УДК 537.86: 519.23

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ*

© 2002 г. А. П. Трифонов, А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

В различных областях физики и техники возникает задача измерения (оценки) параметров информационных сигналов, наблюдаемых на фоне случайных помех. В частности, задача оценки параметров сигналов является весьма актуальной в радиофизике, радиоастрономии, гидроакустике, сейсмологии и геологии, а также в различных радиотехнических приложениях — в радиосвязи, радиоуправлении, телеметрии, в радиолокации и навигации, в технической диагностике, при управлении производственными процессами и др. Одним из наиболее распространенных методов синтеза алгоритмов оценки параметров сигналов на фоне помех является метод максимального правдоподобия (МП) [1—4]. Использование метода МП позволят получить простые и достаточно эффективные алгоритмы оценки параметров информационных сигналов, требующие минимального количества априорной информации. Однако, окончательный вывод о целесообразности использования оценок максимального правдоподобия в различных физических приложениях можно сделать лишь на основе анализа характеристик оценок.

Возможность практического применения известных методов расчета характеристик совместных оценок параметров физических сигналов существенно зависит от аналитических свойств решающей статистики исследуемого алгоритма оценки. В частности, при анализе точности оценок максимального правдоподобия (ОМП) существенным является свойство регулярности решающей статистики алгоритма оценки — логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП) как функции оцениваемых параметров сигнала [4—7 и др.]. Гауссовский логарифм ФОП является регулярным по заданному параметру, если существуют, по крайней мере, непрерывные вторые производные первых двух моментов логарифма ФОП, взятые по этому параметру [4—7]. Параметры сигнала, для которых указанные условия регулярности выполняются, называют регулярными [6, 7]. Используя метод малого параметра [3, 4, 6], можно найти асимптотически точные (с ростом отношения сигнал/шум (ОСШ)) выражения для характеристик *совместных ОМП регулярных параметров* сигнала, наблюдаемого на фоне шума.

Однако, существует широкий класс сигналов, называемых разрывными [5—7] или неаналитическими [8]. Условия регулярности логарифма ФОП по некоторым параметрам разрывных сигналов не выполняются. Такие параметры, следуя [7, 9], будем называть разрывными. Простейшими примерами разрывных параметров являются время прихода и длительность прямоугольных видео- и радиоимпульсов, частота узкополосного радиосигнала с равномерным в ограниченной полосе частот спектром, время задержки некоторых дискретных сложных сигналов и др. [7, 8, 10, 11]. Метод малого параметра [3, 4, 6] нельзя использовать для нахождения характеристик ОМП разрывных параметров, так как указанный метод предполагает регулярность логарифма ФОП. В противном случае получаем, например, нулевое значение дисперсии оценки разрывного параметра и другие некорректные результаты.

Для вычисления асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик *ОМП разрывного параметра* сигнала в [6 (п. 5.3), 7 (гл. 6)] предложен метод локально-марковской аппроксимации (ЛМА). Идея метода ЛМА сводится к аппроксимации логариф-

* Работа выполнена при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проект VZ-010-0)

ма ФОП или его приращений марковским или локально-марковским случайным процессом. Последующее использование математического аппарата теории марковских процессов позволяет получить асимптотически точные выражения для характеристик ОМП разрывного параметра сигнала. Однако, метод ЛМА непосредственно применим только для расчета характеристик *раздельных ОМП* разрывных параметров сигнала. Здесь под раздельной оценкой понимается оценка, выполненная при условии, что остальные параметры сигнала априори известны. Метод ЛМА [6, 7] неприменим для расчета характеристик *совместных оценок* нескольких разрывных параметров.

На практике обработка сигналов производится, как правило, в условиях априорной неопределенности, когда кроме информативных параметров сигнала, подлежащих оценке, неизвестны и другие (неинформативные) параметры. Это приводит к необходимости совместного оценивания нескольких неизвестных параметров сигнала, которые могут быть разрывными. В [9] предложена методика вычисления асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик *совместных ОМП одного разрывного и нескольких регулярных параметров*. Однако, общие методы расчета характеристик *совместных ОМП нескольких разрывных параметров* сигнала не известны. Характеристики совместных оценок разрывных параметров получены в настоящее время только для некоторых частных приложений [11, 13 и др.]. Это затрудняет анализ эффективности измерительных систем с использованием разрывных моделей сигналов.

Указанные трудности при расчете характеристик совместных ОМП разрывных параметров сигнала можно преодолеть, если моменты логарифма ФОП, как функции разрывных параметров сигнала, допускают *аддитивно-мультипликативное представление*. В этом случае математическое ожидание, корреляционная функция и другие моменты логарифма ФОП выражаются в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых является произведением функций только одного параметра. Тогда для нахождения асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик совместных ОМП разрывных параметров сигнала можно использовать рассматриваемый далее метод *локально-аддитивной аппроксимации* (ЛАА). Метод ЛАА позволяет свести задачу нахождения характеристик совместных оценок разрывных параметров сигнала к более простой задаче отыскания характеристик раздельных оценок соответствующих параметров. При этом для вычисления характеристик раздельных ОМП разрывных параметров сигнала можно, с учетом необходимых обобщений, использовать метод ЛМА.

Отметим, что аддитивно-мультипликативное представление моментов логарифма ФОП возможно для широкого класса параметров различных физических сигналов. Например, при оценке параметров импульса с гауссовской случайной субструктурой [12], встречающегося в радио и гидролокации, в связи, в радиоастрономии и др., такое представление моментов логарифма ФОП осуществляется как по временным, так и по частотным параметрам импульса. К этим параметрам относятся время прихода, длительность, моменты появления и исчезновения импульса, а также центральная частота и ширина полосы частот спектральной плотности его случайной субструктуры.

Далее на основе метода ЛАА получены асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения для характеристик совместных ОМП разрывных параметров сигнала при наличии аддитивно-мультипликативного представления моментов логарифма ФОП по оцениваемым параметрам. Отметим, что нахождение характеристик ОМП сводится к отысканию вероятностного распределения положения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП, как случайного поля, а также к вычислению статистических моментов этого распределения [1—6].

I. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ И ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОМЕНТОВ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

Постановка задачи оценки. Пусть на входе устройства обработки наблюдается смесь $x(t)$ информационного сигнала $s(\mathrm{t},\mathbf{l}_0)$, характеризующегося вектором параметров $\mathbf{l}_0 = \|l_{01}, l_{02}, \dots l_{0p}\|$, и шума $n(t)$. Считаем, что вектор параметров $\mathbf{l}_0$ обрабатываемого сигнала $s(t,\mathbf{l}_0)$ априори неизвестен и принимает значения из заданной p-мерной области определения $\Re$. На основе наблюдаемых данных $x(t)$ и имеющейся априорной информации необходимо измерить (оценить) параметры l_{0i}, $i = 1, 2, \ldots p$ принимаемого сигнала $s(\mathrm{t}, \mathbf{l}_0)$.

Обозначим $L(\mathbf{l}) \equiv L(l_1, l_2, \ldots, l_p)$ — логарифм ФОП как функция оцениваемых параметров $\mathbf{l}_0 = \|l_{01}, l_{02}, \ldots l_{0p}\|$, являющийся функционалом от наблюдаемых данных $x(t)$ [1—4]. Тогда, согласно определению [1—6, 10], совместные ОМП $l_{1m}, l_{2m}, \ldots, l_{pm}$ параметров $l_{01}, l_{02}, \ldots, l_{0p}$ являются координатами $l_1, l_2, \ldots, l_p$ положения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП $L(l_1, l_2, \ldots, l_p)$ в пределах априорной области значений $\Re$. В результате, вектор совместных ОМП $\mathbf{l}_m = \|l_{1m}, l_{2m}, \ldots, l_{pm}\|$ параметров сигнала можно записать в виде

$$\mathbf{l}_m = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re} L(\mathbf{l}). \tag{1}$$

Вероятностные характеристики ОМП (1) однозначно определяются статистическими свойствами решающей статистики алгоритма оценки — логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$. Рассмотрим характеристики решающей статистики алгоритма оценки (1).

Следуя [1—7, 9—12 и др.] будем считать, что логарифм ФОП $L(\mathbf{l})$ является гауссовским случайным полем. Представим функционал $L(\mathbf{l})$ в виде суммы $L(\mathbf{l}) = S(\mathbf{l}) + N(\mathbf{l})$ сигнальной функции (детерминированной составляющей) $S(\mathbf{l}) = \langle L(\mathbf{l})\rangle$ и шумовой функции (флуктуационной составляющей) $N(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l}) - \langle L(\mathbf{l})\rangle$, где $\langle\ \rangle$ означает усреднение по реализациям логарифма ФОП при фиксированных истинных значениях $\mathbf{l}_0 = \|l_{01}, l_{02}, \ldots, l_{0p}\| \in \Re$ оцениваемых параметров сигнала [4, 6, 12]. Тогда для вычисления характеристик совместных ОМП (1), в силу гауссовости логарифма ФОП, достаточно ограничиться анализом его первых двух моментов — сигнальной функции $S(\mathbf{l})$ и кореляционной функции $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \langle N(\mathbf{l}_1) N(\mathbf{l}_2)\rangle$ шумовой функции $N(\mathbf{l})$. Здесь обозначено $\mathbf{l}_j = \|l_{j1}, l_{j2}, \ldots, l_{jp}\|$, $j = 1, 2$.

Отметим, что добавление случайной величины к логарифму ФОП не меняет значение ОМП (1). Следовательно, оценку (1) всегда можно представить в виде $\mathbf{l}_m = \arg\sup_{l\in\Re} \Delta(l)$, где $\Delta(\mathbf{l}) \equiv \Delta(l_1, l_2, \ldots, l_p) = L(\mathbf{l}) - L(\mathbf{l}^*)$ — гауссовский функционал приращений логарифма ФОП, а $\mathbf{l}^* = \|l_1^*, l_2^*, \ldots, l_p^*\|$ — фиксированное значение вектора параметров $\mathbf{l}$. Поэтому при вычислении характеристик ОМП (1), вместо корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ логарифма ФОП, можно рассматривать корреляционную функцию $K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \langle[\Delta(\mathbf{l}_1) - \langle\Delta(\mathbf{l}_1)\rangle][\Delta(\mathbf{l}_2) - \langle\Delta(\mathbf{l}_2)\rangle]\rangle$ его приращений $\Delta(\mathbf{l})$.

Пусть сигнальная функция $S(\mathbf{l})$ имеет единственный максимум в точке $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ истинных значений оцениваемых параметров сигнала, причем $A_S = S(\mathbf{l}_0) > 0$, а реализации шумовой функции $N(\mathbf{l})$ непрерывны с вероятностью 1. На практике эти условия обычно выполняются [3—7, 12 и др.]. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для алгоритма оценки (1) запишется в виде

$$z = S(\mathbf{l}_0) \Big/ \sqrt{\langle N^2(\mathbf{l}_0)\rangle} = A_S / \sigma_N, \tag{2}$$

где $\sigma_N^2 = \langle N^2(\mathbf{l}_0)\rangle$ — дисперсия шумовой функции при $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$. Будем считать, что ОСШ (2) настолько велико, что достигается *высокая апостериорная точность* оценок [4, 6, 7]. При этом ОМП $\mathbf{l}_m$ (1) расположены в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ максимума сигнальной функции, а при $z \to \infty$ оценка $\mathbf{l}_m$ сходится к $\mathbf{l}_0$ в среднеквадратическом [4—6]. Тогда для определения характеристик ОМП (1) достаточно исследовать поведение сигнальной функции $S(\mathbf{l})$ и корреляционной функции $K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ приращений логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, причем с ростом ОСШ z величина этой окрестности уменьшается.

Известно, что аналитические свойства логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ зависят от выполнения условий регулярности этого функционала по каждому из оцениваемых параметров l_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ [3—7]. Поэтому конкретизируем ***локальные*** (в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$) ***представления первых двух моментов логарифма ФОП*** при оценке разрывных параметров сигнала.

Рассмотрим класс разрывных параметров, для которых сечения $S_i(l_i) = S(\mathbf{l})\big|_{l_k = l_{0k}, k=1,2,\ldots p, k\neq i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ сигнальной функции $S(\mathbf{l})$ по каждому из параметров в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ максимума сигнальной функции допускают асимптотические представления

$$S_i(l_i) = A_S \begin{cases} 1 - d_{1i}\,|l_i - l_{0i}| + o(\delta_i), & \text{если } \ l_i < l_{0i}; \\ 1 - d_{2i}\,|l_i - l_{0i}| + o(\delta_i), & \text{если } \ l_i \geq l_{0i}; \end{cases} \tag{3}$$

при $\delta_i = |l_i - l_{0i}| \to 0$, а соответствующие сечения $K_{\Delta i}(l_{1i}, l_{2i}) = K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)\big|_{l_{jk} = l_{0k},\ k=1,2,\ldots,p,\ k\neq i,\ j=1,2}$ корреляционной функции $K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ приращений логарифма ФОП при $\delta^*_{ni} = \max(|l_{1i}-l_{0i}|, |l_{2i}-l_{0i}|, |l^*_i-l_{0i}|) \to 0$ представляются в виде

$$K_{\Delta i}(l_{1i}, l_{2i}) = \begin{cases} \begin{cases} B_{1i}\min(|l_{1i}-l^*_i|, |l_{2i}-l^*_i|) + C_{1i} + o(\delta^*_{ni}), \\ \quad \text{если } l_{1i},\ l_{2i} < l_{0i}; \\ B_{2i}\min(|l_{1i}-l^*_i|, |l_{2i}-l^*_i|) + C_{2i} + o(\delta^*_{ni}), \\ \quad \text{если } l_{1i},\ l_{2i} \ge l_{0i}; \end{cases} \\ \quad \text{при } (l_{1i}-l^*_i)(l_{2i}-l^*_i) \ge 0; \\ 0, \text{ при } (l_{1i}-l^*_i)(l_{2i}-l^*_i) < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $d_{ki} > 0$, $B_{ki} > 0$, $C_{ki} \ge 0$, $k = 1,2$, $i = 1, 2, ..., p$, а $o(\delta)$ — величина большего порядка малости, чем δ. Из (3), (4) видно, что моменты логарифма ФОП недифференцируемы по разрывным параметрам в точке $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, так как производные функций (3), (4) в этой точке имеют разрывы первого рода. Это не позволяет воспользоваться методом малого параметра [3, 4, 6] для вычисления характеристик ОМП разрывных параметров сигнала.

Отметим, что выражению (4) удовлетворяют корреляционные функции $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ логарифма ФОП, сечения $K_i(l_{1i}, l_{2i}) = K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)\big|_{l_{jk}=l_{0k}, k=1,2,..,p, k\ne i, j=1,2}$ которых при $\delta_{ni} = \max(|l_{1i}-l_{0i}|, |l_{2i}-l_{0i}|) \to 0$ допускают асимптотические представления

$$K_i(l_{1i}, l_{2i}) = D_{1i}\min(l_{1i}, l_{2i}) + D_{2i}\min(l_{1i}, l_{2i}, l_{0i}) + f_1(l_{1i}, l_{0i}) + f_2(l_{2i}, l_{0i}) + B_{0i} + o(\delta_{ni}). \tag{5}$$

При этом в (4) $B_{1i} = D_{1i} + D_{2i}$, $B_{2i} = D_{1i}$. Здесь $D_{1i} > 0$, $D_{2i} \ge 0$, $B_{0i} \ge 0$, а функции $f_j(l_{0i}, l_{0i})$ обычно удовлетворяют условию $f_j(l_{ji}, l_{0i}) = 0$, причем $D_{1i} + D_{2i} + f_1(l_{0i}, l_{0i}) + f_2(l_{0i}, l_{0i}) + B_{0i} = \sigma^2_N$. Представление (5) корреляционной функции логарифма ФОП часто встречается при оценке разрывного энергетического параметра сигнала, например, длительности, ширины полосы частот и др. [6, 7, 11—13].

Другим примером корреляционной функции, удовлетворяющей выражению (4), является функция с сечениями, допускающими асимптотическое представление

$$K_i(l_{1i}, l_{2i}) = \sigma^2_N \begin{cases} 1 - \rho_i|l_{1i}-l_{2i}| - g_i\min(|l_{1i}-l_{0i}|, |l_{2i}-l_{0i}|) + o(\delta_{ni}), \\ \quad \text{при } (l_{1i}-l_{0i})(l_{2i}-l_{0i}) \ge 0; \\ 1 - \rho_i|l_{1i}-l_{2i}| + o(\delta_{ni}), \\ \quad \text{при } (l_{1i}-l_{0i})(l_{2i}-l_{0i}) < 0. \end{cases} \tag{6}$$

где $\rho_i > 0$, $g_i \ge 0$. При этом в (4) следует положить $C_{1i} = C_{2i} = 0$, $B_{1i} = B_{2i} = \sigma^2_N(2\rho_i - g_i)$. Представление (6) часто встречается при оценке разрывного неэнергетического параметра сигнала, например, времени прихода или центральной частоты [5—7, 11, 12].

Отметим, что выражения (3), (4) являются достаточно общими и охватывают широкий класс разрывных параметров радиофизических сигналов. Полагая в (3), (4) $A_S = z$, $d_{ki} = d$, $B_{ki} = 2d$, $C_{ki} = 0$, $k = 1, 2$, получаем, как частный случай, асимптотические представления моментов нормированного логарифма ФОП при оценивании разрывных параметров квазидетерминированных сигналов [6, 7, 9, 11]. Нетрудно убедиться, что общие выражения (3), (4) для моментов логарифма ФОП справедливы и при оценке разрывных параметров импульсных сигналов с гауссовской случайной субструктурой [12]. К таким параметрам относятся время прихода, длительность, моменты появления и исчезновения импульса, а также центральная частота и ширина полосы частот спектральной плотности его полосовой случайной субструктуры.

В качестве условия применимости метода ЛАА полагаем, что сигнальная функция $S(\mathbf{l})$ и корреляционная функция $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ допускают ***аддитивно-мультипликативные представления***

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^{u}\sum_{j=1}^{a_k}\prod_{i=t_{jk}+1}^{t_{(j+1)k}} V_{ki}(l_i),$$
$$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\upsilon_k}\prod_{i=\theta_{jk}+1}^{\theta_{(j+1)k}} U_{ki}(l_{1i}, l_{2i}), \tag{7}$$

где $0 = t_{1k} < t_{2k} < ... < t_{(a_k+1)k} = p$, $0 = \theta_{1k} < \theta_{2k} < ... < \theta_{(\alpha_k+1)k} = p$. Здесь производные функций $V_{ki}(l_i)$, $U_{ki}(l_{1i}, l_{2i})$, $i = 1, 2, .., p$ непрерывны слева и справа от точки l_{0i}, но могут иметь разрывы первого рода в этой точке.

В частном случае $a_k = \upsilon_k = 1$ из (7) получаем

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^{u}\prod_{i=1}^{p} V_{ki}(l_i),$$
$$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \sum_{k=1}^{r}\prod_{i=1}^{p} U_{ki}(l_{1i}, l_{2i}). \tag{8}$$

Если $a_k = \upsilon_k = 1$ и $u = r = 1$, то моменты (7) факторизуются по оцениваемым параметрам сигнала и допускают *мультипликативное представление*

$$S(\mathbf{l}) = \prod_{i=1}^{p} V_{1i}(l_i) = \prod_{i=1}^{p} S_i(l_i),$$

$$K(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = \prod_{i=1}^{p} U_{1i}(l_{1i},l_{2i}) = \prod_{i=1}^{p} K_i(l_{1i},l_{2i}),$$

где $S_i(l_i) = V_{1i}(l_i)$ и $K_i(\ l_{1i},l_{2i}) = U_{1i}(l_{1i},l_{2i})$ — сечения сигнальной функции и корреляционной функции шумовой функции логарифма ФОП. Наконец, при $a_k = \upsilon_k = p$ аддитивно-мультипликативное представление (7) моментов логарифма ФОП переходит в *аддитивное представление*

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^{u}\sum_{i=1}^{p} V_{ki}(l_i) = \sum_{i=1}^{p} S_i(l_i) - (p-1)A_S,$$

$$K(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{p} U_{ki}(l_{1i},l_{2i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} K_i(l_{1i},l_{2i}) - (p-1)\sigma_N^2.$$

II. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛЬНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК

Найдем асимптотически точные (с ростом ОСШ (2)) выражения для характеристик совместных ОМП (1) разрывных параметров l_i, $i = 1,2,..,p$ при наличии аддитивно-мультипликативного представления (7) моментов логарифма ФОП. Будем считать, что ОСШ (2) настолько велико, что достигается высокая апостериорная точность оценок [4,6] и для расчета характеристик ОМП (1) достаточно учитывать локальное поведение моментов логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в малой окрестности точки $\mathbf{l}_0$. Разложим функции $V_{ki}(l_i)$ и $U_{ki}(l_{1i},l_{2i})$ в ряд Тейлора слева и справа от точек l_{0i}. Подставляя эти разложения в (7) и учитывая лишь слагаемые, имеющие первый порядок малости по $\delta_i(\delta_{ni})$, получаем

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{p} S_i(l_i) - (p-1)A_S + o(\delta)$$

$$\text{при } \delta = \max_{i=1,2,..,p} \delta_i \to 0, \qquad (9)$$

$$K(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = \sum_{i=1}^{p} K_i(l_{1i},l_{2i}) - (p-1)\sigma_N^2 + o(\delta_n)$$

$$\text{при } \delta_n = \max_{i=1,2,..,p} \delta_{ni} \to 0.$$

Таким образом, моменты логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ допускают локально-аддитивное представление (9) в окрестности точки $\mathbf{l}_0$.

Обозначим $M_i(l_i)$, $i = 1, 2, ..., p$ — статистически независимые совместно гауссовские случайные процессы, математические ожидания $S_{Mi}(l_i)$ и корреляционные функции $K_{Mi}(l_{1i},l_{2i})$ которых в окрестности точек $l_i = l_{0i}$ представляются в виде

$$S_{Mi}(l_i) = S_i(l_i) - (p-1)A_S / p,$$
$$K_{Mi}(l_{1i},l_{2i}) = K_i(l_{1i},l_{2i}) - (p-1)\sigma_N^2 / p. \qquad (10)$$

Здесь функции $S_i(l_i)$ и $K_i(l_{1i},l_{2i})$ удовлетворяют условиям (3), (4). Тогда, согласно (9), случайное поле $L(\mathbf{l})$ сходится по распределению к сумме $M(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{p} M_i(l_i)$ статистически независимых случайных процессов $M_i(l_i)$ при $\delta \to 0$. Как отмечалось выше, характеристики ОМП (1) при больших ОСШ z определяются поведением логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, причем при $z \to \infty$ величина этой окрестности стремится к нулю. Будем считать, что ОСШ z настолько велико, а величины δ_i указанных окрестностей точек $l_i = l_{0i}$ настолько малы, что на интервалах $l_i \in [l_{0i} - \delta_i; l_{0i} + \delta_i]$ справедливы представления (10) моментов случайных процессов $M_i(l_i)$. Тогда совместную плотность вероятности $W(l_{1m}, l_{2m}, ..., l_{pm})$ оценок $l_{1m}, l_{2m}, ..., l_{pm}$ (1) можно аппроксимировать произведением

$$W(l_1, l_2, ..., l_n) = \prod_{i=1}^{p} W_i(l_i) \qquad (11)$$

плотностей вероятности $W_i(l_i)$ раздельных оценок

$$l_{ir} = \arg\sup_{l_i \in [l_{0i}-\delta_i; l_{0i}+\delta_i]} M_i(l_i), i = 1,2,..,p. \qquad (12)$$

Здесь δ_i — величина окрестности точки $l_i = l_{0i}$, причем $\delta_i \to 0$ при $z \to \infty$. Точность представления (11), (12) при фиксированном δ_i возрастает с увеличением ОСШ z.

Таким образом, характеристики совместных ОМП l_{im} (1) разрывных параметров l_{0i} асимптотически (с ростом ОСШ) совпадают с соответствующими характеристиками раздельных оценок l_{ir} (12) этих же параметров.

Для нахождения характеристик раздельных оценок l_{ir}, $i = 1, 2, ..., p$ (12) разрывных параметров сигнала используем метод ЛМА [6, 7]. В [6, 7] методом ЛМА получены асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения для функции распределения раздельной ОМП разрывного параметра квазидетерминированного сигнала, а также для условных смещения и рассеяния оценки. При этом считается, что математическое ожидание и корреляционная функция логарифма ФОП допускают представления (3), (4), где $A_S = z$, $d_{ki} = d$, $B_{ki} = 2d$, $C_{ki} = 0$, $k = 1, 2$. Получим далее асимптотически точные выражения для характеристик оценок l_{ir} (12) в общем случае, когда коффициенты $d_{ki} > 0$, $B_{ki} > 0$, $C_{ki} \geq 0$ в (3), (4) произвольны.

Введем в рассмотрение гауссовские случайные процессы $\Delta_i(l_i) = M_i(l_i) - M_i(l_i^*)$, $l_i^* \in [l_{0i} - \delta_i; l_0 + \delta_i]$ с математическими ожиданиями $S_i(l_i) - S_i(l_i^*)$ и корреляционными функциями $K_{\Delta i}(l_{1i}, l_{2i})$. Тогда функцию распределения оценки l_{ir} (12) можно представить в виде [6, 7]

$$F_i(l_i^*) = P[l_{ir} < l_i^*] = P\left[\sup_{l_i \in [l_{0i} - \delta_i;\, l_i^*)} \Delta_i(l_i) > \sup_{l_i \in [l_i^*;\, l_{0i} + \delta_i]} \Delta_i(l_i)\right],$$

где $P[A]$ — вероятность события А. Из (4) следует, что отрезки реализаций случайных процессов $\Delta_i(l_i)$ на интервалах $[l_{0i} - \delta_i; l_i^*)$ и $[l_i^*;\ l_{0i} + \delta_i]$ некоррелированы и, всилу гауссовости процессов $\Delta_i(l_i)$, статистически независимы. Тогда [6, 7]

$$F_i(l_i^*) = \int_0^\infty P_{2i}(u) dP_{1i}(u) = 1 - \int_0^\infty P_{1i}(u) \ \ dP_{2i}(u), \quad (13)$$

где

$$P_{1i}(u) = P\left[\sup_{l_i \in [l_{0i} - \delta_i;\, l_i^*)} \Delta_i(l_i) < u\right],$$
$$P_{2i}(u) = P\left[\sup_{l_i \in [\, l_i^*;\, l_{0i} + \delta_i]} \Delta_i(l_i) < u\right] \quad (14)$$

— функции распределения абсолютного максимума случайного процесса $\Delta_i(l_i)$ на интервалах $[l_{0i} - \delta_i; l_i^*)$ и $[l_i^*;\ l_{0i} + \delta_i]$ соответственно. В (13) учтено, что $\Delta_i(l_i^*) = 0$, поэтому $P_{1i}(u) = 0$ и $P_{2i}(u) = 0$ при $u < 0$.

Получим выражение для функций $P_{2i}(u)$, $u \geq 0$ (14). Для этого введем в рассмотрение случайные процессы $r_i(l_i) = u - \Delta_i(l_i)$. Используя теорему Дуба [14] в формулировке Кайлатца [15] и учитывая представления (3), (4) моментов логарифма ФОП, можно показать, что случайные процессы $\Delta_i(l_i)$ и $r_i(l_i)$ на интервале $[l_i^*;\ l_{0i} + \delta_i]$ являются гауссовскими марковскими процессами диффузионного типа [14]. Согласно (3), (4), коэффициенты сноса Γ_{1i} и диффузии Γ_{2i} процессов $r_i(l_i)$ при $l_i > l_i^*$ равны

$$\Gamma_{1i}(l_i) = \begin{cases} A_S d_{2i} & \text{при } \ l_i \geq l_{0i}; \\ -A_S d_{1i} & \text{при } \ l_i < l_{0i}; \end{cases},$$
$$\Gamma_{2i}(l_i) = \begin{cases} B_{2i} & \text{при } \ l_i \geq l_{0i}; \\ B_{1i} & \text{при } \ l_i < l_{0i}. \end{cases} \quad (15)$$

Воспользовавшись марковскими свойствами процесса $r_i(l_i)$, вероятность $P_{2i}(u)$ (14) запишем в виде [14]

$$P_{2i}(u) = P\left[\underset{l_i \in [l_i^*;\, l_{0i} + \delta_i]}{r_i(l_i) > 0}\right] = \int_0^\infty W_{ri}(x, l_{0i} + \delta_i) dx, \quad (16)$$

где $W_{ri}(x, l)$ — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [14]

$$\frac{\partial W_{ri}(x,l)}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\Gamma_{1i}(l) W_{ri}(x,l)\right] - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Gamma_{2i}(l) W_{ri}(x,l)\right] = 0 \quad (17)$$

с коэффициентами (15) при начальном $W_{ri}(x, l_i^*) = \delta(x - u)$ и граничных $W_{ri}(0, l) = 0$, $W_{ri}(\infty, l) = 0$ условиях. Здесь $\boldsymbol{\delta}(x)$ — дельта-функция. Решая уравнение (17) аналогично [6, 7, 12] и подставляя решение в формулу (16), при $l_{0i} - \delta_i \leq l_i^* < l_{0i}$ получаем

$$P_{2i}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B_{1i}(l_{0i} - l_i^*)}} \times \\ \times \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(u - A_S d_{1i}(l_{0i} - l_i^*) - \zeta)^2}{2B_{1i}(l_{0i} - l_i^*)}\right] - \exp\left(2\frac{A_S d_{1i}}{B_{1i}} u\right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{(u + A_S d_{1i}(l_{0i} - l_i^*) + \zeta)^2}{2B_{1i}(l_{0i} - l_i^*)}\right]\right\} \left\{ \Phi\left[\frac{A_S d_{2i}\delta_i + \zeta}{\sqrt{B_{2i}\delta_i}}\right] - \\ - \exp\left(-2\frac{A_S d_{2i}}{B_{2i}}\zeta\right) \Phi\left[\frac{A_S d_{2i}\delta_i - \zeta}{\sqrt{B_{2i}\delta_i}}\right]\right\} d\zeta, \quad (18)$$

а при $l_{0i} \leq l_i^* \leq l_{0i} + \delta_i$

$$P_{2i}(u) = \Phi\left[\frac{A_S d_{2i}(l_{0i} + \delta_i - l_i^*) + u}{\sqrt{B_{2i}(l_{0i} + \delta_i - l_i^*)}}\right] - \\ - \exp\left(-2\frac{A_S d_{2i}}{B_{2i}} u\right) \Phi\left[\frac{A_S d_{2i}(l_{0i} + \delta_i - l_i^*) - u}{\sqrt{B_{2i}(l_{0i} + \delta_i - l_i^*)}}\right], \quad (19)$$

где $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-t^2/2\right) dt \Big/ \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

Нетрудно показать, что вероятность $P_{1i}(u)$ (14) также определяется из (18), (19), где коэффициенты d_{ji}, $j=1,2$ следует заменить на $d_{(3-j)i}$, коэффициенты B_{ji}, $j=1,2$ — на $B_{(3-j)i}$, а разность $l_{0i}-l_i^*$ на $l_i^*-l_{0i}$.

Подставляя выражения (18), (19) для вероятностей $P_{1i}(u)$ и $P_{2i}(u)$ в формулу (13), находим условные (при фиксированном l_{0i}) функции распределения $F_i(l_i)$ оценок l_{ir} (12)

$$F_i(l_i) = \begin{cases} \Psi(|l_i - l_{0i}|, z_{1i}, z_{2i}, \chi_i) \\ \text{при } l_{0i} - \delta_i \le l_i < l_{0i}; \\ 1 - \Psi(|l_i - l_{0i}|, z_{2i}, z_{1i}, 1/\chi_i) \\ \text{при } l_{0i} \le l_i \le l_{0i} + \delta_i; \end{cases} \quad i = 1,2,..,p, \tag{20}$$

$$\Psi(l_i, z_{1i}, z_{2i}, \chi_i) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|l_i|}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(u - z_{1i}|l_i| - \zeta)^2}{2|l_i|}\right] - \right.$$
$$\left. - \exp(2z_{1i}u) \exp\left[-\frac{(u + z_{1i}|l_i| + \zeta)^2}{2|l_i|}\right]\right\} \times$$
$$\times \left\{\Phi\left(\frac{z_{2i}\delta_i + \zeta\chi_i}{\sqrt{\delta_i}}\right) - \exp(-2z_{2i}\chi_i\zeta)\,\Phi\left(\frac{z_{2i}\delta_i - \zeta\chi_i}{\sqrt{\delta_i}}\right)\right\} \times$$
$$\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\delta_i - |l_i|)}} \exp\left[-\frac{[z_{1i}(\delta_i - |l_i|) + u]^2}{2(\delta_i - |l_i|)}\right] + \right.$$
$$\left. + 2z_{1i}\exp(-2z_{1i}u)\,\Phi\left(\frac{z_{1i}(\delta_i - |l_i|) - u}{\sqrt{\delta_i - |l_i|}}\right)\right\} du\, d\zeta,$$

$$z_{1i} = A_S d_{1i} \big/ \sqrt{B_{1i}},\ z_{2i} = A_S d_{2i} \big/ \sqrt{B_{2i}},\ \chi_i = \sqrt{B_{1i}/B_{2i}}.$$

Выражение (20) достаточно громоздко и неудобно для практических расчетов. Учтем, что отношения z_{1i} и z_{2i} в (20) являются величинами порядка z. Полагая, что ОСШ z весьма велико, аналогично [6, 7] находим асимптотические выражения для условных (при фиксированном l_{0i}) плотностей вероятности $W_i(l_i)$ оценок (12)

$$W_i(l_i) = \begin{cases} 2z_{1i}^2 W_0[2z_{1i}^2(l_{0i} - l_i), 1/R_i] & \text{при } l_i < l_{0i}; \\ 2z_{2i}^2 W_0[2z_{2i}^2(l_i - l_{0i}), R_i] & \text{при } l_i \ge l_{0i}; \end{cases} \quad i = 1,2,..,p, \tag{21}$$

$$W_0(x,u) = \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right) - 1 + \frac{2+u}{u}\exp\left(|x|\frac{1+u}{u^2}\right) \times$$
$$\times \left\{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\left[\frac{2+u}{u}\right]\right)\right\},$$

где $R_i = B_{1i}d_{2i}/d_{1i}B_{2i} = \chi_i z_{2i}/z_{1i}$. Точность выражения (21) возрастает с увеличением ОСШ z (с увеличением отношений z_{1i} и z_{2i}).

Таким образом, совместная плотность вероятности ОМП $l_{1m}, l_{2m}, ..., l_{pm}$ (1) представляется в виде произведения (11) плотностей вероятности (21) оценок (12). Используя распределения (21), находим условные смещения $b_i = \langle l_{im} - l_{0i} \rangle$, рассеяния $V_i = \langle (l_{im} - l_{0i})^2 \rangle$ оценок l_{im} (1), а также моменты $Y_i = \langle (l_{im} - l_{0i})^3 \rangle$ и $Q_i = \langle (l_{im} - l_{0i})^4 \rangle$ ошибок этих оценок 3-го и 4-го порядков:

$$b_i = \frac{2R_i + 1}{2z_{2i}^2(R_i+1)^2} - \frac{R_i(R_i+2)}{2z_{1i}^2(R_i+1)^2},$$
$$V_i = \frac{5R_i^2 + 6R_i + 2}{2z_{2i}^4(R_i+1)^3} + \frac{R_i(2R_i^2 + 6R_i + 5)}{2z_{1i}^4(R_i+1)^3}, \tag{22}$$

$$Y_i = \frac{3}{4(R_i+1)^4}\left\{\frac{14R_i^3 + 28R_i^2 + 20R_i + 5}{z_{2i}^6} - \right.$$
$$\left. - \frac{R_i(5R_i^3 + 20R_i^2 + 28R_i + 14)}{z_{1i}^6}\right\},$$
$$Q_i = \frac{3}{2(R_i+1)^5}\left\{\frac{42R_i^4 + 120R_i^3 + 135R_i^2 + 70R_i + 14}{z_{2i}^8} + \right.$$
$$\left. + R_i\frac{14R_i^4 + 70R_i^3 + 135R_i^2 + 120R_i + 42}{z_{1i}^8}\right\}.$$

Точность формул (22) возрастает с увеличением ОСШ z (с увеличением z_{1i}, z_{2i}).

Формулы (21), (22) значительно упрощаются, если $d_{1i} = d_{2i} = d_i$, $B_{1i} = B_{2i} = B_i$. Тогда в (21) $z_{1i} = z_{2i} = z_i = A_S d_i \big/ \sqrt{B_i}$, $R_i = 1$ и плотности вероятности $W_i(l_i)$ оценок (12) принимают вид

$$W_i(l_i) = 2z_i^2 W_{01}(2z_i^2|l_i - l_{0i}|), i = 1,2,..,p \tag{23}$$

$$W_{01}(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right) - 1 +$$
$$+ 3\exp(2|x|)\left\{1 - \Phi\left(3\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right)\right\},$$

а моменты (22) ошибок оценок запишутся как

$$b_i = 0, V_i = 13/8z_i^4, Y_i = 0, Q_i = 1143/32z_i^8. \quad (24)$$

При оценке разрывных параметров квазидетерминированного сигнала $z_i = z$ [6, 7] и выражения (24) принимают вид $b_i = 0$, $V_i = 13/8z^4$, $Y_i = 0$, $Q_i = 1143/32z^8$.

Известно, что вероятностные распределения совместных ОМП регулярных параметров сигнала являются асимптотически гауссовскими при $z \to \infty$ [3,4 и др.]. Из (21) следует, что асимптотические распределения ОМП разрывных параметров сигнала существенно отличаются от гауссовских. В частности, коэффициенты асимметрии γ_{1i} и эксцесса γ_{2i} распределения (21) равны

$$\gamma_{1i} = \frac{\varepsilon_{3i}}{\sqrt{\varepsilon_{2i}^3}} = \frac{Y_i - 3V_i b_i + 2b_i^3}{\sqrt{(V_i - b_i^2)^3}},$$

$$\gamma_{2i} = \frac{\varepsilon_{4i}}{\varepsilon_{2i}^2} - 3 = \frac{Q_i - 4Y_i b_i + 6V_i b_i^2 - 3b_i^4}{(V_i - b_i^2)^2} - 3$$

и в общем случае отличны от нуля. Здесь $\varepsilon_{ki} = <(l_{im} - <l_{im}>)^k>$ — центральный момент распределения (21) k-го порядка. Например, при $R_i = 1$, $z_{1i} = z_{2i} = z$ получаем $\gamma_{2i} = 1779/169 \approx 10.527$.

Отметим, что моменты случайных процессов $\Delta_i(l_i) = M_i(l_i) - M_i(l_i^*)$ в окрестности точек $l_i = l_{0i}$ совпадают с соответствующими моментами случайных процессов $\Delta_{mi}(l_i) = = \Delta(\mathbf{l})\big|_{l_k = l_{0k}, k=1,2,...,p, k \neq i}$, которые являются сечениями функционала приращений $\Delta(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l}) - L(\mathbf{l}^*)$ логарифма ФОП плоскостями, проходящими через точку $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$. Поэтому статистические характеристики оценок l_{ir} (12) и совместных ОМП l_{im} (1) асимптотически (с ростом ОСШ z) совпадают с характеристиками раздельных ОМП параметров l_{0i} сигнала.

III. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСА С ГАУССОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ СУБСТРУКТУРОЙ

В качестве примера применения метода ЛАА для нахождения характеристик оценок параметров сигнала рассмотрим совместные ОМП времени прихода λ_0 и частоты ν_0 узкополосного импульса с гауссовской случайной субструктурой [12]

$$s(t) = \xi(t) I\left[(t - \lambda_0)/\tau\right] \quad (25)$$

наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Здесь $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$, $I(x) = 0$ при $|x| \geq 1/2$ — прямоугольная модулирующая функция, τ — длительность импульса, $\xi(t)$ — узкополосный стационарный центрированный гауссовский случайный процесс, описывающий случайную субструктуру сигнала и имеющий спектральную плотность

$$G(\omega) = (\gamma/2)\{I\left[(\nu_0 - \omega)/\Omega\right] + \\ + I\left[(\nu_0 + \omega)/\Omega\right]\}. \quad (26)$$

В (26) обозначено: γ — интенсивность, ν_0 и Ω — центральная частота и ширина полосы частот спектральной плотности. Считается, что время корреляции узкополосного случайного процесса $\xi(t)$ значительно меньше длительности τ импульса (25), т.е. выполняются условия

$$\mu = \tau\Omega/2\pi \gg 1, \nu_0 \gg \Omega. \quad (27)$$

Примерами импульса (25) могут быть отраженные локационные сигналы [16], радиоимпульсы, искаженные модулирующей помехой [17], сигналы в спектроскопии и астрономии [18, 19] и др. Случайные сигналы (25) могут быть использованы в качестве шумовой импульсной несущей в системах передачи информации [20].

Для получения ОМП λ_m и ν_m времени прихода и частоты случайного импульса (25) по наблюдаемой реализации $x(t) = s(t) + n(t)$ смеси сигнала и шума, необходимо формировать логарифм ФОП $L(\lambda, \nu)$ как функцию оцениваемых параметров сигнала. При выполнении (27) находим [12]

$$L(\lambda, \nu) = \frac{qM(\lambda, \nu)}{N_0(1+q)} - \mu \ln(1+q),$$
$$M(\lambda, \nu) = \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} y^2(t, \nu) dt, \quad (28)$$

где $q = \gamma/N_0$, $y(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t - t', \nu) dt'$ — отклик фильтра с импульсной переходной функцией $h(t, \nu)$ на принимаемую реализацию $x(t)$, причем передаточная функция $H(\omega, \nu)$ этого фильтра удовлетворяет условию $|H(\omega, \nu)|^2 = = I\left[(\nu - \omega)/\Omega\right] + I\left[(\nu + \omega)/\Omega\right]$.

Пусть время прихода и частота импульса (25) принимают значения из априорных интервалов $\lambda_0 \in [\lambda_{\min};\lambda_{\max}]$ и $\nu_0 \in [\nu_{\min};\nu_{\max}]$. Тогда совместные ОМП λ_m и ν_m времени прихода и частоты импульса являются координатами λ и ν положения абсолютного максимума функционала $M(\lambda,\nu)$ (28) на интервалах $\lambda \in [\lambda_{\min};\lambda_{\max}]$ и $\nu \in [\nu_{\min};\nu_{\max}]$ соответственно, т.е. $(\nu_m,\lambda_m) = \arg\sup_{\lambda,\nu} M(\lambda,\nu)$.

Воспользовавшись методом ЛАА, найдем характеристики совместных ОМП λ_m и ν_m. Обозначим $\eta=\lambda/\tau$, $\eta_j=\lambda_j/\tau$, $\kappa=\nu/\Omega$, $\kappa_j=\nu_j/\Omega$, $j=0,1,2$. Функционал $M(\lambda,\nu)$ (28) представим в виде суммы $M(\lambda,\nu) = S(\eta,\kappa) + N(\eta,\kappa) + B$, где $S(\eta,\kappa) =< M(\eta\tau,\kappa\Omega) > -B$ — сигнальная, $N(\eta,\kappa) = M(\eta\tau,\kappa\Omega) - S(\eta,\kappa) - B$ — шумовая функции, а $B = \mu N_0$ — несущественное постоянное слагаемое. При выполнении (27) аналогично [12] получаем

$$S(\eta,\kappa) = S_0 C(\eta-\eta_0)C(\kappa-\kappa_0), \tag{29}$$

$$S_0 = \mu q N_0, C(\eta) = \max(0;1-|\eta|).$$

Шумовая функция $N(\eta,\kappa)$ является асимптотически (при $\mu \to \infty$) гауссовским центрированным случайным полем, поэтому при выполнении (27) ограничимся рассмотрением корреляционной функции шумовой функции

$$K(\eta_1,\eta_2,\kappa_1,\kappa_2) = < N(\eta_1,\kappa_1)N(\eta_2,\kappa_2) > =$$
$$= D_1 R(\eta_1,\eta_2,\eta_0)R(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_0) + D_0 C(\eta_1-\eta_2)C(\kappa_1-\kappa_2), \tag{30}$$

$$D_0 = \mu N_0^2, D_1 = \mu q(2+q)N_0^2,$$
$$R_1(\eta_1,\eta_2,\eta_0) =$$
$$= \max[0;1-\max(|\eta_1-\eta_2|,|\eta_2-\eta_0|,|\eta_1-\eta_0|)].$$

Из (29) следует, что сигнальная функция $S(\eta,\kappa)$ достигает абсолютного максимума при $\eta=\eta_0$, $\kappa=\kappa_0$, т.е. в точке истинных значений времени прихода и частоты принимаемого импульса. Тогда выходное ОСШ (2) запишется в виде

$$z^2 = \frac{S_0^2}{D_1+D_0} = \frac{\mu q^2}{(1+q)^2}. \tag{31}$$

Из (29), (30) следует, что производные моментов решающей статистики $M(\lambda,\nu)$ (28) по нормированным времени η и частоте κ имеют разрывы первого рода в точке $\eta=\eta_0$, $\kappa=\kappa_0$. Следовательно, время прихода λ и частота ν импульса (25) являются разрывными параметрами. Сечения $S_1(\eta) = S(\eta,\kappa_0)$, $S_2(\kappa) = S(\eta_0,\kappa)$ и $K_1(\eta_1,\eta_2) = K(\eta_1,\eta_2,\kappa_0,\kappa_0)$, $K_2(\kappa_1,\kappa_2) = K(\eta_0,\eta_0,\kappa_1,\kappa_2)$ сигнальной функции (29) и корреляционной функции (30) по времени прихода и частоте допускают представления (3), (6), где

$$A_S = S_0, d_{1i} = d_{2i} = 1,$$
$$\sigma_N^2 = D_1 + D_0 = \mu N_0^2(1+q)^2, \rho_i = 1,$$
$$g_i = g = D_1/\sigma_N^2 = q(2+q)/(1+q)^2. \tag{32}$$

Отметим также, что моменты (29), (30) решающей статистики (28) допускают аддитивно-мультипликативные представления (8), где $u=1$, $r=2$, $p=2$, $V_{11}(l_1) = S_0C(\eta-\eta_0)$, $V_{12}(l_2) = C(\kappa-\kappa_0)$, $U_{11}(l_{11},l_{21}) = D_1R(\eta_1,\eta_2,\eta_0)$, $U_{21}(l_{11},l_{21}) = D_0C(\eta_1-\eta_2)$, $U_{12}(l_{12},l_{22}) = R(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_0)$, $U_{22}(l_{12},l_{22}) = C(\kappa_1-\kappa_2)$.

Таким образом, выполнены все условия применимости метода ЛАА и асимптотические характеристики ОМП λ_m и ν_m можно получить из (23), (24). Полагая в (24), $z_i^2 = z^2/(2-g)$, находим условные смещения и рассеяния совместных ОМП времени прихода и частоты импульса (25) с гауссовской случайной субструктурой

$$b_1 =< \lambda_m - \lambda_0 > = 0,$$
$$V_1 =< (\lambda_m-\lambda_0)^2 > = 13\tau^2(2-g)^2/8z^4, \tag{33}$$

$$b_2 =< \nu_m - \nu_0 > = 0,$$
$$V_2 =< (\nu_m-\nu_0)^2 > = 13\Omega^2(2-g)^2/8z^4,$$

где ОСШ z и параметр g определяются из (31), (32). Точность формул (33) возрастает с увеличением ОСШ (31).

Другими примерами применения метода ЛАА для вычисления характеристик совместных ОМП разрывных частотных и временных параметров импульса со случайной субструктурой являются результаты работ [21, 22]. В [21] рассмотрена задача совместной ОМП времени прихода, длительности, центральной частоты и ширины полосы частот узкополосного импульса (25), а в [22] — задача совместной оценки времени прихода, длительности и ширины полосы частот импульса (25) с широкополосной гауссовской случайной субструктурой [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов В. И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.

2. *Сосулин Ю. Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992. 304 с.

3. *Куликов Е. И.* Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 272 с.

4. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.

5. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.

6. *Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.

7. Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К. К., Драган Я. Л., Казаков В. А. и др.; Под ред. Васильева К. К., Омельченко В. А. Ульяновск: УлГТУ, 1995. 256 с.

8. *Фомин А. Ф.* Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений. М.: Сов. радио, 1975. 352 с.

9. *Трифонов А. П., Бутейко В. К.* Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. № 2. С. 319—327.

10. *Фальккович С. Е., Хомяков Э. Н.* Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981. 246 с.

11. *Трифонов А. П., Бутейко В. К.* Совместная оценка двух параметров разрывного сигнала на фоне белого шума // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 11. С. 2323—2329.

12. *Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. 246 с.

13. *Трифонов А. П., Бутейко В. К., Захаров А. В.* Совместная оценка задержки и длительности сигнала при наличии модулирующей помехи // Изв.вузов. Радиоэлектроника. 1990. № 4. С. 89—91.

14. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.

15. *Kailath T.* Some Integral Equations with Nonrational Kernels // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1966. V. IT-12. № 4. P. 442—447.

16. Вопросы статистической теории радиолокации / П. А.Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; Под ред. Г. П. Тартаковского. М.: Сов. радио, 1963. Т. 1. 426 с.

17. *Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.

18. *Ван-Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3-х томах. Т. 3 / Пер с англ. под ред. В. Т. Горяинова. М.: Сов. радио, 1977. 644 с.

19. *Ахманов С. А., Дъяков Ю. Э., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.

20. *Харкевич А. А.* Передача сигналов, модулированных шумом. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1973. С. 524—529.

21. *Трифонов А. П., Захаров А. В.* Характеристики совместной оценки параметров области частотно-временной локализации разрывного случайного импульса // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 11. С. 1316—1322.

22. *Трифонов А. П., Захаров А. В., Проняев Е. В.* Совместные оценки частотных и временных параметров импульса со случайной субструктурой // Радиотехника. 1998. № 12. С. 34—38.