*УДК 517.925.52*

# МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

**© 2002 г. А. И. Перов, И. Д. Коструб**

*Воронежский государственный университет*

В 1958 г. М. А. Красносельский и А. И. Перов в сообщении [1] предложили новый метод доказательства существования периодических, почти-периодических и ограниченных решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получивший впоследствии название *метода направляющих функций* (М. А. Красносельский). Основная идея метода была высказана А. И. Перовым еще раньше — в 1956 г.

Подробное изложение метода в периодическом и ограниченном случаях было дано в одной из глав кандидатской диссертации А. И. Перова [2]. Так как метод направляющих функций тесно связан с такими топологическими понятиями как вращение векторного поля (степень отображения), гомотопные векторные поля и индекс особой точки (индекс Пуанкаре), то совершенно естественно, что он нашел отражение в монографии «Векторные поля на плоскости» [3] (переведенной, кстати сказать, на немецкий и английский языки), в которой были указаны первые и наиболее элементарные его положения, касающиеся периодических и ограниченных решений нелинейных систем двух дифференциальных уравнений.

В то время как обоснование метода для периодических и ограниченных решений не вызвало никаких особых затруднений, почти-периодический случай (справедливость которого была угадана почти на интуитивном уровне) оказал серьезное сопротивление. В статье [4], опубликованной в 1963 г. М. А. Красносельским было написано следующее: «Более общие условия невырожденности системы дают теоремы, приведенные в [1] (к сожалению, доказательства утверждений из [1], относящихся к почти-периодическим решениям, оказались неполными; утверждения об ограниченных и о периодических решениях верны без изменений)».

Дальнейшее развитие и обобщение метод направляющих функций получил в монографии [5] и ряде журнальных статей, однако только для периодических и для ограниченных решений. Посвященная специально нелинейным почти-периодическим колебаниям и вышедшая в 1970 г. книга [6] ни слова не говорит о методе направляющих функций, а всецело опирается только на метод интегральных уравнений. Отметим также, что метод направляющих функций нашел приложения и при изучении периодических и ограниченных решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [7].

В настоящей статье показывается, что если нелинейная почти-периодическая система удовлетворяет условиям какой-либо из теорем метода направляющих функций, гарантирующих существование ограниченного решения, то она имеет рекуррентное решение. Этот результат нами выводится из теоремы В. М. Миллионщикова, опубликованной еще в 1968 г. [8]. Мы указываем также признаки, когда полученное рекуррентное решение является почти-периодическим. Интересно отметить, что пишет по поводу свойства рекуррентности Л. Чезари: «Свойства рекуррентности решений динамических систем наводят на мысль о том, не будут ли эти решения периодическими или почти-периодическими. Вообще говоря, это предположение неверно» [9, с. 172]; в этой книге, к слову сказать, есть ссылка на статью [1].

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n;\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad (1)$$

где $n$ — натуральное число, точка означает дифференцирование по времени $t \in \mathbb{R}$, вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеет компоненты $x_1, \ldots, x_n$, а вектор $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ имеет компоненты $f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots,$

$f_n(t, x_1, ..., x_n)$. В дальнейшем мы считаем $\mathbb{R}^n$ евклидовым со стандартным образом определенными скалярным произведением и нормой. Предполагается, что функции $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ непрерывны по совокупности переменных и обеспечивают единственность решения любой начальной задачи для системы (1) (например, они непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным $x_1, ..., x_n$), хотя ценой некоторого усложнения доказательств последнее ограничение может быть снято.

Наше основное требование состоит в том, что

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \quad \begin{array}{l} \textit{является почти - периодической} \\ \textit{по } t \textit{ равномерно относительно} \\ \mathbf{x} \in K, \textit{ где } K - \textit{любое ограничен -} \\ \textit{ное множество из } \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{2}$$

Это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ можно указать такое число $l = l(\varepsilon, K) > 0$, что в каждом промежутке числовой прямой длины $l$ найдется число $\tau$, для которого $\|\mathbf{f}(t+\tau,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{x})\| \le \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x} \in K$. Систему (1) при выполнении условия (2) будем коротко называть *почти-периодической.* Почти-периодическим системам и почти-периодическим решениям таких систем посвящена обширная литература; мы ограничимся ссылками на книги [10], [11], [12], [13], а также на уже упоминавшуюся нами книгу [6].

В теории почти-периодических систем важную роль (еще с Фавара!) играют так называемые *присоединенные системы* [12, с. 430]. Каждая присоединенная система имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(t,\mathbf{x}), \tag{3}$$

причем существует последовательность вещественных чисел $h_i$, для которой

$$\mathbf{f}(t+h_i,\mathbf{x}) \Rightarrow \hat{\mathbf{f}}(t,\mathbf{x}) \quad \begin{array}{l} \textit{равномерно по } t \in \mathbb{R} \textit{ и} \\ \mathbf{x} \in K, \textit{ где } K - \textit{любое} \\ \textit{ограниченное множе -} \\ \textit{ство из } \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{4}$$

Множество всех получающихся таким образом функций $\hat{\mathbf{f}}(t,\mathbf{x})$, удовлетворяющих также, очевидно, условию (2), обозначается $H(\mathbf{f})$. Множество $H(\mathbf{f})$ в соответствующем локально выпуклом линейном топологическом функциональном пространстве ограничено, замкнуто, компактно и связно. Более того, оно представляет собой пространство некоторой компактной коммутативной группы, которая в периодическом случае изоморфна окружности, и в случае конечного целого частотного базиса изоморфна некоторому тору, являющемуся прямым произведением конечного числа окружностей.

Для удобства изложения материала мы иногда будем предполагать, что

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \quad \begin{array}{l} \textit{является ограниченной по } t \textit{ равно -} \\ \textit{мерно относительно } \mathbf{x} \in K, \textit{ где} \\ K - \textit{любое ограниченное множест -} \\ \textit{во из } \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{5}$$

Последнее означает, что для любого ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ можно указать такую постоянную $c = c(K) > 0$, что $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\| \le c$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x} \in K$. Систему (1) при выполнении условия (5) будем коротко называть *ограниченной.* Ясно, что любая почти-периодическая система является одновременно и ограниченной; обратное, конечно, места не имеет.

Известны различные признаки, гарантирующие существование ограниченных решений нелинейных ограниченных систем (напомним, что решение $\mathbf{x}(t)$ называется *ограниченным,* если $\|\mathbf{x}(t)\| \le c$ при всех $t \in \mathbb{R}$ для некоторой постоянной $c$). Мы имеем в виду, прежде всего, признаки, основанные на методе направляющих функций [1], [2], [3], [5], [7]. Если какому-нибудь из этих признаков удовлетворяет почти-периодическая система (а она, как мы только что говорили, автоматически является ограниченной), то она имеет ограниченное решение (одно или несколько). Каждое из ограниченных решений может как быть почти-периодическим, так и не быть таковым. *Наша центральная задача заключается в том, чтобы доказать, что среди ограниченных решений изучаемой почти-периодической системы есть хотя бы одно почти-периодическое решение, причем группа частот этого почти-периодического решения содержится в группе частот нелинейной почти-периодической системы.* К сожалению, пока еще рано говорить о полном решении этой проблемы. Мы покажем только, как мы уже говорили об этом выше, что среди ограниченных решений нелинейной почти-периодической системы всегда есть рекуррентное решение.

Мы скажем, что последовательность непрерывных ограниченных функций $\mathbf{x}_k(t)$ *локально сходится* на $\mathbb{R}$ к некоторой ограниченной функции $\mathbf{x}_0(t)$ и напишем

$$\mathbf{x}_k(t) \to \mathbf{x}_0(t) \text{ (локально)}, \tag{6}$$

если сходимость, причем равномерная, имеет место на любом конечном промежутке числовой оси $\mathbb{R}$ [13, с. 67 ]. Локальную сходимость иначе называют сходимостью в *компактно открытой топологии*.

С помощью теоремы Арцела−Асколи и канторова диагонального процесса нетрудно показать, что из любого равномерно ограниченного и равностепенно непрерывного на всей оси $\mathbb{R}$ семейства функций всегда можно выделить локально сходящуюся подпоследовательность. Предельная функция также будет ограниченной и равномерно непрерывной на всей оси функций.

Пусть векторная функция $\mathbf{x}(t)$ является ограниченной и равномерно непрерывной на всей оси, причем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le c \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)\| \le \varepsilon \quad \text{при} \quad t, s \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad |\, t - s \,| \le \delta(\varepsilon). \tag{8}$$

Из сказанного выше вытекает, что из любой последовательности сдвигов функции $\mathbf{x}(t)$ всегда можно извлечь подпоследовательность $\mathbf{x}(t + h_i)$, которая локально сходится на всей оси $\mathbb{R}$ к некоторой функции $\hat{\mathbf{x}}(t)$,

$$\mathbf{x}(t + h_i) \to \hat{\mathbf{x}}(t) \text{ (локально)}. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что предельная функция $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является ограниченной и равномерно непрерывной с теми же самыми характеристиками, что и в (7) и (8). Функцию $\hat{\mathbf{x}}(t)$, за неимением лучшего термина и по аналогии с предыдущим, назовем *присоединенной* к функции $\mathbf{x}(t)$, а совокупность всех присоединенных функций обозначим $H(\mathbf{x})$.

Нетрудно привести примеры, когда множество $H(\mathbf{x})$ содержит любое наперед заданное конечное или даже счетное число функций, каждая из которых удовлетворяет требованиям (7) и (8).

Рассмотрим локально выпуклое топологическое пространство $C$, элементами которого являются произвольные непрерывные функции $\mathbf{x}(t)$, с топологией равномерной сходимости на каждом конечном промежутке. Ясно, что $H(\mathbf{x})$ в $C$ есть ограниченное замкнутое компактное и связное множество (фактически $H(\mathbf{x})$ есть замыкание в топологии пространства $C$ семейства сдвигов $\mathbf{x}(t + h)$ при $h \in \mathbb{R}$).

Для нас важно следующее: если $\mathbf{x}(t)$ — это ограниченное решение нелинейной почти-периодической системы (1) (т.е. выполнено условие (2)), то $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является ограниченным решением некоторой присоединенной системы (3), для которой выполнено условие (4). Действительно, если $\mathbf{x}(t)$ — ограниченное решение нелинейной почти-периодической системы (1), то для некоторой постоянной $c$ имеет место оценка (7). Так как $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ является ограниченной, то $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \le c_1$ при $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x} \in K$ для некоторой постоянной $c_1$, где $K$ — это замыкание множества значений решения $\mathbf{x}(t)$, откуда в силу $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ находим $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \le c_1$ при $t \in \mathbb{R}$, что в силу формулы Лагранжа приводит к оценке

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)\| \le c_1 \, |t - s|,$$

влекущий выполнение свойства (8) при $\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon / c_1$.

Пусть имеет место (9). В силу почти-периодичности правой части системы (1) без ограничения общности можно считать, что имеет место сходимость (4). Так как

$$\dot{\mathbf{x}}(t + h_i) = \mathbf{f}(t + h_i, \mathbf{x}(t + h_i)) \to$$

$$\to \hat{\mathbf{f}}(t, \hat{\mathbf{x}}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \text{ (локально)},$$

то $\hat{\mathbf{x}}(t)$ есть решение присоединенной системы (3).

Ограниченная и равномерно непрерывная векторная функция $\mathbf{x}(t)$ называется *рекуррентной*, если из (9) вытекает, что имеет место «возвращаемость»

$$\hat{\mathbf{x}}(t + k_i) \to \mathbf{x}(t) \text{ (локально)} \tag{10}$$

для некоторой последовательности $k_i$. Если всегда можно положить $k_i = -h_i$ в (10), то мы приходим к *почти автоморфным функциям Бохнера*, которые, как оказалось, совпадают с ограниченными *почти-периодическими функциями Левитана* [13, с. 67]. Отметим следующий факт: если $\mathbf{x}(t)$ — рекуррентная функция, а $\hat{\mathbf{x}}(t)$ — присоединенная к ней функция (см. (9)), то $\hat{\mathbf{x}}(t)$ тоже рекуррентная функция. Для нас первостепенной важности является то обстоятельство, что для любой ограниченной и равномерно непрерывной на всей оси векторной функции $\mathbf{x}(t)$ всегда можно указать такую последовательность $h_i$, что построенная по формуле (9) векторная функция $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является рекуррентной [14, с. 954—955].

Вернемся к нелинейной почти-периодической системе. Из сказанного выше вытекает, что если система (1) имеет ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$, то она имеет также некоторое рекуррентное решение $\mathbf{x}_0(t)$. Действительно, пусть имеет место (9), где $\hat{\mathbf{x}}(t)$ — рекуррентное решение присоединенной системы (3), т.е. мы считаем, что имеет место (4). Так как имеет место «возвращаемость» $\mathbf{f}(t+k_i,\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$, где $k_i = -h_i$, то из последовательности $\hat{\mathbf{x}}(t+k_i)$ рекуррентных функций всегда можно выбрать подпоследовательность (мы считаем, что она совпадает с исходной последовательностью), для которой $\hat{\mathbf{x}}(t+k_i) \to \mathbf{x}_0(t))$ (локально). Нетрудно видеть, что $\mathbf{x}_0(t)$ — как локальный предел последовательности рекуррентных функций — есть рекуррентная функция, и, кроме того, она есть решение нелинейной системы (1). По этой причине все приводимые ниже теоремы являются признаками существования рекуррентных решений.

Хорошо известно, что *если исходная почти-периодическая система (1) имеет единственное ограниченное решение и этим же свойством обладает любая присоединенная система (3), то это ограниченное решение является почти-периодической функцией.* Это утверждение полностью соответствует одной из теорем Фавара для линейных систем [10, с. 178—180], а его доказательство можно найти, например, в [13, с. 111]. Приведем в связи с этим одно из условий единственности ограниченного решения, опубликованного в чуть менее общей форме впервые в [2]. Пусть выполнено условие

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{y}),(\mathbf{x}-\mathbf{y})) + (\mathbf{U}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{f}(t,\mathbf{y})) \ge$$
$$\ge \varepsilon(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 \text{ при } t\in\mathbb{R};\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n, \qquad (11)$$

где $\mathbf{U}(t)$ — непрерывная дифференцируемая почти-периодическая матричная функция, причем $\mathbf{U}^*(t)=\mathbf{U}(t)$ и $\mathbf{U}(t)\ne 0$, а $\varepsilon(t)$ — неотрицательная почти-периодическая функция с положительным средним значением. Покажем, что в этом случае нелинейная система (1) имеет не более одного ограниченного решения.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ — произвольные ограниченные решения нелинейной системы (1). Полагая $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)$ и $u(t)=(1/2)(\mathbf{U}(t)\mathbf{z}(t),\mathbf{z}(t))$, мы видим, что числовая функция $u(t)$ дифференцируема и согласно условию (11)

$$\dot{u}(t)=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}(t)\mathbf{z}(t),\mathbf{z}(t))+(\mathbf{U}(t)\mathbf{z}(t),\dot{\mathbf{z}}(t))\ge\varepsilon(t)\|\mathbf{z}(t)\|^2$$

(мы воспользовались симметричностью матрицы $\mathbf{U}(t)$). Так как $|u(t)|\le(1/2)\|\mathbf{U}(t)\|\|\mathbf{z}(t)\|^2$, то мы приходим к дифференциальному неравенству

$$\dot{u}(t)\ge\frac{2\varepsilon(t)}{\|\mathbf{U}(t)\|}|u(t)|.$$

Это дифференциальное неравенство показывает, что функция $u(t)$ в силу $\dot{u}(t)\ge 0$ является неубывающей. Кроме того, она является ограниченной. Покажем, что последнее возможно только в случае $u(t)\equiv 0$. Предположим обратное: пусть $u(t_0)\ne 0$ для искомого $t_0\in\mathbb{R}$. Тогда если $u(t_0)>0$, то $u(t)\ge u(t_0)$ при $t_0\le t<\infty$ и

$$u(t)\ge\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{2\varepsilon(s)}{\|\mathbf{U}(s)\|}ds\right\}u(t_0)\to\infty \text{ при } t\to\infty,$$

что противоречит ограниченности функции $u(t)$; если $u(t_0)<0$, то $u(t)\le u(t_0)<0$ при $-\infty<t\le t_0$ и

$$u(t)\le\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\frac{2\varepsilon(s)}{\|\mathbf{U}(s)\|}ds\right\}u(t_0)\to-\infty \text{ при } t\to-\infty,$$

что опять-таки находится в противоречии с ограниченностью функции $u(t)$. Итак, $u(t)\equiv 0$.

Так как $\dot{u}(t)\equiv 0$, то из исходного неравенства находим $0\ge\varepsilon(t)\|\mathbf{z}(t)\|^2$, откуда вытекает, что $\|\mathbf{z}(t_0)\|=0$ при $\varepsilon(t_0)>0$. Поэтому $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{y}(t_0)$ и в силу предполагаемой единственности решения любой начальной задачи для системы (1) окончательно получаем $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{y}(t)$.

Если правые части системы (1) непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным $x_1,\dots,x_n$, то разностное условие (11) можно переписать в дифференциальной форме

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{U}}(t)\mathbf{z}(t),\mathbf{z}(t)\right)+\left(\mathbf{U}(t)\mathbf{z}(t),\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{z}\right)\ge\varepsilon(t)\|\mathbf{z}\|^2, \qquad (12)$$

которая допускает матричную трактовку

$$\dot{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{U}(t)\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}+\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x})^*}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{U}(t)\ge 2\varepsilon(t)I,$$

где $\mathbf{I}$ есть единичная $n \times n$-матрица.

Особенно простой вид условия (11) принимает для постоянных $\mathbf{U}^* = \mathbf{U} \neq 0$ и $\varepsilon > 0$,

$$(\mathbf{U}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})) \geq \varepsilon \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2. \qquad (13)$$

Если дополнительно известно, что ограниченная система (1) удовлетворяет условию Липшица

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\| \leq l \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \qquad (14)$$

то, используя переход к интегральным уравнениям, методом продолжения гомеоморфизма по параметру можно указать, что нелинейная система (1) имеет единственное ограниченное решение. Это ограниченное решение становится почти-периодическим, если система является почти-периодической. Последнее утверждение доказано в [15], причем сразу для гильбертовых пространств. Дальнейшее изучение условия (13) см. в работе [16].

В качестве предварительного результата докажем следующее утверждение. Пусть почти-периодическая система (1) (т.е. выполнено условие (2)) имеет различные почти-периодические решения $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$. Покажем, что тогда они разделены, т.е. существует такая положительная постоянная $d$, что

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \geq d, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (15)$$

Предполагая обратное, найдем последовательность $h_i$, для которой $\|\mathbf{x}(h_i) - \mathbf{y}(h_i)\| \to 0$. Из последовательности $h_i$ выберем подпоследовательность $h_i'$ так, чтобы $\mathbf{x}(t+h_i') \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(t)$; из последовательности $h_i'$ извлечем подпоследовательность $h_i''$, для которой $\mathbf{y}(t+h_i'') \Rightarrow \hat{\mathbf{y}}(t)$. Наконец, из $h_i''$ выделим подпоследовательность $h'''_i$ так, чтобы $\mathbf{f}(t+h_i''', \mathbf{x}) \Rightarrow \hat{\mathbf{f}}(t,\mathbf{x})$ при $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x} \in K$, где $K$ — любое ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$. Возвращаясь к прежним обозначениям (т. е. полагая $h_i''' = h_i$), имеем $\mathbf{x}(t+h_i) \Rightarrow \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t+h_i) \Rightarrow \mathbf{y}(t)$, $\mathbf{f}(t+h_i, \mathbf{x}) \Rightarrow \hat{\mathbf{f}}(t,\mathbf{x})$ при $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x} \in K$ (см. выше). Мы видим, что $\hat{\mathbf{x}}(t)$ и $\hat{\mathbf{y}}(t)$ являются почти-периодическими решениями присоединенной системы (3), причем $\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{y}}(0)$. По теореме единственности $\hat{\mathbf{x}}(t) \equiv \hat{\mathbf{y}}(t)$. Так как $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t-h_i)\| + \|\hat{\mathbf{x}}(t-h_i) - \hat{\mathbf{y}}(t-h_i)\| + \|\hat{\mathbf{y}}(t-h_i) - \mathbf{y}(t)\| \Rightarrow 0$, то $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$. Полученное противоречие и доказывает справедливость нашего утверждения.

Отметим, что впервые на роль разделенности в теории почти-периодических решений обратил внимание, по-видимому, Л. Америо [17] (см. также [12] и [13]).

Для того чтобы в дальнейшем не прерывать изложения, рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{z} = A(t)z + g(t), \qquad (16)$$

где $A(t)$ — непрерывная ограниченная матричная функция, а $g(t)$ — непрерывная ограниченная векторная функция. Хорошо известно (см., например, [6, § 3]), что система (16) при любой $g(t)$ имеет единственное ограниченное решение $z(t)$ тогда и только тогда, когда для решений соответствующей линейной однородной системы имеет место экспоненциальная дихотомия. При выполнении этого условия

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)g(s)ds, \qquad (17)$$

причем матричная функция Грина подчинена оценке

$$\|G(t,s)\| \leq Me^{-\gamma|t-s|}, \quad t \neq s, \qquad (18)$$

где $M$ и $\gamma$ — некоторые положительные постоянные. Пусть $k$ — это норма линейного интегрального оператора (17), рассматриваемого в банаховом пространстве непрерывных ограниченных на всей оси функций с sup-нормой,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{z}(t)\| \leq k \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{g}(t)\|. \qquad (19)$$

Согласно (18) имеет место оценка $k \leq 2M/\gamma$.

В вопросах разделенности может оказаться полезным следующее утверждение, идея которого заимствована у М. Урабе [18] (см. также [19], с. 42—49).

*Пусть $x_0(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая ограниченная векторная функция с ограниченной производной, причем*

$$\|\dot{\mathbf{x}}_0(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0(t))\| \leq \varepsilon, \qquad (20)$$

*т.е. $x_0(t)$ есть $\varepsilon$-решение. Пусть правые части ограниченной системы (1) непрерывно дифференцируемы в замкнутой области*

$$t \in \mathbb{R}, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)\| \leq \rho, \qquad (21)$$

*причем имеет место соотношение*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{A}(t) \right\| \leq \frac{q}{k}, \qquad (22)$$

*где*

$$0 < q < 1, \qquad (23)$$

*а $k$ — это норма интегрального оператора (17) (см. также (18) и (19)); при этом, конечно, предполагается, что $\mathbf{A}(t)$ — непрерывная ограниченная матричная функция, для которой имеет место экспоненциальная дихотомия. Пусть выполнено условие*

$$\frac{k\varepsilon}{1-q} \le \rho. \tag{24}$$

*Тогда нелинейная ограниченная система (1) имеет в замкнутой области (21) единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$, и для этого решения справедлива оценка*

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0(t)\| \le \frac{k\varepsilon}{1-q}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Доказательство основано на применении принципа сжимающих отображений к интегральному уравнению

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)\{\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s)) - \mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s)\}ds,$$

рассматриваемому на замкнутом шаре банахова пространства непрерывных ограниченных функций с центром $\mathbf{x}_0(t)$ и радиусом $\rho$ (см. (21)). Если $\varepsilon = 0$, то $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0(t)$ и других ограниченных решений в упомянутом шаре нет. Отметим еще, что дифференциальное условие (22) может быть заменено более слабым разностным ограничением

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y}) - \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| \le \frac{q}{k}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \tag{26}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(t)\| \le \rho$, $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0(t)\| \le \rho$. Продолжим разговор на наметившуюся тему. Пусть $\mathbf{x}_0(t)$ — некоторое ограниченное решение нелинейной ограниченной системы (1). Предположим, что правые части системы (1) непрерывно дифференцируемы в окрестности (21) указанного решения и выполнены следующие условия: непрерывная матричная функция

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0(t))}{\partial \mathbf{x}} \tag{27}$$

является ограниченной и обеспечивает экспоненциальную дихотомию решений соответствующей однородной системы;

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0(t)) - \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(t))\| \le \\ &\le \eta\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(t)\|^2, \end{aligned} \tag{28}$$

в окрестности (21), где $\eta$ — некоторое положительное число. Тогда если выполнено ограничение

$$k\eta\rho < 1, \tag{29}$$

то система (1) не имеет в указанной окрестности ограниченных решений, кроме $\mathbf{x}_0(t)$.

Это положение, наряду с локальным условием типа (11), может служить для проверки разделенности ограниченных решений почти-периодических систем. Согласно теоремы Л. Америо [12, с. 437—441] *если все ограниченные решения почти-периодической системы (1) разделены (и этим же свойством обладают все присоединенные системы (3)), то каждое из ограниченных решений (а их оказывается только конечное число) является почти-периодическим.*

В заключение приведем еще одно утверждение близкого характера. Пусть $\mathbf{x}_0(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая ограниченная векторная функция с ограниченной производной — является $\varepsilon$-решением для ограниченной системы (1) (см. (20)). Пусть правая часть системы (1) непрерывно дифференцируема в окрестности (21), причем выполнено условие (29). Тогда если ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1) лежит в $\rho$-окрестности $\varepsilon$-решения $\mathbf{x}_0(t)$ и

$$\rho < \frac{1+\sqrt{1-4k^2\varepsilon}}{2k\eta}, \tag{30}$$

*то справедлива следующая оценка*

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0(t)\| \le \frac{1-\sqrt{1-4k^2\varepsilon}}{2k\eta}. \tag{31}$$

Мы видим, что при $\varepsilon = 0$ требование (30) переходит в ограничение (29), а оценка (31) говорит о том, что в $\rho$-окрестности ограниченного решения $\mathbf{x}_0(t)$ нет других ограниченных решений системы (1).

Приведем основные определения метода направляющих функций, причем приводимые ниже определения отличаются от традиционных.

Заданная на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемая функция $u(\mathbf{x})$ называется *направляющей* для нелинейной системы (1), если выполнено следующее условие

$$(\operatorname{grad} u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t,\mathbf{x})) \ge 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in G. \tag{32}$$

Направляющая функция называется *строгой*, если в (32) исключен знак равенства

$$(\operatorname{grad} u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t,\mathbf{x})) > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in G. \tag{33}$$

Наконец, направляющая функция называется *равномерной*, если неравенство (33) выполнено в более сильной форме

$$(\text{grad } u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t,\mathbf{x})) \geq \alpha \|\text{grad} u(\mathbf{x})\| \|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\|, \quad (34)$$

где $\alpha$ - некоторая положительная постоянная, $0 < \alpha < 1$. В написанных формулах круглые скобки означают стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а норма - это норма, порожденная этим скалярным произведением.

Скажем несколько слов по поводу используемого нами определения непрерывно дифференцируемой функции $u(\mathbf{x})$, заданной на произвольном множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Если множество $G$ открыто, то непрерывная дифференцируемость означает, как известно, что частные производные $\partial u(x_1, ..., x_n)/\partial x_i$ $(i = 1, ..., n)$ существуют и непрерывны на $G$. Если же множество $G$ не является открытым, то функция $u(\mathbf{x})$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если она есть сужение некоторой непрерывно дифференцируемой функции, определенной на каком-либо открытом множестве, содержащем множество $G$.

При этом может случиться, что в граничных точках множества $G$ градиент функции $u(\mathbf{x})$ не определяется однозначно. Для устранения указанного недостатка потребуем дополнительно, чтобы размерность касательного подпространства к множеству $G$ в каждой его граничной точке равнялась $n$. *Касательным подпространством* $T(x_0)$ к множеству $G$ в точке $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ называется подпространство, натянутое на касательные векторы $\mathbf{h}$ к множеству $G$ в точке $\mathbf{x}_0 \in G$, каждый из которых получается в результате предельного перехода $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)/\alpha_k \to h$, где $\mathbf{x}_k \in G$ и $\mathbf{x}_k$ сходится к $\mathbf{x}_0$, а $0 \neq \alpha_k \to 0$.

Заданная на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемая функция $u(\mathbf{x})$ называется *невырожденной*, если невырожденным является векторное поле ее градиента, т.е. $\text{grad } u(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \in G$.

Если векторные поля $\text{grad } u(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ (при фиксированном $t \in \mathbb{R}$) на множестве $G$ являются невырожденными (т.е. $\text{grad } u(\mathbf{x}) \neq 0$ и $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \in G$), то условие (32) говорит о том, что они гомотопны. Удобство использования строго направляющих функций состоит в том, что из неравенства (33) вытекает невырожденность указанных выше векторных полей и, конечно, их гомотопность. Равномерность направляющей функции согласно (34) означает, что угол $\varphi$ между векторами $\text{grad } u(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ (мы считаем эти поля невырожденными) отделен от прямого

$$\cos\varphi = \frac{(\text{grad } u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t,\mathbf{x}))}{\|\text{grad} u(\mathbf{x})\| \|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\|} \geq \alpha > 0. \quad (35)$$

Рассмотрим нелинейную почти-периодическую систему (1). Допустим, что для нее можно указать такое ограниченное замкнутое выпуклое множество $K \subset \mathbb{R}^n$, имеющее внутренние точки, что каждая точка $\mathbf{x}$ из $K$ при движении по траекториям системы (1) в сторону возрастания времени не выходит за пределы множества $K$. Тогда оператор сдвига $\mathbf{U}(t,s)$ при $t > s$ преобразует $K$ в себя,

$$\mathbf{U}(t,s)K \subseteq K, \quad t > s. \quad (36)$$

Заметим, что инвариантность множества $K$ при движении по траекториям системы (1) обеспечивает нелокальную продолжимость решений вправо.

Как и в [5, с. 44] множество $K$ назовем *каноническим*, если: $K$ ограничено и выпукло; $K$ задано конечным числом неравенств $w_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, ..., p$, где функции $w_i(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемы; если в точке $\mathbf{x}$ границы $\partial K$ множества $K$ выполнено равенство $w_i(\mathbf{x}) = 0$, то $\text{grad } w_i(\mathbf{x}) \neq 0$. Через $\alpha(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in \partial K)$ будем обозначать те индексы $i = 1, ..., p$, для которых $w_i(\mathbf{x}) = 0$.

**Теорема 1.** *Пусть правые части нелинейной почти-периодической системы (1) на границе $\partial K$ канонического множества $K$ удовлетворяют условиям*

$$(\text{grad } w_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t,\mathbf{x})) \leq 0, \quad i \in \alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K. \quad (37)$$

*Тогда система (1) имеет по крайней мере одно рекуррентное решение.*

Отметим, что если система (1) удовлетворяет условиям (37), то и любая присоединенная система (3) им также удовлетворяет.

Напомним, (сравни с [5. с. 202]), что заданная на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ функция $u(x)$ называется *возрастающей*, если

$$|u(\mathbf{x})| \to \infty \text{ при } \|\mathbf{x}\| \to \infty. \quad (38)$$

Известно, что индекс невырожденной возрастающей функции равен 1 или $(-1)^n$ (в зависимости от того положительные или отрицательные значения принимает она при всех достаточно больших по норме $\mathbf{x}$ из $\mathbb{R}^n$). При этом *индексом* невырожденной функции $u(x)$ называется вращение векторного поля градиента $\mathrm{grad}\,u(\mathbf{x})$ на сферах $\|\mathbf{x}\| = r$ достаточно большого радиуса.

**Теорема 2.** *Пусть для нелинейной почти-периодической системы (1) может быть указана невырожденная возрастающая направляющая функция.*

*Тогда система (1) имеет по крайней мере одно рекуррентное решение.*

Обратим внимание на явную близость теорем 1 и 2. Для нас основной интерес представляют случаи, когда для системы (1) не может быть указана возрастающая направляющая функция, но другие направляющие функции указываются без труда.

**Теорема 3.** *Пусть для нелинейной почти-периодической системы (1) могут быть построены направляющие функции*

$$u_1(\mathbf{x}), ..., u_p(\mathbf{x}), \tag{39}$$

*т.е. пусть выполнены условия*

$$(\mathrm{grad}\,u_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x})) \geq 0,\ i = 1, ..., p;\ \|\mathbf{x}\| \geq r_0, \tag{40}$$

*причем хотя бы одна из них является строгой (т.е. для нее в (40) исключен знак равенства). Пусть индекс этой невырожденной направляющей функции отличен от нуля (например, она четная). Пусть, наконец,*

$$|u_1(\mathbf{x})| + ... + |u_p(\mathbf{x})| \to \infty \quad \textit{при} \quad \|\mathbf{x}\| \to \infty. \tag{41}$$

*Тогда система (1) имеет по крайней мере одно рекуррентное решение.*

При доказательстве теоремы 3 мы опираемся на следующее утверждение. *Пусть выполнено условие*

$$(\mathrm{grad}\,u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x})) \geq 0,\ \|\mathbf{x}\| \geq r_0$$

*(т.е. функция $u(\mathbf{x})$ является направляющей для системы (1) (см. например (32)) и пусть*

$$m = \min_{\|\mathbf{x}\|=r_0} u(\mathbf{x}),\quad M = \max_{\|\mathbf{x}\|=r_0} u(\mathbf{x}).$$

*Тогда для каждой точки $\mathbf{x}_0$ с $\|\mathbf{x}_0\| > r_0$, которая удовлетворяет одному из неравенств*

$$u(\mathbf{x}_0) < m \textit{ или } u(\mathbf{x}_0) > M,$$

*положительная полутраектория $\mathbf{x} = p(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ $(t > t_0)$ и отрицательная полутраектория $\mathbf{x} = p(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ $(t < t_0)$ не имеют общих точек в шаре $\|\mathbf{x}_0\| > r_0$.*

Здесь через $\mathbf{x} = p(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ обозначено решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Доказательство приведенного выше утверждения очевидно: если $u(\mathbf{x}_0) < m$, то отрицательная полутраектория не имеет точек в шаре $\|\mathbf{x}\| \leq r_0$, а если $u(\mathbf{x}_0) > M$, то в этом шаре нет точек положительной полутраектории.

**Теорема 4.** *Пусть для нелинейной почти-периодической системы (1) можно указать направляющие функции (39) (т.е. выполнены условия (40)), причем выполнено также и условие (41).*

*Пусть по крайней мере одна из направляющих функций (39) является невырожденной и имеет ненулевой индекс (например, является четной). Пусть, наконец, сумма всех направляющих функций (39) является строгой направляющей функцией*

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{grad}\,u_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\right) > 0,\ \|\mathbf{x}\| \geq r_0. \tag{42}$$

*Тогда система (1) имеет по крайней мере одно определенное на всей оси рекуррентное решение.*

Теорема 4 доказывается сведением к условиям теоремы 3 (они и внешне мало чем отличаются друг от друга). В заключение приведем еще одну теорему, в которой по сравнению с теоремами 3 и 4 несколько ослаблены требования.

**Теорема 5.** *Пусть для нелинейной почти-периодической системы (1) может быть указана строго направляющая функция $u(\mathbf{x})$ ненулевого индекса (39) (например, четная)*

$$(\mathrm{grad}\,u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x})) > 0,\ \ \|\mathbf{x}\| \geq r_0.$$

*Пусть $T$ — множество таких точек $\mathbf{x}$ из $\mathbb{R}^n$, что $m \leq u(\mathbf{x}) \leq M$ (числа $m$ и $M$ определены в теореме 3) и $\|\mathbf{x}\| \geq r_1$, где $r_1$ — некоторое число, больше чем $r_0$. Пусть на $T$ заданы направляющие функции*

$$u_1(\mathbf{x}), ..., u_p(\mathbf{x}),$$

*удовлетворяющие условиям*

$$(\mathrm{grad}\ \ u_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x})) \geq 0,\ \ i = 1, ..., p;\ \ \mathbf{x} \in T,$$

$$|u_1(\mathbf{x})| + ... + |u_p(\mathbf{x})| \to \infty \textit{ при } \|\mathbf{x}\| \in T \textit{ и } \|\mathbf{x}\| \to \infty.$$

*Тогда система (1) имеет по крайней мере одно определенное на всей оси рекуррентное решение, подчиненное оценке $\|\mathbf{x}(t)\| \leq r_1$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

Подчеркнем, что в теоремах 3—5 отсутствует предположение о нелокальной продолжимости решений системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений// ДАН СССР. — 1958. — 123, № 2. — С. 235—238.

2. *Перов А. И.* Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Кандидатская диссертация, Воронеж, 1959, 129 с.

3. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.-248 с.

4. *Красносельский М. А.* Альтернативный принцип существования периодических решений для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом// ДАН СССР. — 1963. — 152, № 4. — С. 801—804.

5. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 332 с.

6. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

7. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

8. *Миллионщиков В. М.* Рекуррентные и почти-периодические предельные траектории неавтономных систем// Диф. уравнения. — 1968. — 4, № 9. — С. 1155—1159.

9. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 480 с.

10. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 396 с.

11. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 492 с.

12. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

13. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — 208 с.

14. Математическая энциклопедия (том 4). — М.: Советская энциклопедия, 1984. — 1216 с.

15. *Перов А. И.* Периодические, почти-периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t,x)$ // ДАН СССР. — 1960. — 132, № 3. — С. 531—534.

16. *Коструб И. Д.* О методе направляющих функций. Тезисы международной конференции «Дифференциальные уравнения и нелинейные колебания», Черновцы, 2001 г., С. 82.

17. *Amerio L.* Soluzioni quasi periodishe, o limitate di sistemi differenziali nonlinerari quasi-periodici, o limitati. Annali Math. pura ed appl., 1955, 39, 97—119.

18. *Urabe M.* Galerkin’s procedure for non-linear periodic systems. Arch. Rational Mech. Anal., 1965, V. 20, P. 120—152.

19. *Крюков Б. И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. — М.: Машиностроение, 1984. — 216 с.