ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 1

УДК 517.9

О БЕССРОЧНОЙ РЕНТЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ СТАВКАМИ

© 2002 г. Ю. Г. Курицын

Воронежский государственный университет

Рассмотрим простую бессрочную ренту, представляющую поток платежей одинакового номинала через равные промежутки времени. Не ограничивая общности, будем рассматривать величину одного платежа равную единице, через единицу времени, соответствующую начислению сложного процента. В этом случае современная (приведенная) стоимость бессрочной ренты равна

$$S := 1 + v + \ldots + v^n + = \frac{1}{1-v}, \qquad (1)$$

где $v \in [0,1]$ — дисконтирующий множитель, связанный с величиной i — ставкой процента равенством $v = (i+1)^{-1}$, $i \geq 0$.

Значительная часть расчетов в финансовых операциях (см., например, [1]) проводится в предположении, что ставка процента i не меняется во времени. Ее называют технической. Формальный переход к случаю, когда дисконтирующий множитель меняется во времени, усложняет расчеты, так как вместо равенства (1) появляется более сложная сумма:

$$S := 1 + v_1 + v_1 \cdot v_2 + \cdots + \prod_{j=1}^{n} v_j + \cdots. \qquad (2)$$

Такое усложнение вряд ли рационально без признания случайности дисконтирующих множителей v_j. Ведь эти расчеты относятся обычно к будущим временам и связаны с попыткой получить современную стоимость будущих выплат. Несмотря на скептическое отношение части специалистов в области финансовой математики (см., например, [1]) к предположению о случайности ставки процента, автор, принимая лишь часть возражений, полагает, что модель случайной последовательности $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ представляет интерес хотя бы в теоретическом плане.

Далее будет рассматриваться случай, когда последовательность $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ дисконтирующих множителей является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением сосредоточенным на отрезке $[0,1]$. В этом случае приведенная стоимость бессрочной ренты составляет случайную величину S, формально являющуюся суммой ряда (2). Рассмотрим вопрос о его сходимости.

Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью частичных сумм ряда (2), где $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} v_i$. Эта последовательность неубывает при всех исходах, что является ключевым обстоятельством для

Теорема 1. *Если* $P\{v_1 = 1\} < 1$, *то ряд (2) сходится п.н. и в норме пространства* L^r *для любого* $r \geq 1$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что частичные суммы S_n связаны рекуррентным соотношением

$$S_n \stackrel{d}{=} 1 + v_1 S_{n-1}, \qquad (3)$$

где $n = \overline{1,\infty}$, $S_0 \equiv 0$, $\stackrel{d}{=}$ означает равенство распределений. Отметим, что сомножители в правой части равенства (3) стохастически независимы по условию теоремы. Оценим нормы величин S_n в пространстве L^r $(r \geq 1)$ пользуясь линейностью пространства L^r, равенством (3) и упомянутой независимостью величин v_1 и S_{n-1}.

$$\|S_n\|_r \leq 1 + \|v_1 \cdot S_{n-1}\|_r =$$

$$= 1 + \|v_1\|_r \, \|S_{n-1}\|_r \leq \ldots \leq \frac{1 - \|v_1\|_r^{n=1}}{1 - \|v_1\|_r}.$$

В условиях теоремы $\|v_1\|_r < 1$, поэтому последовательность $\|S_n\|_{n=1}^{\infty}$ ограничена по норме пространства L^1 и в силу теоремы Б. Леви она сходится п.н. к некоторой величине S — сумме ряда (2). Сходимость этой последовательности по норме пространства L^r $(r \geq 1)$ следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. ▲

Замечание. $S \in L^{\infty}$ тогда и только тогда, когда носитель распределения величины v_1 не содержит единицы, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что $P\{v_1 < 1-\varepsilon\} = 1$. В этом случае имеет место сходимость величин S_n к S по норме пространства L^∞.

Следующее утверждение является основным.

Теорема 2. *Если $P\{v_1 = 1\} < 1$, то справедливо равенство*

$$S-1 \stackrel{d}{=} v_1 \cdot S, \tag{4}$$

где элементы правой части стохастически независимы.

Доказательство сводится к предельному переходу в равенстве (3) с использованием теоремы 1.

Следствие 1. *Равенство (4) приводит к уравнению относительно функции распределения F случайной величины S:*

$$F(x+1) = \int_0^1 F\left(\frac{x}{v}\right) dF_{v_1}(v). \tag{5}$$

В силу теорем 1 и 2 уравнение (5) имеет единственное решение в классе функций распределения на $\mathbf{R}^+$, являющееся функцией распределения величины S.

Следствие 2. *Равенство (4) и теорема 1 позволяют легко вычислять математическое ожидание и дисперсию величины S:*

$$M(S) = \frac{1}{1-M(v_1)},\ D(S) = \frac{D(v_1)}{(1-M(v_1))^2(1-M(v_1)^2)}.$$

Следствие 3. *Введем случайную величину $\tilde{S} = S-1$, тогда равенство (4) приобретает форму*

$$\tilde{S} \stackrel{d}{=} v_1(\tilde{S}+1). \tag{6}$$

Пользуясь равенством (6) и тем фактом, что $S, \tilde{S} \in L^r$ ($r \ge 1$), можно написать рекуррентное выражение для моментов случайной величины $\tilde{S}$:

$$\mu_n(\tilde{S}) = \frac{\mu_n(v_1)}{1-\mu_n(v_1)} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \mu_k(\tilde{S}), \quad n \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Равенство (7) позволяет вычислять любое число моментов величины $\tilde{S}$ и, следовательно, с любой точностью вычислять приближения для функции $F_{\tilde{S}}(x)$, $x \in \mathbf{R}^+$.

Некоторую информацию о распределении величины S содержит

Теорема 3. *Если случайная величина v_1 имеет абсолютно-непрерывное распределение с плотностью распределения вероятностей $f_{v_1}(x)$, то величина S также абсолютно-непрерывна и имеет плотность распределения вероятностей $f_S(x)$, $x \ge 1$, удовлетворяющую равенству*

$$f_S(x+1) = \int_0^1 f_S\left(\frac{x}{v}\right) f_{v_1}(v) \frac{dv}{v}.$$

Доказательство. В условиях теоремы $P\{S > 1\} = 1$, поэтому равенство (4) приводит к

$$\ln(S-1) \stackrel{d}{=} \ln v_1 + \ln S. \tag{8}$$

В правой части равенства (8) находится сумма независимых случайных величин, поэтому из абсолютной непрерывности величины $\ln v_1$ следует абсолютная непрерывность величины $\ln(S-1)$, а, следовательно, и величины S. **N**

Следствие. Случайная величина S не может иметь логарифмически-нормального распределения.

Доказательство следствия опирается на равенство (8) и теорему Г. Крамера (см., например, [2]), согласно которой у нормальной случайной величины могут быть только нормальные независимые компоненты. Это противоречит равенству (8), т.к. распределение величины $\ln v_1$ сосредоточено на $(-\infty, 0]$.

По аналогии с классической моделью Кокса, Росса и Рубинштейна (см., например, [3]) рассмотрим случай, когда распределение величины v_1 сосредоточено в двух точках $0 \le a \le b \le 1$. Для частных вариантов: $a = 0$, $0 \le b \le 1$ и $0 \le a \le 1$, $b = 1$ ниже найдены решения уравнения (5).

Теорема 4. *Пусть $v_1 = b \cdot \varepsilon$, где $0 < b < 1$; $\varepsilon \sim Bi(1,p)$, $0 < p < 1$. Тогда распределение вероятностей случайной величины S сосредоточено в точках: $s_0 = 1$, $s_1 = 1+b, \ldots, s_n = 1+b_1+ + \cdots + b^n, \ldots$ и*

$$P\{S = s_k\} = qp^k \quad (k = \overline{0,\infty}, q = 1-p).$$

Если $v_1 \sim Bi(1,p)$, то случайная величина S имеет геометрическое распределение с параметром $q = 1-p$ ($S \sim \gamma(q)$).

Доказательство сводится к непосредственной проверке.

Замечание. Естественно назвать распределение из первой части теоремы обобщенным геометрическим. Его моменты легко вычисляются с помощью следствия 2 из теоремы 2.

Несколько более сложным является второй случай.

Теорема 5. Пусть $v_1 = a + \varepsilon(1-a)$, где $0 < a < 1$ и $\varepsilon \sim Bi(1,p)$, $p \in (0,1)$. Тогда

$$S \stackrel{d}{=} \xi_1 + a\xi_2 + +a^{k-1}\xi_k +,$$

где $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2 \stackrel{d}{=} \cdots \stackrel{d}{=} \xi_k \stackrel{d}{=} \cdots$ и $\xi_1 \sim \gamma(q)$, $p = 1-q$.

Доказательство. В условиях теоремы равенство (4) может быть записано с использованием характеристических функций:

$$e^{-it}\varphi_S(t) = q\varphi_S(at) + p\varphi_S(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

что приводит к очевидному равенству

$$\varphi_S(t) = \frac{q}{e^{-it} - p}\varphi_S(at), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что у распределения величины S имеется независимая компонента, имеющая геометрическое распределение с параметром q, т.е.

$$S \stackrel{d}{=} \xi_1 + a \cdot S, \quad \xi \sim \gamma(q).$$

Повторяя n раз проведенную выше операцию выделения независимой компоненты, приходим к аналогу равенства (9):

$$\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{q}{e^{-ita^{k-1}} - p}\varphi_S(a^{n+1}t), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Теперь осталось перейти к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (10). Очевидно, что последний множитель в правой части равенства (10) стремится к единице при $n \to \infty$ и любом $t \in \mathbf{R}$, откуда следут, что

$$\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{q}{e^{-ita^{k-1}} - p}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Следствие. Распределение вероятностей случайной величины S в условиях теоремы 5 непрерывно и либо сингулярно, либо абсолютно непрерывно, что вытекает из теоремы П. Леви и Винтера (см., например, [4], теор. 3.7.6 и 3.7.7).

Гипотеза. Если $0 < a \le 1/2$, то распределение вероятностей величины S сингулярно, если $1/2 < a < 1$, то оно абсолютно непрерывно.

Обратимся к случаю, когда $v_1 = \varepsilon(b-a) + a$; $\varepsilon \sim Bi(1,p)$, $p \in (0,1)$; $0 < a < b < 1$. Здесь имеет место

Теорема 6. Если $a + b \le 1$, $0 < a < b < 1$, $0 < p < 1$, то распределение вероятностей величины S непрерывно.

Доказательство. Пусть N_{S_n} — множества значений случайных величин S_n ($n = \overline{1,\infty}$). Представляя величину S_n в виде

$$1 + \sum_{j=1}^{n} a^{\sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k} b^{-i\sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k},$$

где вектор $\vec{\varepsilon}_n = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ имеет независимые, $Bi(1,p)$-распределенные компоненты, покажем, что $|N_{S_n}| = 2^n$, $n = \overline{1,\infty}$. Для этого, фиксируя $n \in \mathbf{N}$, введем в множестве значений случайного вектора $\vec{\varepsilon}_n$ лексико-графический порядок, считая, что

$$(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n') \succ (\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_n''),$$

если существует число $k \in \{\overline{1,n}\}$ такое, что $\varepsilon_i' = \varepsilon_i''$, $i = \overline{1,k-1}$ и $\varepsilon_k' < \varepsilon_k''$ для $\vec{\varepsilon}'_n, \vec{\varepsilon}''_n \in \{0,1\}^{\otimes n}$.

Рассмотрим разность значений величины S_n в точках $\vec{\varepsilon}'_n$ и $\vec{\varepsilon}''_n$:

$$S_n(\vec{\varepsilon}_n') - S_n(\vec{\varepsilon}_n'') = \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi_k'} b^k + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi_k' + \sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon_i'} -$$
$$-\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi_k''} + +\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi_k'' + \sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon_i'' + 1}\right], \tag{11}$$

где $\xi_k' = \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i'$, $\xi_k'' = \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i''$. Продолжая равенство (11), получаем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi'_k} b^k \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon'_{k+1}} b + +\left(\frac{a}{b}\right)^{\sum_{i=k=1}^{n}\varepsilon'_i} b^{n-k} - \right.$$
$$\left. -\frac{a}{b}\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon''_{k+1}} b + +\left(\frac{a}{b}\right)^{\sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon''_i} b^{n-k}\right)\right]. \tag{12}$$

Покажем, что разность (12) положительна для упорядоченных значений $\vec{\varepsilon}_n'$ и $\vec{\varepsilon}_n''$. Для этого рассмотрим наихудший вариант в равенстве (12), когда уменьшаемое в (12) равно $1 + a + \cdots + a^{n-k}$, а вычитаемое — $\frac{a}{b}(1 + b + \cdots + b^{n-k})$, что приводит к оценке снизу для (12). Знак этой оценки совпадает со знаком разности

$$1 + a + +a^{n-k} - \frac{a}{b}(1 + b + +b^{n-k}) =$$
$$= (b-a)\frac{1-(b-a)}{b(1-a)(1-b)} + a\left(\frac{b^{n-k}}{1-b} - \frac{a^{n-k}}{1-a}\right). \tag{13}$$

Первое слагаемое правой части равенства (13) положительно по условию теоремы, второе — в силу монотонности функции $\frac{x^{n-k}}{1-x}$, $x \in (0,1)$.

Этим установлено, что в условиях теоремы величина S_n принимает различные значения с вероятностями $\prod_{i=1}^{n} p^{\varepsilon_i}(1-p)^{1-\varepsilon_i}$, $\vec{\varepsilon} \in \{0,1\}^{\otimes n}$. Устремляя n к бесконечности, обнаруживаем, что величина максимального скачка у функции распределения величины S_n стремится к нулю. **N**

Отметим еще одно полезное утвверждение.

Теорема 7. *Если плотность распределения вероятностей случайной величины v_1 одновершинна с вершиной в нуле, то одновременно с вершиной в нуле будет и плотность распределения вероятности величины $\tilde{S}$.*

Доказательство. Основное равенство (4) может быть переписано в терминах характеристических функций

$$\varphi_{S-1}(t) = \int_0^1 \varphi_S(t \cdot u) f_{v_1}(u)\, du.$$

Теперь достаточно обратиться к следствию 2 теоремы 2.7.3 из [5]. **N**

Некоторые из приведенных выше результатов сохраняются и при более слабых ограничениях на вид последовательности $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ дисконтирующих множителей.

Теорема 8. *Если последовательность $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ образует субмартингал, то частичные суммы S_n, $n = \overline{1,\infty}$ ряда (2) образуют субмартингал также.*

Доказательство. Пусть $\sigma_n = \sigma_n(v_1, \ldots, v_n)$ — σ-алгебра событий, порожденных случайными величинами $v_1, \ldots, v_n$. Тогда

$$M(S_{n+1} \mid \sigma_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} v_j + \prod_{j=1}^{k} v_j M(v_{k+1} \mid \sigma_n) \geq S_n.$$

N

В этих существенно более общих условиях справедлив аналог теоремы 1.

Теорема 9. *Если последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует субмартингал и $P\{v_k < \beta\} = 1$, $k = \overline{1,\infty}$; $\beta < 1$, то частичные суммы S_n, $n = \overline{1,\infty}$ сходятся п.н. и в норме пространства L^r, $r \geq 1$ к некоторой случайной величине S.*

Доказательство следует из теоремы 8 и теоремы 4.1 гл. VII книги [6].

Отметим, что условие равномерной отделенности от единицы дисконтирующих множителей в теореме 9 может быть ослаблено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гербер Х.* Математика страхования жизни. М.: Мир, 1995. 154 с.

2. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972. 478 с.

3. *Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В.* К теории расчета опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время.// Теория вероятностей и ее применение. Т. 39 (1994), в. 1. С. 23—79.

4. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 423 с.

5. *Золотарев В. М.* Одновершинные устойчивые распределенияю М.: Наука, 1983. 304 с.

6. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1965. 605 с.