha}v_*(t)$$

будет тогда удовлетворять уравнению:

$$z(t) = U_{\mathcal{B}^{\alpha}z}(t,0)v_0 + \int_0^t U_{\mathcal{B}^{\alpha}z}(t,s)(f_1(s) + f_{\mathcal{B}^{\alpha}z}(s))ds. \quad (7.37)$$

Из теоремы 3.3 следует, что $z(t)$ будет решением (7.1)—(7.2), и выполняются (7.8), (7.9), а если $v_0 \in D(\mathcal{B})$, то (7.10), (7.11). Осталось заметить, что все константы в доказательстве теоремы, в т.ч. и t_0, зависят при изменении f_1 и v_0 лишь от $\|\mathcal{B}^{\beta}v_0\|, \|f_1\|_{C([0,T],E)}, \|\mathcal{B}f_1\|_{L^1([0,T],E)}$.

8. Лемма об априорной оценке

Если на решение системы (7.1)—(7.2) имеется априорная оценка, то t_0 можно взять равным T. Это будет показано в этом пункте.

Заметим сначала, что в условиях леммы 7.1 при изменении f_1 и v_0 число t_0 можно считать непрерывной невозрастающей функцией от

$$\|\mathcal{B}f_1\|_{L([0,T],E)} + \|f_1\|_{C([0,T],E)} + \|\mathcal{B}^{\beta}v_0\|.$$

Это следует из следующего простого факта.

Лемма 8.1. *Пусть k — некоторое число, и $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ — некоторая функция. Тогда существует непрерывная невозрастающая функция $\psi_1 : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всякого $x \in \mathbb{R}^k$:*

$$\psi_1\Big(\sum_{i=1}^k |x_i|\Big) \le \psi(x). \quad (8.1)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi_2 : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$, которая задается так:

$$\psi_2(r) = \min_{\sum_{i=1}^k |x_i| \le r} \psi(x)$$

ψ_2 невозрастает, поэтому суммируема на любом конечном отрезке. Положим $\psi_1(r) = \int_r^{r+1}\psi_2(s)ds$.

Это непрерывная функция и $\psi_1(r) \le \psi_2(r)$. Она и является искомой.

Итак, t_0 — невозрастающая функция от суммы указанных норм. В частности, если эти нормы ограничены, то t_0 отделено от нуля.

Перейдем теперь к лемме об априорной оценке.

Лемма 8.2. *Пусть в условиях леммы 7.1 про любое решение* $v(t):[0,t_1]\to E$ *задачи (7.1)—(7.2) на любом отрезке* $[0,t_1]\subset[0,T]$ *априорно известно, что оно ограничено:*

$$\left\|\mathcal{B}^{\beta}v(t)\right\|\le K_{30}, t\in[0,t_1], \tag{8.2}$$

где $K_{30}(v_0,f_1)$ *не зависит от* t_1 *и от* v. *Тогда в лемме 7.1 можно взять* $t_0=T$, *т.е. решение существует на всем отрезке* $[0,T]$.

Доказательство.

Предположим, что решение существует на некотором отрезке $[0,t_0^1]$. Обозначим это решение $v_1:[0,t_0^1]\to E$. Рассмотрим уравнение

$$v(t_0^1)=v_1(t_0^1) \tag{8.3}$$

и рассмотрим задачу Коши (7.1), (8.3) при $t\in[t_0^1,T]$.

Из леммы 7.1 следует, что у нее существует локальное решение $v_2:[t_0^1,t_0^1+t_0^2]\to E$. Рассмотрим уравнение

$$v(t_0^1+t_0^2)=v_2(t_0^1+t_0^2), t\in[t_0^1+t_0^2,T], \tag{8.4}$$

и рассмотрим задачу (7.1), (8.4) и т.д.

Повторим этот процесс, и заметим, что из (8.2) следует

$$\left\|\mathcal{B}^{\beta}v_i(t_0^1+\ldots+t_0^i)\right\|\le K_{30}.$$

Поэтому сумма указанных в начале этого пункта норм для всех последовательных задач ограничена общей константой. Значит, длины интервалов существования t_0^i отделены от нуля при росте i. Поэтому в конце концов найдется номер i_0 такой, что $\sum_{i=1}^{i_0}t_0^i=T$.

Положим $\tilde v(t)=v_1(t)$ при $t\in[0,t_0^1]$, $\tilde v(t)=v_i(t)$ при

$$t\in[t_0^1+\ldots+t_0^{i-1},t_0^1+\ldots+t_0^{i-1}+t_0^i], i\ge 2$$

Из леммы 7.1 следует, что

$$\mathcal{B}v_1\in C([\delta,t_0^1],E),\delta>0;$$

$$\mathcal{B}v_i\in C([t_0^1+\ldots+t_0^{i-1},t_0^1+\ldots+t_0^{i-1}+t_0^i],E), i\ge 2.$$

Поэтому $\tilde v$ удовлетворяет (7.9) при $t_0=T$. Из леммы 7.1 также следует, что

$$\mathcal{A}(v_1)v_1, f_2(v_1)\in C([\delta,t_0^1],E),\delta>0;$$

$$\mathcal{A}(v_i)v_i, f_2(v_i)\in C([t_0^1+\ldots+t_0^{i-1},t_0^1+\ldots+t_0^{i-1}+t_0^i],E),$$
$$i\ge 2$$

Поэтому

$$\mathcal{A}(\tilde v)\tilde v, f_2(\tilde v)\in C([\delta,T],E),\delta>0.$$

Т.к. $f_1\in C([0,T],E)$, то (7.1) дает, что $\frac{d}{dt}\tilde v\in C([\delta,T],E)$. Т.е. мы показали, что $\tilde v$ удовлетворяет (7.8) при $t_0=T$. Из леммы 7.1 также следует, что если $v_0\in D(\mathcal{B})$, то $\tilde v$ удовлетворяет (7.10), (7.11) при $t_0=T$. Итак, $\tilde v$ — решение (7.1),(7.2), для которого выполнены все утверждения леммы 7.1 при $t_0=T$.

9. Вспомогательные факты

Сначала здесь мы отметим некоторые неравенства, которые в основном следуют из теорем вложения Соболева [4]. В этом пункте будем писать H^m вместо $H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, L_p вместо $L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Начнем с неравенства Гёльдера следующем виде:

$$\|uv\|_{L_2}\le\|u\|_{L_p}\|v\|_{L_q}. \tag{9.1}$$

Здесь uv означает поточечное произведение функций u,v;

$$2\le p,q\le\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le\frac{1}{2}$$

Если $n=2,3$ и

$$\frac{6}{p}-3+2m>0 \tag{9.2}$$

то

$$\|u\|_{L_p}\le K_{31}(p,m)\|u\|_m. \tag{9.3}$$

Если $-3+2m>0$, то функции из H^m непрерывны и ограничены. Более того, в этом случае H^m является банаховой алгеброй, и

$$\|uv\|_m\le K_{32}(m)\|u\|_m\|v\|_m. \tag{9.4}$$

Отметим еще следующие простые числовые неравенства:

Для всяких чисел b_1,b_2,b_3,b_4:

$$|b_1b_3-b_2b_4|\le|b_3-b_4||b_1|+|b_1-b_2||b_4| \tag{9.5}$$

Для всяких b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6:

$$|b_1b_3b_5-b_2b_4b_6|\le|b_1-b_2||b_4||b_6|+$$
$$+|b_3-b_4||b_1||b_6|+|b_5-b_6||b_3||b_1|. \tag{9.6}$$

Отметим в этом пункте еще одно свойство классов (6.3), (6.4).

Лемма 9.1. *Если функция* $u(t)$ *принадлежит классу (6.3), то* $\|u\|_2^2 \in C^1([0,t_0])$ *, и*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2(t) = 2\left(\frac{d}{dt}u(t), B_0u(t)\right)_1. \qquad (9.7)$$

Если же $u(t)$ *принадлежит (6.4), то* $\|u\|_3^2 \in C^1([0,t_0])$ *и*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_3^2(t) = 2\left(\frac{d}{dt}u(t), B_0u(t)\right)_2. \qquad (9.8)$$

Доказательство. Пусть u принадлежит классу (6.3). Покажем (9.7). Приблизим u функциями u_i из $C^1([0,t_0], H_\sigma^3)$; $u_i \underset{i\to\infty}{\to} u$ в смысле топологии пересечения (6.3).

Очевидно,

$$\frac{d}{dt}\|u_i\|_2^2(s) = 2\left(\frac{d}{dt}u_i, u_i\right)_2(s) = 2\left(\frac{d}{dt}u_i, B_0u_i\right)_1(s).$$

Отсюда, интегрируя от 0 до t:

$$\|u_i\|_2^2(t) - \|u_i\|_2^2(0) = \int_0^t 2\left(\frac{d}{dt}u_i, B_0u_i\right)_1(s)\,ds;$$

это влечет

$$\|u\|_2^2(t) - \|u\|_2^2(0) = \int_0^t 2\left(\frac{d}{dt}u, B_0u\right)_1(s)\,ds. \qquad (9.9)$$

Т.к. подынтегральное выражение непрерывно, то из (9.9) следует (9.7).

Аналогично доказывается второе утверждение леммы.

10. Доказательство лемм 6.1 и 6.2

В этом пункте мы покажем только существование решения. Единственность будет следовать из более общей леммы о единственности — см. п. 11.

Введем параметр $l = 0,1,2$; и пусть $\alpha_0(l) = \frac{7}{8}$ при $l = 0,1$; $\alpha_0(l) = \frac{1}{2}$ при $l = 2$.

Предложение 10.1. *Найдется такая константа* K_{33}*, что при*

$$v,w,h \in H_\sigma^l, \left\|B_0^{\alpha_0(l)}v\right\|_l, \left\|B_0^{\alpha_0(l)}w\right\|_l < K_{33},$$

выполнено

$$\left\|(A(v)-A(w))h\right\|_l \le K_{34}\left\|B_0^{\alpha_0(l)}(v-w)\right\|_1 \left\|B_0h\right\|_l. \ (10.1)$$

Доказательство. Имеем:

$$\left\|(A(v)-A(w))h\right\|_l \le \left\|(\widetilde{A}(v)-\widetilde{A}(w))h\right\|_l \le$$
$$\le K_8 \sum_{|\alpha|\le l}\left\|D^\alpha(\widetilde{A}(v)-\widetilde{A}(w))h\right\|_0. \qquad (10.2)$$

Сначала оценим член с $|\alpha| = 0$. Для этого заметим, что из (9.3) следует

$$\left\|\mathcal{E}(u)\right\|_{L_\infty}, \left\|\mathcal{E}(v)\right\|_{L_\infty} < K_{33}K_{31}.$$

Но из условия 2) из п. 1 следует, что функция $\frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}$ локально липшицева. Отсюда имеем:

$$\left\|(\widetilde{A}(v)-\widetilde{A}(w))h\right\|_0 \le$$
$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left\|\left(\frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(v)) - \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(w))\right)\frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(h)}{\partial x_i}\right\|_0 \le$$
$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left\|\frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(v)) - \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(w))\right\|_{L_\infty}\left\|\frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(h)}{\partial x_i}\right\|_{L_2} \le$$
$$\le K_{35}\left\|\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(w)\right\|_{L_\infty}\left\|h\right\|_{H^2} \le$$
$$K_{36}\left\|\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(w)\right\|_{H^{7/4}}\left\|h\right\|_{H^2} \le$$
$$\le K_{37}\left\|B_0^{7/8}(v-w)\right\|_1\left\|B_0h\right\|_0.$$

При $|\alpha| = 1$ получаем, пользуясь неравенствами из п. 9 и условием 2) из п. 1:

$$\left\|D^\alpha((\widetilde{A}(v)-\widetilde{A}(w))h)\right\|_0 \le$$
$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left(\left\|D^\alpha\left(\frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(v)) - \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(w))\right)\frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(h)}{\partial x_i}\right\|_0 +\right.$$
$$\left.+\left\|\left(\frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(v)) - \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(w))\right)D^\alpha\frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(h)}{\partial x_i}\right\|_0\right) \le$$
$$\le \sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left(\left\|D^\alpha\left(\frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(v)) - \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(w))\right)\right\|_{L_3}\left\|\frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(h)}{\partial x_i}\right\|_{L_6} +\right.$$
$$\left.+\left\|\frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(v)) - \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(w))\right\|_{L_\infty}\left\|D^\alpha\frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(h)}{\partial x_i}\right\|_{L_2}\right) \le$$
$$\le \sum_{i,j,k,l=1}^{n}K_{38}\left(\left\|\sum_{k_1,l_1=1}^{n}\frac{\partial^2 \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}\partial \xi_{k_1l_1}}(\mathcal{E}(v))D^\alpha\mathcal{E}_{k_1l_1}(v) -\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}\partial \xi_{k_1l_1}}(\mathcal{E}(w))D^\alpha\mathcal{E}_{k_1l_1}(w)\right\|_{L_3}\left\|h\right\|_{H^3} +$$
$$\left.+\left\|\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(w)\right\|_{L_\infty}\left\|h\right\|_{H^3}\right)$$
$$\le \sum_{i,j,k,l=1}^{n}K_{39}\left(\sum_{k_1,l_1=1}^{n}\left[\left\|\frac{\partial^2 \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}\partial \xi_{k_1l_1}}(\mathcal{E}(v)) -\right.\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 \overline{T}_{ij}}{\partial \xi_{kl}\partial \xi_{k_1l_1}}(\mathcal{E}(w))\right\|_{L_\infty}\left\|D^\alpha\mathcal{E}_{k_1l_1}(w)\right\|_{L_3} +$$

$$+\left\|D^{\alpha}(\mathcal{E}_{k_1l_1}(v)-\mathcal{E}_{k_1l_1}(w))\right\|_{L_3}\left\|\frac{\partial^2\overline{T}_{ij}}{\partial\xi_{kl}\partial\xi_{k_1l_1}}(\mathcal{E}(v))\right\|_{L_\infty}]+$$

$$+\left\|\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(w)\right\|_{L_\infty})\|h\|_3\le$$

$$\le K_{40}(\left\|\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(w)\right\|_{L_\infty}\|w\|_{H^{11/4}}+\|v-w\|_H\left\|\mathcal{E}(v)\right\|_{L_\infty}+$$

$$+\left\|\mathcal{E}(v)-\mathcal{E}(w)\right\|_{L_\infty})\|h\|_3\le$$

$$\le K_{40}K_{31}(\|v-w\|_{11/4}\|w\|_{11/4}+\|v-w\|_{11/4}\|v\|_{11/4}+$$

$$+\|v-w\|_{11/4})\|h\|_3\le K_{41}\left\|B_0^{7/8}(v-w)\right\|_1\|B_0h\|_1.$$

При $|\alpha|=2$ подобным образом получаем

$$\left\|D^{\alpha}\left((\widetilde{A}(v)-\widetilde{A}(w))h\right)\right\|_0\le K_{42}\left\|B_0^{\frac{1}{2}}(v-w)\right\|_2\|B_0h\|_2.$$

Из доказанных оценок следует (10.1) при всех l.

Предложение 10.2. *Найдутся такие константы K_{43},K_{44}, что если*

$$\left\|B_0^{\alpha_0(l)}a\right\|_l<K_{43}, \tag{10.3}$$

то выполнено

$$(A(a)v,B_0v)_l\ge K_{44}(B_0v,B_0v)_l. \tag{10.4}$$

Доказательство. Т.к. $A(0)=I-\mu_0\Delta$[10], то найдется константа K_{45} такая, что

$$(A(0)v,B_0v)_l\ge K_{45}(B_0v,B_0v)_l \tag{10.5}$$

Но с другой стороны, из (10.1) следует:

$$\begin{aligned}&((A(a)-A(0))v,B_0v)_l\le\\&\le\left\|(A(a)-A(0))v\right\|_l\|B_0v\|_l\le\\&\le K_{34}\left\|B_0^{\alpha_0(l)}(a)\right\|_l\|B_0v\|_l^2\le K_{34}K_{43}(B_0v,B_0v)_l.\end{aligned} \tag{10.6}$$

Поэтому, если $K_{34}K_{43}<\frac{K_{45}}{2}$, а $K_{44}=\frac{K_{45}}{2}$, то из (10.5), (10.6) следует (10.4). Предложение доказано.

Из (10.1) следует:

$$\left\|(A(a)-A(0))v\right\|_l\le K_{46}\|B_0v\|_l. \tag{10.7}$$

Но для всякого $\lambda\in C, Re\lambda\ge0$ (в этих рассуждениях H_σ^l считается комплексным пространством)

$$\left\|(A(0)+\lambda I)v\right\|_l\le K_{47}(\lambda)\|B_0v\|_l. \tag{10.8}$$

Поэтому

$$\left\|(A(a)+\lambda I)v\right\|_l\le K_{48}(\lambda)\|B_0v\|_l. \tag{10.9}$$

Но из неравенства Коши—Буняковского и (10.4) следует:

$$\left\|(A(a)+\lambda I)v\right\|_l\ge K_{49}(\lambda)\|B_0v\|_l. \tag{10.10}$$

[10] Это следует из (1.4),(5.1) и (5.2).

Далее в этом пункте $l=1,2$.

Предложение 10.3. *При условии (10.3) оператор $A_0=A(a)$ сильно позитивен в H_σ^l; ($H_\sigma^{l+2}\simeq D(A_0)\subset H_\sigma^l$).*

Доказательство. Из (10.10) следует, что $Ker(A_0+\lambda I)=\{0\}$. Покажем, что $Im(A_0+\lambda I)$ — плотное в H_σ^l множество. Предположим противное. Тогда в H_σ^l существует ненулевой вектор $h\perp Im(A_0+\lambda I)$. Рассмотрим $\zeta=B_0^{-1}h\in$ $\in D(A_0)$. Тогда из (10.4)

$$Re((A_0+\lambda I)\zeta,B_0\zeta)_l\ge K_{44}(B_0\zeta,B_0\zeta)_l>0. \tag{10.11}$$

Но т.к. $(A_0+\lambda I)\zeta\in Im(A_0+\lambda I), B_0\zeta=h$, то левая часть (10.11) равна нулю. Противоречие.

Покажем теперь, что $Im(A_0+\lambda I)$ замкнуто. Пусть $h_i\underset{i\to\infty}{\to}h_0, h_i\in Im(A_0+\lambda I)$. Покажем, что $h_0\in Im(A_0+\lambda I)$. Отметим, что найдутся ζ_i: $(A_0+\lambda I)\zeta_i=h_i$. Тогда последовательность $(A_0+\lambda I)\zeta_i$ сходится в H_σ^l. Из (10.10) тогда следует, что $B_0\zeta_i$ также сходится в H_σ^l: $B_0\zeta_i\to\xi_0$. Положим $\zeta_0=B_0^{-1}\xi_0\in D(A_0)$. Имеем, $B_0(\zeta_i-\zeta_0)\to$ $\to0$. Отсюда из (10.9) $(A_0+\lambda I)(\zeta_i-\zeta_0)\to0$, т.е. $h_0=(A_0+\lambda I)\zeta_0$.

Итак, A_0 — сюрьекция.

Осталось показать

$$\left\|(A_0+\lambda I)^{-1}\right\|\le\frac{K_{50}}{1+|\lambda|}, Re\lambda\ge0. \tag{10.12}$$

Действительно, при $|\lambda|\ge1$ получаем из (10.4) при $u\in D(A_0)$:

$$\begin{aligned}(u,u)_l&=Re\frac{1}{|\lambda|^2}(\lambda u,\lambda u)_l\le\\ Re\frac{1}{|\lambda|^2}(\lambda u,\lambda u)_l&+Re\frac{1}{|\lambda|^2}(A_0u,\lambda B_0u)_{l-1}+\\+Re\frac{1}{|\lambda|^2}(\lambda B_0u,A_0u)_{l-1}&+Re\frac{1}{|\lambda|^2}(A_0u,A_0u)_l=\\&=Re\frac{1}{|\lambda|^2}((A_0+\lambda I)u,(A_0+\lambda I)u)_l,\end{aligned}$$

откуда

$$\|u\|_l\le\frac{1}{|\lambda|}\left\|(A_0+\lambda I)u\right\|_l\le\frac{2}{1+|\lambda|}\left\|(A_0+\lambda I)u\right\|_l. \tag{10.13}$$

При $|\lambda|\le1$ получим с помощью (10.10)

$$\begin{aligned}&(u,u)_l\le(B_0u,B_0u)_l\le K_{49}^{-2}(0)Re(A_0u,A_0u)_l\le\\&\le K_{49}^{-2}(0)[Re(A_0u,A_0u)_l+Re(A_0u,\lambda B_0u)_{l-1}+\\&+Re(\lambda B_0u,A_0u)_{l-1}+Re(\lambda u,\lambda u)_l]=\\&=K_{49}^{-2}(0)Re((A_0+\lambda I)u,(A_0+\lambda I)u)_l.\end{aligned}$$

То есть

$$\|u\|_l \le K_{49}^{-1}(0)\left\|(A_0+\lambda I)u\right\|_l \le \le \frac{2}{1+|\lambda|}K_{49}^{-1}(0)\left\|(A_0+\lambda I)u\right\|_l \quad (10.14)$$

(10.13), (10.14) влекут (10.12).

Предложение 10.4. *Если*

$$\left\|B_0^{\alpha_0(l)}v\right\|_l, \left\|B_0^{\alpha_0(l)}w\right\|_l < K_{33},$$

то

$$\left\|\widetilde{F}(v)-\widetilde{F}(w)\right\|_l \le K_{51}\left\|B_0^{\alpha_0(l)}(v-w)\right\|_l. \quad (10.15)$$

Доказательство. При $l=1$, пользуясь (4.8), (9.5) и (9.1), получаем:

$$\left\|\widetilde{F}(v)-\widetilde{F}(w)\right\|_1 \le \|v-w\|_1 + \sum_{i=1}^n \left\|v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - w_i\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_1 \le$$

$$\le \|v-w\|_1 + \sum_{i=1}^n\sum_{|\alpha|=1}\left\|(D^\alpha v_i)\frac{\partial v}{\partial x_i} - (D^\alpha w_i)\frac{\partial w}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + v_i D^\alpha\frac{\partial v}{\partial x_i} - w_i D^\alpha\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{L_2} \le \|v-w\|_1 +$$

$$+\sum_{i=1}^n\sum_{|\alpha|=1}(\left\|D^\alpha(v_i-w_i)\right\|_{L_6}\left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{L_3} +$$

$$+\left\|D^\alpha v_i\right\|_{L_6}\left\|\frac{\partial(v-w)}{\partial x_i}\right\|_{L_3} + \left\|v_i-w_i\right\|_{L_\infty}\left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_1 +$$

$$+\left\|v_i\right\|_{L_\infty}\left\|D^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}(v-w)\right\|_{L_2}) \le K_{52}\|v-w\|_2,$$

что влечет (10.15).

Аналогично доказывается (10.15) при $l=2$.

Доказательство лемм 6.1 и 6.2.

Положим в лемме 7.1 $E=H_\sigma^1, v_0=a, f_1=f$, $f_2=\widetilde{F}, \mathcal{A}(v)=A(v), \mathcal{B}=B_0, \alpha=\frac{7}{8}, \mathcal{A}_0=A_0, \beta=1$. Тогда из предложений 10.1—10.4 при $l=1$ и леммы 7.1 следует утверждение леммы 6.1.

Пусть теперь $a\in H_\sigma^4, f\in C([0,T],H_\sigma^2)\bigcap L^1([0,T],H_\sigma^4), \|a\|_3<K_3$, где K_3 достаточно мало. Обозначим через $[0,t_0]$ интервал, на котором существует единственное решение u задачи (NV) по лемме 6.1 в классе (6.3). В силу замечания в конце пункта 3

$$\left\|B_0^{1+\delta_2}u(t)\right\|_1 < K_{53}, t\in[0,t_0], \quad (10.16)$$

то есть

$$\left\|B_0^{\frac{1}{2}+\delta_2}u(t)\right\|_2 < K_{53}, t\in[0,t_0] \quad (10.17)$$

при некотором $\delta_2>0$. Полагая $E=H_\sigma^2, \alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}+\delta_2$ из предложений 10.1—10.4 при $l=2$ и (10.17) видно, что выполнены условия леммы 8.2 на отрезке $[0,t_0]$. Отсюда следует существование более гладкого решения на всем $[0,t_0]$. Тогда из единственности решения (лемма 11.1) следует утверждение леммы 6.2.

11. Лемма о единственности

Единственность решения в леммах 6.1 и 6.2 следует из следующего факта:

Лемма 11.1. *Найдется такая константа K_{54}, что если решение u_1 задачи (NV) существует в классе (6.2) и*

$$\left\|u_1(t)\right\|_3 < K_{54}, t\in[0,T], \quad (11.1)$$

то оно единственно в классе (6.2).

Доказательство. Отметим следующий факт: найдется такое K_{54}, что при $u,v\in H_\sigma^3$; $\|u\|_3, \|v\|_3 \le K_{54}$

$$\left(A(u)u-A(v)v, B_0(u-v)\right)_1 \ge 0. \quad (11.2)$$

В самом деле, если K_{54} достаточно мало, то из предложения 10.2 при $l=1$ следует

$$(A(u)(u-v),B_0(u-v))_1 \ge \ge K_{44}(B_0(u-v),B_0(u-v))_1. \quad (11.3)$$

Чтобы показать (11.2), осталось показать

$$((A(u)-A(v))v,B_0(u-v))_1 \ge \ge -K_{44}(B_0(u-v),B_0(u-v))_1. \quad (11.4)$$

Но действительно, пользуясь (10.1) и (4.8), имеем

$$\left|((A(u)-A(v))v,B_0(u-v))_1\right| \le \le \left\|(A(u)-A(v))v\right\|_1\left\|B_0(u-v)\right\|_1 \le \le K_{34}\left\|B_0(u-v)\right\|_1^2\left\|B_0 v\right\|_1 \le K_{44}\left\|B_0(u-v)\right\|_1^2 \quad (11.5)$$

при достаточно малом K_{54}. Тогда из (11.5), очевидно, следуют (11.4) и (11.2).

Отметим еще свойства F [9]:

$$\left|(F(u,v),v)_2\right| \le K_{55}\|u\|_3\|v\|_2^2; u,v\in H_\sigma^3, \quad (11.6)$$

$$\left|(F(v,u),v)_2\right| \le K_{55}\|u\|_3\|v\|_2^2; u,v\in H_\sigma^3. \quad (11.7)$$

Предположим теперь, что кроме u_1 есть еще некоторое решение u_2.

Пусть сначала

$$\left\|u_2(t)\right\|_3 \le K_{54}, t\in[0,T]. \quad (11.8)$$

Положим $w = u_1 - u_2$.

Подставим u_1 и u_2 по очереди в (5.6) и возьмем разность двух уравнений.

$$\frac{dw(t)}{dt} = A(u_2(t))u_2(t) - A(u_1(t))u_1(t) + u_1(t) - \\ -u_2(t) + PF(u_1, u_1)(t) - PF(u_2, u_2)(t)$$

или, пользуясь билинейностью F

$$\frac{dw(t)}{dt} = A(u_2)u_2(t) - A(u_1)u_1(t) + w(t) + \\ +PF(w, u_1)(t) + PF(u_2, w)(t). \tag{11.9}$$

Умножим это на $B_0w(t)$ в H^1_σ:

$$\left(\frac{dw}{dt}, B_0w\right)_1(t) = \\ = -(A(u_1)u_1(t) - A(u_2)u_2(t), B_0(u_1 - u_2))_1(t) + \\ +(w, w)_2(t) + (F(w, u_1), w)_2(t) + (F(u_2, w), w)_2(t).$$

Пользуясь (9.7), (11.2), (11.6), (11.7), получим:

$$\left(\frac{dw}{dt}, B_0w\right)_1(t) \le K_{56}\, \|w\|_2^2\, (\|u_1\|_3 + \|u_2\|_3 + 1)(t),$$

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2^2(t) \le K_{57}\, \|w\|_2^2(t). \tag{11.10}$$

Интегрируя и вспоминая, что $w(0) = 0$, получим:

$$\|w\|_2^2(t) \le K_{57}\int_0^t \|w\|_2^2(s)ds. \tag{11.11}$$

По лемме Гронуолла $\|w\|_2^2(t) = 0$, т.е. $u_1 \equiv u_2$.

Предположим теперь, что условие (11.8) не выполнено. Тогда найдется число t_1 такое, что $\|u_2(t_1)\|_3 = K_{54}, \|u_2(t)\|_3 \le K_{54}$ при $t \in [0, t_1]$. По доказанному, на этом отрезке решение единственно: $u_1(t) = u_2(t)$ при $t \in [0, t_1]$. В частности, $\|u_1(t_1)\|_3 = \|u_2(t_1)\|_3 = K_{54}$, что противоречит (11.1). Лемма доказана.

12. Лемма о непрерывной зависимости решений от данных

В этом пункте мы рассмотрим следующую ситуацию. Пусть пары $(a_i, f_i), i \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям леммы 6.1. Пусть далее

$$a_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a_0 \text{ в } H^3_\sigma, \tag{12.1}$$

$$f_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f_0 \text{ в } L^1([0,T], H^3_\sigma) \text{ и в } C([0,T], H^1_\sigma). \tag{12.2}$$

Т.к. интервал существования непрерывно зависит от a_i и f_i, то найдется единый интервал $[0, t_0^\infty]$, на котором существуют решения u_i всех задач (NV) соответственно с данными $(a_i, f_i), i = 0, 1, 2, \ldots$ в классе (6.3).

Пусть $a_i \in H^4_\sigma, f_i \in C^1([0,T], H^4_\sigma)$ при $i \in \mathbb{N}$. По лемме 6.2 тогда

$$u_i \in C^1([0, t_0], H^2_\sigma) \bigcap C([0, t_0], H^4_\sigma)$$

Лемма 12.1. *Найдутся такие константы* K_{58}, K_{59}, *не зависящие от* i, a_i, f_i, t_0^∞, *что если*

$$\|u_i\|_3 \le K_{58}, i \in \mathbb{N}, \tag{12.3}$$

$$\int_0^{t_0^\infty} \|u_i\|_4^2 \le K_{59}, i \in \mathbb{N} \tag{12.4}$$

то

$$u_i \to u_0 \text{ в } C([0, t_0^\infty], H^3_\sigma), \tag{12.5}$$

$$u_i \to u_0 \text{ в } C^1([0, t_0^\infty], H^1_\sigma). \tag{12.6}$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$u_i \to u_0 \text{ в } C([0, t_0^\infty], H^2_\sigma). \tag{12.7}$$

Так же, как в п. 11, подставим u_i и u_0 в (5.6) и возьмем разность двух уравнений. Обозначим $w_i = u_i - u_0$. Здесь и далее t — произвольное число из $[0, t_0^\infty]$.

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = A(u_0(t))u_0(t) - A(u_i(t))u_i(t) + w_i(t) + \\ +PF(w_i(t), u_i(t)) + PF(u_0(t), w_i(t)) + f_i(t) - f_0(t). \tag{12.8}$$

Умножим это на $B_0w_i(t)$ в H^1_σ:

$$\left(\frac{dw_i}{dt}, B_0w_i\right)_1(t) = \\ = -(A(u_i)u_i - A(u_0)u_0, B_0(u_i - u_0))_1(t) + \\ +(w_i, w_i)_2(t) + (F(w_i, u_i), w_i)_2(t) + \\ +(F(u_0, w_i), w_i)_2(t) + (f_i - f_0, w_i)_2(t). \tag{12.9}$$

Пользуясь (9.7), (11.2), (11.6), (11.7)[11] получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_i\|_2^2(t) \le K_{60}\,\|w_i\|_2^2\,(\|u_i\|_3 + \|u_0\|_3 + 1)(t) + \\ +\|f_i - f_0\|_2\,\|w_i\|_2(t). \tag{12.10}$$

[11] Мы можем считать K_{58} настолько малым, что все эти оценки имеют место.

Интегрируем (12.10) от 0 до t, пользуемся (12.3):

$$\frac{1}{2}\|w_i\|_2^2(t) \le \frac{1}{2}\|a_i - a_0\|_2^2(t) + K_{61}\int_0^t \|w_i\|_2^2(s)ds + +K_{62}\int_0^t \|f_i - f_0\|_2(s)ds,$$

откуда по лемме Гроноулла следует

$$\max_{t\in[0,t_0^\infty]}\|w_i\|_2^2(t) \underset{i\to\infty}{\to} 0. \qquad (12.11)$$

Итак, чтобы показать (12.5), осталось просто показать фундаментальность последовательности u_i в $C([0,t_0^\infty], H_\sigma^3)$.

Положим $w_{ij} = u_i - u_j$. Подставим $u_i(t), u_j(t)$ в (5.6), возьмем разность двух уравнений. Умножим полученное скалярно на $B_0 w_{ij}(t)$ в H_σ^2:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dw_{ij}}{dt}, B_0 w_{ij}\right)_2(t) = \\ &= -(A(u_i)u_i - A(u_j)u_j, B_0(u_i - u_j))_2(t) + \\ &+(w_{ij}, w_{ij})_3(t) + (F(w_{ij}, u_i), w_{ij})_3(t) + \\ &+(F(u_j, w_{ij}), w_{ij})_3(t) + (f_i - f_j, w_{ij})_3(t).\end{aligned} \qquad (12.12)$$

Теперь докажем вспомогательное предложение.

Лемма 12.2. *Имеют место оценки:*

$$|(F(u,v),v)_3| \le K_{63}\,\|u\|_3\,\|v\|_3^2\,; u,v \in H_\sigma^4, \qquad (12.13)$$

$$|(F(v,u),v)_3| \le K_{63}\,\|u\|_4\,\|v\|_3^2\,; u,v \in H_\sigma^4. \qquad (12.14)$$

а при достаточно малом K_{64} *и*

$$\|v\|_3\,, \|u\|_3 < K_{64} \qquad (12.15)$$

выполнено

$$\begin{aligned}&(A(u)u - A(v)v, B_0(u-v))_2 \ge \\ &\ge K_{65}\,\|u-v\|_4^2 - K_{34}\,\|v\|_4\,\|u-v\|_3\,\|u-v\|_4\,; \\ &u, v \in H_\sigma^4.\end{aligned} \qquad (12.16)$$

Доказательство. Оценки (12.13), (12.14) следуют из результатов [9]. Покажем (12.16).

Понятно, что

$$(A(0)(u-v), B_0(u-v))_2 \ge K_{67}\,\|u-v\|_4^2. \qquad (12.17)$$

Положим $K_{65} = \frac{K_{67}}{2}$.

Осталось показать:

$$\begin{aligned}&|(A(u)u - A(v)v - A(0)(u-v), B_0(u-v))_2| \le \\ &\le \frac{K_{67}}{2}\,\|u-v\|_4^2 + K_{34}\,\|v\|_4\,\|u-v\|_3\,\|u-v\|_4\,.\end{aligned} \qquad (12.18)$$

Имеем:

$$\begin{aligned}&(A(u)u - A(v)v - A(0)(u-v), B_0(u-v))_2 = \\ &= ((A(u) - A(0))(u-v), B_0(u-v))_2 + \\ &((A(u) - A(v))v, B_0(u-v))_2.\end{aligned} \qquad (12.19)$$

Можно без ограничения общности считать K_{64} настолько малым, что можно пользоваться оценкой (10.1) при $l = 2$. Из нее следует

$$\begin{aligned}&|(A(u) - A(0))(u-v), B_0(u-v))_2| \le \\ &\le K_{34}\,\|u\|_3\,\|u-v\|_4^2 \le \frac{K_{67}}{2}\,\|u-v\|_4^2\end{aligned} \qquad (12.20)$$

при достаточно малом K_{64}.

Аналогично из (10.1) следует:

$$\begin{aligned}&|((A(u) - A(v))v, B_0(u-v))_2| \le \\ &\le K_{34}\,\|u-v\|_3\,\|v\|_4\,\|u-v\|_4\,.\end{aligned} \qquad (12.21)$$

Итак, (12.18) доказано, откуда следует и (12.16).

Вернемся к доказательству леммы 12.1.

Из (12.12), пользуясь леммой 12.2 и (9.8), получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{ij}\|_3^2(t) + K_{65}\,\|w_{ij}\|_4^2(t) \le \\ &\le K_{34}\,\|u_j\|_4\,\|w_{ij}\|_4\,\|w_{ij}\|_3(t) + \\ &+2K_{63}\,\|w_{ij}\|_3^2\,\|u_i\|_3(t) + \\ &+K_{63}\,\|w_{ij}\|_3^2\,\|u_j\|_4(t) + \\ &+(\|f_i - f_j\|_3 + \|w_{ij}\|_3)\|w_{ij}\|_3(t).\end{aligned} \qquad (12.22)$$

Пусть τ — произвольное число из $[0, t_0^\infty]$. Пусть t_1 таково, что $\max_{t\in[0,\tau]}\|w_{ij}\|_3(t) = \|w_{ij}\|(t_1)$. Интегрируем (12.22) от 0 до t_1:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\|w_{kl}\|_3(t_1) + K_{65}\int_0^{t_1}\|w_{ij}\|_4^2(s)ds \le \\ &\le \tfrac{1}{2}\|a_i - a_j\|_3 + K_{68}\int_0^{t_1}\|w_{ij}\|_4\,\|w_{ij}\|_3\,(\|u_i\|_4 + \|u_j\|_4)(s)ds + \\ &+\int_0^{t_1}(\|f_i - f_j\|_3 + \|w_{ij}\|_3)\|w_{ij}\|_3(s)ds.\end{aligned}$$

Применяем неравенство Гёльдера:

$$\frac{1}{2}\left\|w_{ij}\right\|_3^2(t_1)+K_{65}\int_0^{t_1}\left\|w_{ij}\right\|_4^2(s)ds\le\frac{1}{2}\left\|a_i-a_j\right\|_3^2+$$
$$+K_{68}\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1)\sqrt{\int_0^{t_1}\left\|w_{ij}\right\|_4^2(s)ds}\sqrt{\int_0^{t_1}(\left\|u_i\right\|_4+\left\|u_j\right\|_4)^2(s)ds}+$$
$$+\int_0^{t_1}(\left\|f_i-f_j\right\|_3+\left\|w_{ij}\right\|_3)\left\|w_{ij}\right\|_3(s)ds, \tag{12.23}$$

и с учетом (12.4)

$$\frac{1}{2}\left\|w_{ij}\right\|_3^2(t_1)+K_{65}\int_0^{t_1}\left\|w_{ij}\right\|_4^2(s)ds-$$
$$-K_{68}\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1)\sqrt{\int_0^{t_1}\left\|w_{ij}\right\|_4^2(s)ds}\sqrt{4K_{59}}\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left\|a_i-a_j\right\|_3^2+\int_0^{t_1}(\left\|f_i-f_j\right\|_3+\left\|w_{ij}\right\|_3)(s)ds\cdot\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1). \tag{12.24}$$

Возьмем K_{59} столь малым, что

$$K_{68}\sqrt{4K_{59}}<\sqrt{K_{65}}\,. \tag{12.25}$$

Тогда из очевидных арифметических соображений:

$$\frac{1}{4}\left\|w_{ij}\right\|_3^2(t_1)+K_{65}\int_0^{t_1}\left\|w_{ij}\right\|_4^2(s)ds-$$
$$-K_{68}\sqrt{4K_{59}}\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1)\sqrt{\int_0^{t_1}\left\|w_{ij}\right\|_4^2(s)ds}\ge 0. \tag{12.26}$$

Из (12.26) и (12.24) получаем:

$$\frac{1}{4}\left\|w_{ij}\right\|_3^2(t_1)\le\frac{1}{2}\left\|a_i-a_j\right\|_3^2+$$
$$+\int_0^{t_1}(\left\|f_i-f_j\right\|_3+\left\|w_{ij}\right\|_3)(s)ds\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1). \tag{12.27}$$

Поделив на $\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1)$, получим (заметив, что $\frac{\left\|a_i-a_j\right\|_3}{\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1)}\le 1$)

$$\frac{1}{4}\left\|w_{ij}\right\|_3(\tau)\le\frac{1}{4}\left\|w_{ij}\right\|_3(t_1)\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left\|a_i-a_j\right\|_3+\int_0^{\tau}(\left\|f_i-f_j\right\|_3+\left\|w_{ij}\right\|_3)(s)ds \tag{12.28}$$

и лемма Гроноулла дает

$$\left\|w_{ij}\right\|_3(\tau)\underset{\max(i,j)\to\infty}{\to}0, \tag{12.29}$$

равномерно по τ, что и доказывает фундаментальность u_i.

Итак, (12.5) доказано.

(12.6) следует из следующего факта.

Лемма 12.3. *Рассмотрим задачу:*

$$\begin{cases}\frac{dv}{dt}+\mathcal{A}(v)v=f_1^i(t)+f_2(v) & (12.30)\\ v(0)=v_0^i, & (12.31)\end{cases}$$

где i — целый неотрицательный параметр. Пусть при каждом i для этой задачи выполнены условия леммы 7.1, причем все константы и оператор $\mathcal{B}$ не зависят от i. Пусть для соответствующих решений v^i известно, что все они существуют на одном отрезке $[0,t_0]$ и

$$\mathcal{B}v^i\underset{i\to\infty}{\to}\mathcal{B}v^0 \text{ в } C([0,t_0],E). \tag{12.32}$$

Пусть

$$f_1^i\to f_1^0 \text{ в } C([0,t_0],E). \tag{12.33}$$

Тогда

$$v^i\to v^0 \text{ в } C^1([0,t_0],E). \tag{12.34}$$

Доказательство. Из оценки (7.6) следует, что

$$f_2(v^i)(t)\underset{i\to\infty}{\to}f_2(v^0)(t) \tag{12.35}$$

равномерно по t.

Далее,

$$\left\|\mathcal{A}(v^i)v^i-\mathcal{A}(v^0)v^0\right\|(t)\le$$
$$\le\left\|(\mathcal{A}(v^i)-\mathcal{A}(v^0))v^i\right\|(t)+\left\|\mathcal{A}(v^0)(v^i-v^0)\right\|(t)\le$$
$$\le\left\|(\mathcal{A}(v^i)-\mathcal{A}(v^0))\mathcal{B}^{-1}\right\|\left\|\mathcal{B}v^i(t)\right\|+$$
$$+\left\|\mathcal{A}(v^0)\mathcal{B}^{-1}\right\|\left\|\mathcal{B}(v^i-v^0)\right\|(t).$$

Оба слагаемых стремятся к нулю равномерно по t. Это следует из (7.4), (7.5). Итак,

$$(\mathcal{A}(v^i)v^i)(t)\to(\mathcal{A}(v^0)v^0)(t) \tag{12.36}$$

равномерно по t.

Из (12.30), (12.33), (12.35), (12.36) следует утверждение леммы 12.3.

13. Априорная оценка

В этом пункте будет сделан заключительный шаг в доказательстве теоремы 6.1.

Лемма 13.1. *В условиях леммы 6.1 найдется такая константа K_{69}, не зависящая от a,f,t_0, что если*

$$\|a\|_3+2\int_0^{t_0}\|f\|_3(s)ds<K_{69}, \tag{13.1}$$

то

$$\|u\|_{C([0,t_0],H^3_\sigma)} \le \|a\|_3 + 2\int_0^{t_0} \|f\|_3(s)ds. \qquad (13.2)$$

Доказательство. Пусть сначала a, f достаточно гладки (точнее, $a \in H^4_\sigma, f \in C^1([0,T],H^4_\sigma)$).

Очевидно,

$$\|u\|_3(0) \le \|a\|_3 + 2\int_0^{t_0} \|f\|_3(s)ds. \qquad (13.3)$$

Покажем

$$\|u\|_3(t) \le \|a\|_3 + 2\int_0^{t_0} \|f\|_3(s)ds,\ t\in[0,t_0]. \quad (13.4)$$

Предположим противное. Тогда [9] найдутся $t_1 \le t_0$, $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\|u\|_3(t_1) = \|a\|_3 + 2\int_0^{t_1} \|f\|_3(s)ds + \varepsilon < K_{69}, \quad (13.5)$$

$$\|u\|_3(t) < \|a\|_3 + 2\int_0^{t_1} \|f\|_3(s)ds + \varepsilon < K_{69} \quad (13.6)$$

при $t < t_1$. Но по лемме 6.2

$$u \in C^1([0,t_0],H^2_\sigma)\bigcap C([0,t_0],H^4_\sigma). \qquad (13.7)$$

Умножаем (5.6) скалярно на $B_0u(t)$ в H^2_σ:

$$\left(\frac{du}{dt}, B_0u\right)_2(t) = \\ = -(A(u)u, B_0u)_2(t) + (\widetilde{F}u, u)_3(t) + (f(t), u(t))_3. \qquad (13.8)$$

Отметим, что из (12.16) следует:

$$(A(u)u, B_0u)_2(t) \ge K_{65}\|u\|^2_4(t). \qquad (13.9)$$

Имеем из (13.8), используя (12.13),(4.8) и (9.8):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_3(t) \le -K_{65}\|u\|^2_4(t) + \\ +K_{70}\|u\|^3_3(t) + \|f\|_3(t)\|u\|_3(t); \qquad (13.10)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_3(t) \le K_{70}\|u\|^2_3(t)\left(\|u\|_3(t) - \frac{K_{65}}{K_{70}}\right) + \\ +\|f\|_3(t)\|u\|_3(t). \qquad (13.11)$$

Интегрируем (13.11) от 0 до t_1:

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_3(t_1) \le \frac{1}{2}\|a\|^2_3 + \\ +\int_0^{t_1} K_{70}\|u\|^2_3(s)\left(\|u\|_3(s) - \frac{K_{65}}{K_{70}}\right)ds + \\ +\int_0^{t_1}\|f\|_3(s)ds\cdot\|u\|_3(t_1). \qquad (13.12)$$

Без ограничения общности $\frac{K_{65}}{2K_{70}} > K_{69}$. Поэтому из (13.6) следует, что первый интеграл неположителен. Но очевидно, $\frac{\|a\|_3}{\|u\|_3(t_1)} \le 1$. Поделив (13.12) на $\|u\|_3(t_1)$, получим:

$$\frac{1}{2}\|u\|_3(t_1) \le \frac{1}{2}\|a\|_3 + \int_0^{t_1}\|f\|_3(s)ds, \qquad (13.13)$$

что противоречит (13.5).

Итак, (13.2) доказано для гладких a, f.

Проинтегрируем от 0 до t_0 неравенство (13.10) и воспользуемся (4.8):

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_3(t_0) + \frac{K_{65}}{2}\int_0^{t_0}\|u\|^2_4(s)ds \le \frac{1}{2}\|a\|^2_3 + \\ +\int_0^{t_0} K_{70}\|u\|^3_3(s)ds + \int_0^{t_0}\|f\|_3(s)\|u\|_3(s)ds$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_3(t_0) + K_{65}\int_0^{t_0}\|u\|^2_4(s)ds \le \frac{1}{2}\|a\|^2_3 + \\ +\int_0^{t_0} K_{70}\|u\|^3_3(s)ds - \frac{K_{65}}{2}\|u\|^2_3(s)ds + \\ +\int_0^{t_0}\|f\|_3(s)\|u\|_3(s)ds. \qquad (13.14)$$

Пользуясь тем, что $\|u\|_3(s) < K_{69} < \frac{K_{65}}{2K_{70}}$ при $s \in [0,t_0]$ получаем

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_3(t_0) + \frac{K_{65}}{2}\int_0^{t_0}\|u\|^2_4(s)ds \le \\ \le \frac{1}{2}\|a\|^2_3 + K_{69}\int_0^{t_0}\|f\|_3(s)ds \le \frac{K_{69}+K^2_{69}}{2}.$$

Итак,

$$\int_0^{t_0}\|u\|^2_4(s)ds \le \frac{K_{69}+K^2_{69}}{K_{65}}. \qquad (13.15)$$

Пусть теперь a, f такие, как в лемме 6.1. Тогда их можно приблизить функциями a_i, f_i:

$$a_i \underset{i\to\infty}{\to} a \text{ в } H^3_\sigma, f_i \underset{i\to\infty}{\to} f \text{ в } L^1([0,T],H^3_\sigma)\bigcap C([0,T],H^1_\sigma), \\ a_i \in H^4_\sigma, f_i \in C^1([0,T],H^4_\sigma),$$

$$\|a_i\|_3 + \|f_i\|_{C([0,T],H^1_\sigma)} + \|f_i\|_{L^1([0,T],H^3_\sigma)} \le \\ \le \|a\|_3 + \|f\|_{C([0,T],H^1_\sigma)} + \|f\|_{L^1([0,T],H^3_\sigma)}. \qquad (13.16)$$

В силу (13.16) решения u_i задач (NV) с данными (a_i, f_i) существуют на отрезке $[0,t_0]$ (см. п. 8). Т.к. a, f удовлетворяют (13.1), то без ограничения общности a_i, f_i также удовлетворяют (13.1). Поэтому по доказанному u_i удовлетворяют (13.4), (13.15). Тогда при достаточно малом K_{69} выполнены условия леммы 12.1, из которой следует

$$u_i \to u \text{ в } C([0,t_0], H^3_\sigma), \tag{13.17}$$

что влечет (13.2).

Лемма 13.2. *В условиях теоремы 6.1 найдется* K_{72} *такое, что если*

$$\|a\|_3 + 2\int_0^T \|f\|_3(s)ds < K_{72} \tag{13.18}$$

и на некотором отрезке $[0,t_1]$ *существует решение* u *задачи (NV), то*

$$\|u\|_3(s) \le \|a\|_3 + 2\int_0^s \|f\|_3(s)ds, s \in [0,t_1]. \tag{13.19}$$

Доказательство. Пусть S — множество таких $s \in [0,t_1]$, для которых выполнено (13.19). Ясно, что S замкнуто.

Пусть $[0,t_2]$ — максимальный отрезок, содержащийся в S, т.е. для любого $t_3 > t_2 : [0,t_3] \not\subseteq S$.

Предположим, что $t_2 < t_1$. Рассмотрим задачу (NV) при $t \ge t_2$:

$$\frac{dv}{dt} + A(v)v = \widetilde{F}(v) + f(t), t \ge t_2 \tag{13.20}$$

$$v(t_2) = u(t_2) \tag{13.21}$$

Возьмем $K_{72} < K_{69}$ столь малым, чтобы для этой задачи можно было воспользоваться леммой 6.1. Тогда задача имеет решение $v(t)$ на отрезке $[t_2,t_4]$, где $t_4 > t_2$ — некоторое число. Т.к. $t_2 \in S$, то для всякого $t_5 \in (t_2,t_4]$:

$$\|v(t_2)\|_3 + 2\int_{t_2}^{t_5} \|f\|_3(s)ds \le$$

$$\le \|a\|_3 + 2\int_0^{t_5} \|f\|_3(s)ds < K_{72} < K_{69}.$$

По лемме 13.1 тогда для любого $s \in [t_2,t_5]$:

$$\|v(s)\|_3 \le \|v(t_2)\|_3 + 2\int_{t_2}^{t_5} \|f\|_3(\tau)d\tau < K_{72}. \tag{13.22}$$

Без ограничения общности $K_{72} < K_{54}$. Тогда из (13.22) и леммы 11.1 следует, что $v(s) = u(s)$ для $s \in [t_2,t_5]$. Поэтому из (13.22)

$$\|u(t_5)\|_3 \le \|v(t_2)\|_3 + 2\int_{t_2}^{t_5} \|f\|_3(\tau)d\tau \le$$

$$\le \|a\|_3 + 2\int_0^{t_5} \|f\|_3(\tau)d\tau. \tag{13.23}$$

Т.е. $t_5 \in S$. Т.к. t_5 — любое число из $(t_2,t_4]$, то $[0,t_4] \subset S$, что противоречит определению t_2. Получено противоречие с предположением $t_2 < t_1$. Лемма доказана.

2. Доказательство теорем 6.1 и 6.2

Возьмем $K_1 = \frac{1}{2}\min(K_{72},K_2)$. Тогда теорема 6.1 сразу следует из лемм 6.1, 13.2, 8.2, 11.1.

Теорему 6.2. достаточно показать при $a_i \in H^4_\sigma, f_i \in C^1([0,T], H^4_\sigma)(i \in \mathbb{N})$. Это следует из [9, лемма 4]. Но в этом случае аналогично выводу (13.15) можно убедиться, что для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\int_0^T \|u_i\|_4^2(s)ds \le \frac{K_{72} + K_{72}^2}{K_{65}}. \tag{14.1}$$

Без ограничения общности K_{72} достаточно мало, и утверждение теоремы 6.2 следует из леммы 12.1.

Замечание. Если в теореме 6.1

$$a \in H^4_\sigma, f \in C([0,T], H^2_\sigma) \bigcap L^1([0,T], H^4_\sigma) \tag{14.2}$$

то

$$u \in C^1([0,T], H^2_\sigma) \bigcap C([0,T], H^4_\sigma) \tag{14.3}$$

Это следует из соответствующей гладкости локальных решений, т.е. леммы 6.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве. Труды Моск. Мат. общества, 1961, т. 10, С. 297—350.

2. Функциональный анализ. Под. ред. С. Г. Крейна. М., 1972. — 544 с.

3. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966. — 499 с.

4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977. — 456 с.

5. *Kato T.* Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^3. J. Funct. Anal., 1972, V. 9, 296—305.

6. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967. — 624 с.

7. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М., 1982. — 376 с.

8. *Астарита Дж., Марручи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М., 1978. — 309 с.

9. *Воротников Д. А.* О задаче Навье-Стокса в подобластях R^n. Вестник ВГУ, серия физика, математика, 2001, № 1. — С. 65—74.

10. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости. М., 1964. — 216 с.

11. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. — 288 с.

12. *Олдройд Дж. Г.* Неньютоновское течение жидкостей и твердых тел. — В кн. Реология. Теория и приложения. М., 1962, С. 757—793.

13. *Chen Z. M., Xin Z.* Homogeneity Criterion for the Navier—Stokes Equations in the Whole Spaces. J. math. fluid mech., 2001, V. 3, 152—182.

14. *Рейнер М.* Реология. М., 1965. 224 с.

15. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. М., 1981. — 408 с.

16. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М., 1980. — 496 с.

17. *Amann H.* On the strong solvability of the Navier—Stokes equations. J. Math. Fluid. Mech., 2000, V. 2, 16—98.

18. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., 1975. —592 с.