УДК 517.983

ИТЕРИРОВАННАЯ ЗАДАЧА КОШИ С ОПЕРАТОРОМ ЛЕЖАНДРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2002 г. М. А. Латынина

Воронежский государственный университет

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $2n > 2$

$$(L_k - A)^n u(t) = A_0^n u(t), t > 0, \qquad (1)$$

где оператор Лежандра L_k имеет вид $L_k u(t) = u''(t) + \gamma k \operatorname{cth} \gamma t u'(t) + \left(\frac{\gamma k}{2}\right)^2 u(t), \quad k > 0, \quad A_0$ принадлежит банахову пространству линейных ограниченных операторов $B(E)$.

Оператор A такой, что существует единственное решение $P_k^\gamma(t)u_0$ задачи

$$L_k u(t) = Au(t), u(0) = u_0 \in D(A), u'(0) = 0, \qquad (2)$$

причем

$$\|P_k^\gamma(t)u_0\| \le M\exp(wt)\|u_0\|, M \ge 1, w \ge 0.$$

В этом случае будем говорить, что задача (2) равномерно корректна ($A \in G_k^\gamma(E)$), $P_k^\gamma(t)$ будем называть операторной функцией Лежандра (ОФЛ). Начальные условия для $0 \le j \le n-1$ будем задавать в виде

$$\lim_{t\to 0}(L_k - A)^j u(t) = x_{j+1}, \lim_{t\to 0}((L_k - A)^j u(t))' = 0. \qquad (3)$$

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, для которой при $j = 0, 1, \ldots, n-1$ выполняются условия $(L_k - A)^j u(t) \in C(R_+, D(A)) \cap C^2(\overline{R_+}, E)$ и которая удовлетворяет этому уравнению при $t > 0$.

Пусть E_n — банахово пространство элементов $U = (u_1, \ldots u_n)^{\mathrm{T}}$ с нормой $\|U\| = \sum_{i=1}^n \|u_i\|$; $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)^{\mathrm{T}}$ $u_1(t) = u(t), u_i(t) = (L_k - A)u_{i-1}(t)$,

$$A_{(n)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_0^n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачу (1), (3) запишем в виде

$$L_k U(t) = (A_{(n)} + Q)U(t), \qquad (4)$$

$$U(0) = X, U'(0) = 0. \qquad (5)$$

Легко убедиться, что если $U(t)$ — решение задачи (4), (5), то $u(t) = u_1(t)$ — решение задачи (1), (3).

Определение 2. Задача (1), (3) называется равномерно корректной, если в E_n равномерно корректна задача (4), (5), т.е. если $A_{(n)} + Q \in G_k^\gamma(E_n)$.

Лемма. Если $A \in G_k^\gamma(E)$, то $A_{(n)} \in G_k^\gamma(E_n)$ и при этом ОФЛ $P_k^\gamma(t, A_{(n)})$ имеет вид

$$P_k^\gamma(t, A_{(n)}) = \begin{pmatrix} P_k^\gamma(t,A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_k^\gamma(t,A) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k^\gamma(t,A) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть $A \in G_k^\gamma(E)$, оператор $A_0 \in B(E)$ такой, что $D(A)$ инвариантна относительно A_0, и на $D(A)$ оператор A коммутирует с A_0, $x_i \in D(A)$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда задача (1), (3) равномерно корректна, и при этом ее решение имеет вид:

$$u(t) = P_k^\gamma(t,A)x_1 + \frac{(-1)^n 2^{k/2-N-2} k\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(N+1/2)\Gamma(k/2+1)} \times$$
$$\times \left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{1-k} Q \int_0^t \left(\frac{\operatorname{sh}\gamma y}{\gamma}\right)^{2N} \left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma y}\frac{d}{dy}\right)^N \times$$
$$\times \left(A_0^n \sum_{j=0}^\infty \frac{A_0^{nj} z_{j,2n-1}}{2^{2(nj+n-1)}(nj+n-1)!\Gamma(nj+n+1)} \times \right. \qquad (6)$$
$$\times P_{2N}(y,A)x_1 + \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^\infty \frac{A_0^{nj} z_{j,2i+1}}{2^{2(nj+i)}(nj+i)!\Gamma(nj+2+i)} \times$$
$$\left. \times P_{2N}(y,A)x_{2+i} \right) dy,$$

где

$$z_{j,m}=\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\left(\frac{\mathrm{ch}\gamma t-\mathrm{ch}\gamma\sqrt{s^2+y^2}}{\gamma^2}\right)^{k/2-1}s^{2nj+m}ds, \quad (7)$$

$m=1,3,...,2n-3$, N — наименьшее натуральное число такое, что $2N\ge k$, и для $i=0,1,...,n-1$, $x_{i+1}\in D(A)$.

Доказательство. Т.к. $Q\in B(E_n), A_{(n)}\times Q = = Q\times A_{(n)}$, то $A_{(n)}+Q\in G_k^\gamma(E_n)$ (см. [1]), поэтому задача (4), (5), а ,значит, и задача (1), (3) равномерно корректны и остается установить представление (6).

Поскольку задача (4), (5) равномерно корректна, то применима теорема 2, (см. [1]) согласно которой решение этой задачи можно записать в виде

$$U(t)=P_k^\gamma(t,A_{(n)})x_1+$$
$$+\frac{(-1)^N 2^{k/2-N-2}k\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(N+1/2)\Gamma(k/2+1)}\left(\frac{\mathrm{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{1-k}\times$$
$$\times Q\int_0^t\left(\frac{\mathrm{sh}\gamma y}{\gamma}\right)^{2N}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{sh}\gamma y}\frac{d}{dy}\right)^N F_\gamma(y,s,Q)P_{2N}(y,A_{(n)})x_1dy, \quad (8)$$

где

$$F_\gamma(t,y;Q)=\sum_{i=0}^\infty\frac{Q^i}{2^{2i}i!(i+1)!}\times$$
$$\times\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\left(\frac{\mathrm{ch}\gamma t-\mathrm{ch}\gamma\sqrt{s^2+y^2}}{\gamma^2}\right)^{k/2-1}s^{2i+1}ds,$$

N — наименьшеее натуральное число, такое что $2N>k$.

Степени матрицы Q обладают следующими свойствами: для $i=1,\dots,n-1$

и $Q^n=A_0^n\times J$, где J — единичная матрица.

После элементарных преобразований функцию $F_\gamma(t,y;Q)$ запишем в виде

$$F_\gamma(t,y;Q)=\sum_{i=0}^\infty\frac{Q^i}{2^{2i}i!(i+1)!}\times$$
$$\times\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\left(\frac{\mathrm{ch}\gamma t-\mathrm{ch}\gamma\sqrt{s^2+y^2}}{\gamma^2}\right)^{k/2-1}s^{2i+1}ds=$$
$$=\sum_{i=0}^\infty\frac{A_0^{nj}J}{2^{2nj}(nj)!\Gamma(nj+2)}\times$$
$$\times\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\left(\frac{\mathrm{ch}\gamma t-\mathrm{ch}\gamma\sqrt{s^2+y^2}}{\gamma^2}\right)^{k/2-1}s^{2nj+1}ds+$$
$$+\sum_{i=0}^\infty\frac{A_0^{nj}Q}{2^{2+2nj}(nj+1)!\Gamma(nj+3)}\times$$
$$\times\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\left(\frac{\mathrm{ch}\gamma t-\mathrm{ch}\gamma\sqrt{s^2+y^2}}{\gamma^2}\right)^{k/2-1}s^{2nj+3}ds+\dots$$
$$+\sum_{i=0}^\infty\frac{A_0^{nj}Q^{n-1}}{2^{2(n-1+nj)}(n-1+nj)!\Gamma(nj+n+1)!}\times$$
$$\times\int_0^{\sqrt{t^2-y^2}}\left(\frac{\mathrm{ch}\gamma t-\mathrm{ch}\gamma\sqrt{s^2+y^2}}{\gamma^2}\right)^{k/2-1}s^{2nj+2n-1}ds=$$
$$=\sum_{i=0}^\infty\frac{A_0^{nj}J}{2^{2nj}(nj)!\Gamma(nj+2)}z_{j,1}+$$
$$+\sum_{i=0}^\infty\frac{A_0^{nj}Q}{2^{2+2nj}(nj+1)!\Gamma(nj+3)}z_{j,3}+\dots$$
$$+\sum_{i=0}^\infty\frac{A_0^{nj}Q^{n-1}}{2^{2(nj+n-1)}(nj+n-1)!\Gamma(nj+n+1)}z_{j,2n-1}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^\infty\frac{A_0^{nj}Q^iz_{j,2i+1}}{2^{2(nj+i)}(nj+i)!\Gamma(nj+2+i)},$$

$$\begin{array}{cc}
 & \text{N стр.}\\
Q^i=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1\\
A_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & A_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c}1\\2\\\dots\\n-i-1\\n-i\\n-i+1\\n-i+2\\\dots\\n\end{array}\\
\text{N стб. } 1 \quad 2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad i-1 \quad i \quad i+1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad n, &
\end{array}$$

где $z_{j,m}$ определяется по формуле (7). Для определения решения $u(t) = u_1(t)$ нужна только первая строка матрицы произведения $Q \times F_\gamma(t, y; Q)$, которая совпадает со второй строкой матрицы $F_\gamma(t, y; Q)$ и имеет вид

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj+n} z_{j,2n-1}}{2^{2(nj+n-1)}(nj+n-1)!\Gamma(nj+n+1)}; \right.$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,1}}{2^{2nj}(nj)!\Gamma(nj+2)}; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,3}}{2^{2(nj+1)}(nj+1)!\Gamma(nj+3)};$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,5}}{2^{2(nj+2)}(nj+2)!\Gamma(nj+4)};\ldots$$
$$\left. \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,2n-3}}{2^{2(nj+n-2)}(nj+n-2)!\Gamma(nj+n)} \right).$$

Т.к. $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)^{\text{т}}$, то

$$(Q \times F_\gamma)X =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj+n} z_{j,2n-1}}{2^{2(nj+n-1)}(nj+n-1)!\Gamma(nj+n+1)} x_1 +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,1}}{2^{2nj}(nj)!\Gamma(nj+2)} x_2 +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,3}}{2^{2(nj+1)}(nj+1)!\Gamma(nj+3)} x_3 +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,5}}{2^{2(nj+2)}(nj+2)!\Gamma(nj+4)} x_4 + \ldots +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,2n-3}}{2^{2(nj+n-2)}(nj+n-2)!\Gamma(nj+n)} x_n = \tag{9}$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,2n-1}}{2^{2(nj+n-1)}(nj+n-1)!\Gamma(nj+n+1)} A_0^n x_1 +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,2i+1}}{2^{2(nj+i)}(nj+i)!\Gamma(nj+2+i)} x_{2+i}.$$

Подставляя полученное представление (9) в формулу (8), получим

$$u(t) = P_k^\gamma(t, A)x_1 + \frac{(-1)^n 2^{k/2-N-2} k\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(N+1/2)\Gamma(k/2+1)} \times$$
$$\times \left(\frac{\text{sh}\gamma t}{\gamma} \right)^{1-k} Q \int_0^t \left(\frac{\text{sh}\gamma y}{\gamma} \right)^{2N} \left(\frac{\gamma}{\text{sh}\gamma y} \frac{d}{dy} \right)^N \times$$
$$\times \left(A_0^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,2n-1}}{2^{2(nj+n-1)}(nj+n-1)!\Gamma(nj+n+1)} \times \right.$$
$$\times P_{2N}(y, A)x_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_0^{nj} z_{j,2i+1}}{2^{2(nj+i)}(nj+i)!\Gamma(nj+2+i)} \times$$
$$\left. \times P_{2N}(y, A)x_{2+i} \right) dy,$$

и тем самым теорема доказана.

Рассмотрим далее дифференциальное уравнение вида

$$(L_0 - A)^n w(t) = 0, A \in G_k^\gamma(E) \tag{10}$$

с начальными условиями

$$w_n(0) = w_n'(0) = \ldots = w_n^{(2n-2)}(0) = 0,$$
$$w_n^{(2n-1)}(0) = w_{2n-1}. \tag{11}$$

и пусть $v(t) = S(t)w_{2n-1}$ — решение задачи

$$L_0 v(t) = Av(t), v(0) = 0, v'(0) = w_{2n-1}. \tag{12}$$

В [2] устанавливается следующая формула, выражающая решение задачи Коши (10), (11) через решение задачи (12)

$$w_n(t) = \frac{(n-1)}{2^{2n-3}(n-1)!^2} \int_0^t \tau(t^2 - \tau^2)^{n-2} S(\tau) w_{2n-1} d\tau, \tag{13}$$

Основываясь на представлении (13), мы покажем, что решение задачи (10), (11) можно выразить через функцию $P_k^\gamma(t)w_{2n-1}$.

Как известно,

$$S(t) = \int_0^t P_0(s, A) ds, \tag{14}$$

и если $A \in G_k^\gamma$ при некотором $k > 0$, то можно воспользоваться теоремой 4 (см. [3]) и записать следующее представление для $P_0(t, A)$

$$P_0(t, A) = \frac{1}{(2N-1)!!} \left(\frac{\text{sh}\gamma t}{\gamma} \right) \left(\frac{\gamma}{\text{sh}\gamma t} \frac{d}{dt} \right)^N \times$$
$$\times \left(\left(\frac{\text{sh}\gamma t}{\gamma} \right)^{2N-1} P_{2N}^\gamma(t, A) u_0 \right), \tag{15}$$

где $u_0 \in D(A^{[N/2]+2})$, N — наименьшее натуральное число, такое, что $2N \geq k$. Подставляя (14), (15) в (13), будем иметь

$$w_n(t) = \frac{(n-1)}{2^{2n-3}(n-1)!^2(2N-1)!!} \int_0^t \tau(t^2 - \tau^2)^{n-2} \times$$
$$\times \int_0^\tau \left(\frac{\text{sh}\gamma s}{\gamma} \right) \left(\frac{\gamma}{\text{sh}\gamma s} \frac{d}{ds} \right)^N \left(\left(\frac{\text{sh}\gamma s}{\gamma} \right)^{2N-1} P_{2N}^\gamma(s, A) u_0 \right) ds d\tau.$$

Проинтегрировав $N-1$ раз по частям, окончательно получим

$$w_n(t) = \frac{(-1)^{N+1}(n-1)}{2^{2n-3}(n-1)!^2(2N-1)!!} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\gamma}{\text{sh}\gamma\tau} \frac{d}{d\tau} \right)^{N-2} \times$$

$$\times\left((t^2-\tau^2)^{n-2}\frac{\gamma\tau}{\mathrm{sh}\gamma\tau}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}\gamma\tau}{\gamma}\right)^{2N-1}P_{2N}^{\gamma}(\tau,A)u_0d\tau=$$

$$=\frac{(-1)^{N+1}(n-1)}{2^{2n-3}(n-1)!^2(2N-1)!!}\int_0^t\left(\frac{\gamma}{\mathrm{sh}\gamma\tau}\frac{d}{d\tau}\right)^{N-1}\times$$

$$\times\left((t^2-\tau^2)^{n-2}\frac{\gamma\tau}{\mathrm{sh}\gamma\tau}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}\gamma\tau}{\gamma}\right)^{2N}P_{2N}^{\gamma}(\tau,A)u_0d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Латынина М. А.* О возмущении абстрактного уравнения Лежандра. //Труды математического факультета. (Новая серия.) Выпуск 5. — 2001, С. 34—43.

2. *Олевский М. Н.* Задача Коши для итерированного дифференциального уравнения. //ДАН СССР. — 1963. — Т. 148, № 5, — С. 1026—1029.

3. *Глушак А. В.* Операторная функция Бесселя и стабилизация решений дифференциальных уравнений.: Учебн. пособие. — Воронеж: ВГТУ, 1997.