

УДК 539.215+624.131

ВДАВЛИВАНИЕ ТОНКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО ИЗ СВЯЗНОГО СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

© 2002 г. Н. Д. Вервейко, А. Л. Фролов

Воронежский государственный университет

Рассмотрим тонкое тело вращения в цилиндрической системе координат r, θ, z . Вершину тела поместим в начало координат, ось z направлена по оси вдавливаемого тела (рис. 1). В дальнейшем ограничимся рассмотрением полуплоскости $r \geq 0$.

Напряженное состояние среды определяется из двух уравнений равновесия и условия пластичности [1, 2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{(rz)}}{\partial z} + \frac{f}{\sqrt{2}} (I_{1\sigma})_{,z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{(rz)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{f}{\sqrt{2}} (I_{1\sigma})_{,r} + \frac{\sigma_{(rz)}}{r} - \frac{f}{r\sqrt{2}} I_{1\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_{(rz)}^2 - \beta I_{1\sigma}^2 - 2\alpha Y I_{1\sigma} - Y^2 = 0, \quad (2)$$

где $\beta = 1/3 + \alpha^2 - f^2$, α — коэффициент внутреннего трения, Y — сцепление, f — коэффициент трения качения. Круглыми скобками показана симметричная часть тензора напряжений.

Для определения скоростей перемещений воспользуемся уравнениями, следующими из ассоциированного закона пластического течения [4]:

$$U_{r,r} = \frac{1}{D_1 r} U_r,$$

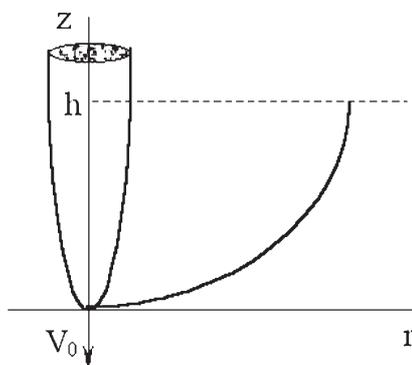


Рис. 1. Схематическое изображение вдавливаемого тела

$$U_{z,z} = \frac{1}{D_2 r} U_r, \quad (3)$$

$$U_{r,z} + U_{z,r} = \frac{1}{D_3 r} U_r,$$

где $D_1 = \frac{\sigma_\theta - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y}{\sigma_r - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y}$, $D_2 = \frac{\sigma_\theta - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y}{\sigma_z - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y}$, $D_3 = \frac{\sigma_\theta - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y}{4\sigma_{(rz)}}$.

Уравнение границы вдавливаемого тела представим в виде:

$$r = \delta \psi(z), \quad (4)$$

где δ — малый безразмерный параметр.

Решение будем искать в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta \sigma'_{ij}, U_i = U_i^0 + \delta U'_i.$$

За исходное невозмущенное состояние, удовлетворяющее уравнениям (1, 2) в нулевом приближении примем состояние, отвечающее вдавлыванию тела нулевой толщины:

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = \Sigma_0, \sigma_z^0 = -2\Sigma_0, \\ \sigma_{(rz)}^0 = 0, U_r^0 = 0, U_z^0 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} Y$.

В первом приближении уравнения (1, 2) для поля напряжения с учетом (5) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma'_{r,r} + \sigma'_{(rz),z} + \frac{f}{\sqrt{2}} I'_{1\sigma,z} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} &= 0, \\ \sigma'_{(rz),r} + \sigma'_{z,z} - \frac{f}{\sqrt{2}} I'_{1\sigma,r} + \frac{\sigma'_{(rz)}}{r} - \frac{f}{r\sqrt{2}} I'_{1\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$(1 - \alpha\sqrt{6})(\sigma'_r + \sigma'_\theta) - (2 + \alpha\sqrt{6})\sigma'_z = 0. \quad (7)$$

Уравнения для поля скоростей U_r, U_z в первом приближении с учетом (3, 5) примут вид:

$$U'_{r,r} = \frac{U'_r}{r}, \quad (8)$$

$$U'_{z,z} = \frac{\alpha\sqrt{6} + 2}{\alpha\sqrt{6} - 1} \frac{U'_r}{r}, \quad (9)$$

$$U'_{r,z} + U'_{z,r} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (8) является уравнением вдоль характеристики $z = const$, (9) вдоль характеристики $r = const$. Интегрируя уравнения (8), (9) получим выражения для радиальной и осевой компоненты скорости:

$$U'_r = C'(z)r, \tag{11}$$

$$U'_z = \frac{\alpha\sqrt{6} + 2}{\alpha\sqrt{6} - 1} \int C'(z)dz + D'(r), \tag{12}$$

где $C'(z)$ и $D'(r)$ — неизвестные функции.

Рассмотрим граничные условия на вдавливваемом гладком теле, на границе которого выполняются условия: 1) непротекания материала через границу Γ твердого тела, т.е. совпадения нормальной к границе скорости частицы среды с нормальной скоростью V_n движения границы Γ ; 2) отсутствие касательных напряжений на границе твердого тела.

$$U_r \cos \hat{n}r + U_z \cos \hat{n}z = V_n,$$

$$\sigma_{nr} |_{\Gamma} = \sigma_r n_r \tau_r + \sigma_z n_z \tau_z + \sigma_{rz} n_r \tau_z + \sigma_{zr} n_z \tau_r. \tag{13}$$

Нормальная компонента скорости имеет вид:

$$V_n = V_0 \cos \hat{n}z, \tag{14}$$

где V_0 — скорость вдавливания тела.

Обозначим через p угол между нормалью и осью r . Разложим косинусы углов в ряд по малому параметру δ :

$$\begin{aligned} \cos \hat{n}r &= \cos p = 1 + \dots; \\ \cos \hat{n}z &= \sin p = 0 + \delta \psi_{,z}(z) + \dots \end{aligned} \tag{15}$$

Первое выражение (13), с учетом (14), (15) и (5) дают граничные условия для поля скоростей в нулевом и первом приближениях:

$$U_r^0 = 0; U'_r = V_0 \psi_{,z}(z). \tag{16}$$

Граничные условия в первом приближении позволяют определить неизвестные функции из уравнений (11), (12). Функция $C'(z)$ с учетом третьего уравнения (16) имеет вид:

$$C'(z) = V_0 \frac{\psi_{,z}(z)}{\psi(z)}.$$

Выражение (11) для радиальной компоненты скорости преобразуется к виду:

$$U'_r = V_0 \frac{\psi_{,z}(z)}{\psi(z)} r. \tag{17}$$

Для определения неизвестной функции $D'(r)$ воспользуемся уравнением дилатансии в первом приближении (10). После подстановки U_r (17) и U_z (12) получим уравнение для $D'(r)$:

$$D'(r) = -V_0 \left[\frac{\psi_{,z}(z)}{\psi(z)} \right]_{,z} \frac{r^2}{2}. \tag{18}$$

С учетом функций $C'(z)$ и $D'(r)$ выражение для осевой компоненты скорости примет вид:

$$U'_z = \frac{\alpha\sqrt{6} + 2}{\alpha\sqrt{6} - 1} V_0 \ln [\psi(z)] - V_0 \left[\frac{\psi_{,z}(z)}{\psi(z)} \right]_{,z} \frac{r^2}{2}. \tag{19}$$

Значение поля скоростей U_r и U_z позволяет построить уравнение для линий тока течения, которое в общем случае является нелинейным:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} = \frac{U'_z}{U'_r} &= \frac{\alpha\sqrt{6} + 2}{\alpha\sqrt{6} - 1} \ln [\psi(z)] \frac{\psi(z)}{\psi_{,z}(z)} \frac{1}{r} - \\ &- \left[\frac{\psi_{,z}(z)}{\psi(z)} \right]_{,z} \frac{\psi(z)}{\psi_{,z}(z)} \frac{r}{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнение линий тока интегрируется для конической поверхности $\psi(z) = z$. В этом случае:

$$U'_r = V_0 \frac{r}{z}; U'_z = \frac{\alpha\sqrt{6} + 2}{\alpha\sqrt{6} - 1} V_0 \ln [z] + V_0 \frac{r^2}{2z^2}.$$

С учетом последнего уравнение (20) для линий тока примет вид:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{U'_z}{U'_r} = \frac{\alpha\sqrt{6} + 2}{\alpha\sqrt{6} - 1} \ln [z] \frac{z}{r} + \frac{r}{2z}. \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (21) получим уравнение для линий тока при внедрении конического тела для малой величины $\ln 2$:

$$z = \sqrt{\frac{r^2}{2} + cr}, \tag{22}$$

где c — константа интегрирования.

Линии тока при вдавливании конической поверхности представлены на рис. 2.

Найдем силу сопротивления вдавливанию гладкого тела, на границе которого касательные усилия отсутствуют. Сила сопротивления вдавливанию определяется:

$$F_{\text{сопр}} = 2\pi \int_0^h r(z) \sigma_{nm} \sin p \, dr. \tag{23}$$

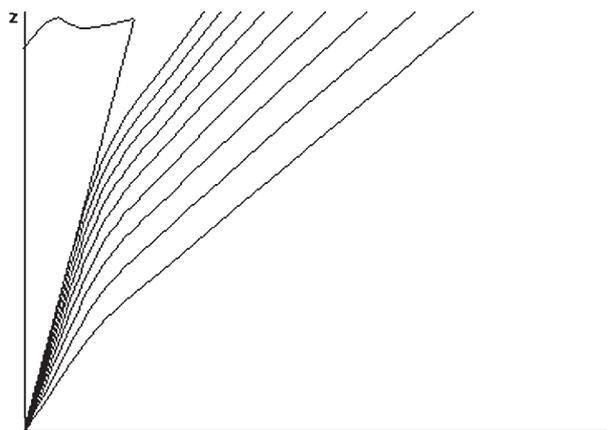


Рис. 2. Схематическое изображение конуса и линий тока

Нормальная составляющая напряжения σ_{nn} имеет вид:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_{rr}^0 + \delta \sigma'_{rr} + \dots$$

С учетом (15) и последнего выражения, ограничиваясь членами наименьшего поряд-

ка малости, можно показать что сила сопротивления примет вид:

$$F_{сопр} = \delta^2 \pi \Sigma_0 \psi^2(h), \quad (24)$$

и является величиной второго порядка малости.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука. — 1998. — 528 с.
2. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. — М.: Наука — 1990. — 272 с.
3. Валюхов С. Г., Вервейко Н. Д., Смотров О. А. Микрополярная модель связных сыпучих материалов. — Воронеж: Воронеж. ун-т. — 1999. — 87 с.
4. Вервейко Н. Д., Фролов А. Л. Осесимметричное напряженно-деформированное состояние микрополярных связных сыпучих материалов // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. — Мн.: УП «Технопринт», 2001. — С. 94—98.